МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАТОНИЗМ

В. В. Целищев
Томский государственный университет
Институт философии и права СО РАН
leitval@gmail.com

Vitaly Tselishchev
Tomsk State University, Institute of philosophy and Law, Novosibirsk, Russia

Platonism in Mathematics

Abstract. The article discusses the origin and justification of the term "mathematical Platonism" in the research program of the modern philosophy of mathematics, originated with Frege. It is shown that intuitive understanding of mathematical knowledge as a description of mathematical reality, independent of human consciousness, adopted by community of working mathematicians is consistent with a number of aspects of Plato's philosophy, in particular his concept of the existence of extrasensory world of ideal objects. I discuss various objections to mathematical Platonism, in particular nominalistic view of mathematics and the problem of epistemic access to abstract objects of mathematics. As a response to these objections I consider the radical kind of Platonism, the so-called "Full-blooded Platonism" that expands the existence of mathematical objects to potentially viable entities that largely change the original Frege's research program.

Keywords: Platonism, Frege, abstract objects, the existence, mathematical knowledge, epistemic access, reality, nominalism continuum hypothesis.

* Работа выполнена в рамках программы повышения конкурентноспособности Томского государственного университета.

Известный афоризм А. Н. Уайтхеда «вся западная философия есть комментарии к Платону» заранее оправдывает появление термина «математический платонизм», если мы серьезно принимаем философию математики. Исторически, этот термин запустил в обращение видный математик П. Бернайс в лекции, прочитанной им в 1934 г., и опубликованной годом позднее.[1] Он отметил при этом, что термин относится именно к философии математики, а не к самой математической практике.

> …математические науки разрабатываются в полной безопасности и гармонии. Идеи Дедекинда, Пуанкаре и Гильберта систематически развиваются с огромным

[1] Bernays 1935.

> успехом, никак не конфликтуя в достижениях. Проблемы возникают только с философской точки зрения.[2]

Объясняя происхождение термина, Бернайс сопоставляет два подхода к геометрии – Евклида и Гильберта.

> Если мы сравним аксиоматическую систему Гильберта с системой Евклида… мы заметим, что Евклид говорит о фигурах, которые должны быть сконструированы, в то время как для Гильберта система точек, прямых и плоскостей существуют изначально. Евклид постулирует: между двумя точками можно провести прямую; Гильберт устанавливает аксиому: даны две точки, существует прямая линия, на которой находятся эти точки. «Существует» тут означает существование в системе прямых. Уже этот пример показывает… тенденцию рассмотрения объектов как оторванных от всяких связей с размышляющим субъектом. Поскольку эта тенденция утверждает себя особенно в философии Платона, позвольте мне называть ее «платонизмом».[3]

Термин «существование» здесь тесно связан с взглядом, который часто приписывается Платону, а именно, что все слова являются именами чего-то существующего. Р. Рорти полагает, что это является проявлением тенденции «подстраивания» великих философов под определенную исследовательскую программу:

> Философ, который полагает какой-либо семантический тезис… будет иметь совершенно иные разговоры с Платоном, нежели философ, который полагает, что философия языка есть проходящая причуда, не имеющая никакого отношения к настоящим проблемам, разделяющим Платона и его великих современных антагонистов (например, Уайтхеда, Хайдеггера или Поппера). Сторонники Фреге, Крипке, Поппера, Уайтхеда и Хайдеггера будут каждый раз отправлять Платона на переподготовку на свой манер перед тем, как начать с ним спор.[4]

Вопрос о том, в какой степени философские взгляды могут отражаться на собственно математических результатах, является спорным, хотя большинство практикующих математиков не считает философию заслуживающей внимания. Платонизм как философия математики характерен как позиция в отношении статуса концепции существования, на философском жаргоне – онтологического статуса объектов математики. Позиция эта состоит в том, что математические объекты существуют вне и независимо от человеческого сознания, являются вневременными и внепространственными сущностями, принадлежащими сфере внечувственной реальности. Хотя платонизм в таком понимании ассоциируется с одним из решений средневековой проблемы о природе универсалий, многие философы считают термин «платонизм» неудачным в том смысле, что он ассоциирует со специфическими вопросами математического мышления такие философские категории, смысл которых давно

---

[2] Цит. по английскому переводу статьи: Bernays 1983, 258.

[3] Bernays 1983, 258–259.

[4] Рорти 1994.

утерян. Часто термину «платонизм» предпочитают термин «математический реализм», хотя термин «реализм» слишком многозначен, чтобы такая замена оказалась удачной.

Несмотря на нежелательную в некоторых случаях ассоциацию с традиционными онтологическими спорами, следует признать, что она является практически неизбежной, поскольку по большому счету, по утверждению видного логика Э. Бета:

> Философия математики …есть онтология математических объектов.[5]

Несколько снижает категоричность этого утверждения скепсис в отношении полезности онтологической проблематики в математике. Создатель комбинаторной логики Г. Карри полагал, что

> …Особенность математики состоит в том, что она рассматривает только некоторые существенные свойства ее объектов, считая остальные не относящимися к делу. Один из этих несуществующих вопросов – об онтологии формальной системы… Мы должны принять нечто аналогичное принципу терпимости Карнапа в отношении онтологических вопросов.[6]

При столь радикальном расхождении позиций относительно значимости для математики онтологических разговоров следует иметь в виду, что оно отражает, согласно М. Балагеру, наличие двух проектов в философии математики.[7] С одной стороны, это герменевтический проект, суть которого состоит в ориентации на математическую теорию и практику при объяснении природы математических объектов и утверждений. С другой стороны, это метафизический проект, который ориентируется на философские традиции. В этой терминологии платонизм есть реализация метафизического проекта. Конечно, жесткое разграничение двух подходов является преувеличением и в значительной мере искусственным. Известно, что большинство работающих математиков верят в объективность существования открываемых ими объектов математической реальности, и в этом расплывчатом понимании природы абстрактных объектов математики они являются платонистами. При более пристальном взгляде, согласно тому же Балагеру, сами по себе математическая теория и практика не дают никаких резонов в поддержку той или иной позиции в метафизике. Это означает, что математика не дает никаких решающих аргументов за или против принятия платонизма как метафизического проекта.

Однако ситуация, с нашей точки зрения, не столь категорична. «Реальная» философия математики является пересечением герменевтического и метафизического проектов. Платонизм может пониматься по-разному, поскольку взгляд, согласно которому математические объекты существуют объективно и описываются математическими теориями, – а это и составляет суть математи-

[5] Beth 1965, 176.

[6] Curry 1970, 30–31.

[7] Balaguer 1998, 4–5.

ческого платонизма – совместим со многими дополнительными предпосылками как математического, так и метафизического толка. Так что неверно было бы полагать, что платонизм как философия математики представляет собой четко очерченное направление с набором ясных догм и посылок. Существует много взглядов, которые в той или иной степени разделяют платонистское признание области абстрактных объектов, но различаются в том, что касается природы этих объектов, возможности их познания, и ряде деталей. Так, видный логик и математик Г. Крайзель полагает, что следует различать объективность математических утверждений и объективность математических объектов.[8] Весьма распространенным пониманием платонизма является тезис о незаменимости (indispensability) математики в науке, который представлен в основном в работах У. Куайна и Патнэма.[9] Видное место занимает платонизм К. Геделя, у которого основную роль играет математическая интуиция: интуитивный доступ к математическим объектам аналогичен чувственному восприятию при познании физических объектов. [10] В современной философии математики платонизм находит свое наиболее отчетливое выражение у Г. Фреге, и поставленная им проблематика до сих пор актуальна. Именно с Фреге начинается то, что Б. Рассел впоследствии назвал «математической философией».[11] Действительно, Фреге ответственен за четкую постановку позиции платонизма в отношении математики, по сути различив онтологический платонизм, эпистемологический платонизм и методологический платонизм.

Главная особенность его подхода заключалась в стремлении подтвердить философские взгляды с помощью математических результатов. Апелляция к математике объясняется важностью вопросов о природе априорных истин, которые поднял Кант. В отношении такой практики существует значительный скепсис как со стороны работающих математиков, так и философов. Убедительный ответ на это дал Альберто Коффа:

> Континентальная философия времен Модерна всегда поддерживала тесные связи с наукой. У Канта связь была столь тесной, что вся его доктрина об априорном знании была мотивирована по большей части данными науки – предположительно прозрачными особенностями геометрии, арифметики и исчислений, которые требовали философского объяснения. Последователи Канта в XIX веке были двух типов: те, кто хотели проверить, было ли верным то, что он сказал об априорных науках, и те, кому было все равно. Последние включались в «коперниканский поворот» по «метафизическим» причинам. Первые, по большей части, посвящали огромное время анализу математического знания. В результате, их более доверчивые коллеги привыкли считать их неудавшимися математиками, которые хотят заслужит репутацию в философии. “Mathematica sunt, non leguntur”, – Фреге полагал, что именно это будет говорить большая часть философов о его работах. И он

[8] Kreisel 1972.

[9] См. Quine 1981, 148–155; Putnam 1975, 323–357.

[10] Gödel 1983, 470–485.

[11] См. Рассел 2007.

> был прав. То же самое могли бы говорить о большей части работ по семантической традиции.[12]

Последующее развитие философии математики не во всем согласовывалось с идеями Фреге, но одна идея обрела статус «неприкасаемой»: числа являются объектами. Лишь в 1965 г. П. Бенацерраф бросил вызов этой идее, вызвав бурную полемику.[13] Далее, Фреге мы обязаны четкой постановкой взгляда онтологического платонизма в отношении математики. Кроме признания чисел абстрактными объектами, этот взгляд включает также приравнивание роли абстрактных объектов в математике роли обыденных объектов в физике, без всякой попытки осуществить редукцию одних сущностей к другим. Кроме онтологического платонизма часто выделяют так называемый эпистемологический платонизм, связанный с представлением о том, как познаются абстрактные объекты математики. Фреге можно назвать и эпистемологическим платонистом, поскольку он полагал, как и Гёдель впоследствии, что познание подобного рода связано с некоторого рода восприятием, которое аналогично, но не тождественно чувственному восприятию. Наконец, Фреге был методологическим платонистом. Этот вид платонизма примечателен широким использованием неконструктивных математических методов, таких как закон исключенного третьего, непредикативные определения, непредикативные множества. Связь этих методов с онтологическим платонизмом состоит в том, что использование неконструктивных методов, критиковавшееся последующими поколениями логиков и математиков, предполагает, что математика имеет дело с бесконечной областью абстрактных объектов, существование которых не зависит от человеческого сознания. Таким образом, взгляды Фреге являются наиболее отчетливым выражением того, что называется платонизмом в математике. В некотором смысле, все, для кого важны технические детали платонизма, в той или иной степени опирается на аргументацию Фреге.

Однако логико-философские аргументы в пользу платонизма не являются исчерпывающими, поскольку платонистский взгляд в философии математики представляется вполне естественным большинству работающих математиков. С их точки зрения, существует огромное число математических истин, некоторые из которых открыты, а большая часть ждет своего открытия. Работа математиков заключается в расширении круга открытых истин. По словам английского математика и физика Р. Пенроуза,

> …В случае математики вера в некоторое высшее существование – по крайней мере для наиболее глубоких математических концепций, – имеет под собой гораздо больше оснований, чем в других областях человеческой деятельности.[14]
>
> Под термином «платонизм» можно понимать как то, что объекты математической мысли имеют некоторый род действительного «существования», так и то, что

---

[12] Coffa 1991, 22.

[13] Benacerraf 1983.

[14] Пенроуз 2003, 89.

математическая истина абсолютна… В моем представлении абсолютность математической истины и платонистское существование математических понятий, по существу, тождественны.[15]

Не менее характерным «платонистским» признанием является высказывание английского математика Г. Харди:

Я убежден в том, что математическая реальность лежит вне нас, что наша функция состоит в том, чтобы открывать или обозревать ее, и что теоремы, которые мы доказываем или великоречиво описываем как наши творения, по существу представляют собой наши заметки о наблюдениях математической реальности. Эту точку зрения в той или иной форме разделяли многие философы самого высокого ранга, начиная с Платона…[16]

Коль скоро признается существование вечных и внепространственных абстрактных объектов, то можно сделать еще один шаг и принять телеологическую картину развития математики. Это процесс можно изобразить как процесс перехода от математического платонизма к математическому неоплатонизму. Именно так комментируют Ф. Херш и Р. Дэвис высказывания русского математика И. Шафаревича, который говорит следующее:

Поверхностный взгляд на математику может произвести впечатление, что она является результатом отдельных индивидуальных усилий многих ученых, рассеянных по континентам и разделенных временем. Однако внутренняя логика развития математики напоминает больше работу одного разума, развивающего математику систематически, через использование в качестве средства отдельных индивидуумов. Это напоминает оркестр, исполняющий симфонию, сочиненную кем-то одним.[17]

Такого рода крайности не могут не вызвать обратной реакции, и в этом отношении характерно высказывание создателя нестандартного анализа А. Робинсона:

Не могу представить себе, что я когда-нибудь смогу обрести кредо истинного платониста, который видит распростертый перед ним мир актуальной бесконечности и верит, что он может объять непостижимое.[18]

Некоторого рода компромисс можно найти у французского математика Эмиля Бореля:

Многие люди имеют неясное ощущение, что математика существует где-то там, хотя при некотором размышлении они не могут избежать заключения, что математика есть исключительно творение человека. Точно такие же вопросы можно задать в отношении и многих других концепций, например, концепций государства, моральных ценностей, религии... Мы склонны постулировать существование всех этих вещей, принадлежащих цивилизации или культуре, в том смысле, что мы раз-

---

[15] Там же, 101.

[16] Харди 2009, 94.

[17] Цит. по Hersh 1983, 52.

[18] Hersh 1983, 319.

> деляем их с другими людьми и можем обмениваться мыслями об этих концепциях. Вещь становится объективной (в противоположность «субъективному») как только мы убеждаемся в том, что она существует в умах других в той же самой форме, как и в нашем уме, и что мы можем размышлять о ней и обмениваться мыслями. Поскольку язык математики очень точен, он идеально приспособлен для определения концепций, в отношении которых такой консенсус существует. С моей точки зрения, этого вполне достаточно для объяснения возникновения ощущения в нас чего-то объективного, независимо от его подлинного происхождения.[19]

Но кроме противопоставления двух точек зрения – математика есть открытие истин и объектов и математика есть конструирование или творение истин и объектов, – существует еще одна точка зрения, связанная с вопросом о том, как математика соотносится с эмпирическим опытом. Проблема, которая была в центре теории идей Платона, заключается в совмещении существования мира идеальных объектов и мира несовершенных материальных объектов. В случае математического платонизма это проблема применимости математики к реальному миру. Самый простой взгляд на способы такого совмещения состоит в том, что внечувственная реальность математических объектов является результатом абстракции. Интересное исследование природы абстракций можно обнаружить в работах неологицистов: абстрактные объекты математики тут являются логическими конструкциями, и постулируются с помощью т. н. принципов абстракции.[20] Однако, как известно, радикальный отказ от платонизма свойственен номинализму, согласно которому абстрактные объекты вообще не существуют.

До сих пор на основе номинализма не удалось получить реконструкции значительной части математики, и есть все основания полагать, что уже в самом понятии абстрактного объекта таится резкий разрыв с эмпирическим опытом. В качестве примера рассмотрим то, как утверждение о существовании множества как абстрактного объекта или универсалии вступает в противоречие с эмпирическим опытом. Прежде всего, следует рассмотреть озадачивающую ситуацию существования бесконечного числа множеств, которые соответствуют одному эмпирическому объекту. Так, если имеется один объект, скажем, человек, то можно образовать (при использовании операции образования единичного множества и пустого множества Λ) следующие множества, которые будут содержать один «реальный» элемент:

{человек}, {Λ, человек}, {Λ, {человек}}, {{человек}}, {{человек}, {человек}},...

Можно поставить, конечно, ограничение, согласно которому членами множества могут быть только те сущности, которые сами не являются множествами, то есть, являются «подлинными» индивидами. В этом случае мы не будем иметь для каждого эмпирического объекта неограниченное число множеств,

---

[19] Цит. по Barrow 1992, 259.

[20] См. например, MacBride 2003.

поскольку запрещены множества множеств. Но именно они-то как раз и требуются теорией множеств, и значит, всей математикой.

Другая аномалия множества как абстрактного объекта с номиналистической точки зрения состоит в следующем. Коль скоро множество представляет собой совокупность объектов, мыслимых как целое, множества, состоящие из одних и тех же элементов, должны быть тождественны. Это так называемое мереологическое понимание множества. Пусть имеется несколько эмпирических объектов, т. е. индивидов – *a, b, c, d.* Пусть далее имеется некоторый процесс порождения из этих индивидов множеств, который не должен повлиять на установление тождества множеств. Но согласно теории множеств, множество *{{a, b}, {c, d}}* не тождественно множеству *{a, b, c, d},* которое в свою очередь не тождественно множеству {{a}, *{Ь}, {c}, {d}}* и т.д. Между тем, все эти множества состоят из одних и тех же индивидов, и с эмпирической точки зрения между этими множествами нет отличий. Но это означает, что в понятие множества включено нечто большее, чем просто идея объединения эмпирических объектов, или индивидов, в целое, поскольку получающееся целое обладает весьма отличными от составляющих его объектов свойствами.

Более того, создается впечатление, что процесс порождения множеств важнее, чем то, из чего создается множество. Действительно, для порождения множеств вообще не требуется эмпирических объектов, поскольку основой является пустое множество, а математика допускает порождение множеств из пустого множества. Так, если Λ – пустое множество, то операцией образования множества $\{\ \}$ из пустого множества образуется множество $\{\Lambda\}$ и далее множества $\{\{\Lambda\}\}$, $\{\{\{\Lambda\}\}\}$ и так далее. В данном случае возникает типичная для математики ситуация обобщения операции от одного класса сущностей к другому классу. Пустое множество как абстрактный объект требует особого обоснования, поскольку, согласно Кантору, «множество есть совокупность вполне определенных объектов, мыслимых как целое». Дело в том, что в данном случае нет эмпирических объектов, объединяемых мысленно. Тем не менее, операция конструирования множества обобщена до ситуации, когда идея совокупности эмпирических объектов заменяется идеей совокупности мыслимых объектов. В некотором смысле здесь и совершается радикальный скачок к платонизму; признание законным пустого множества есть первый шаг, поскольку теперь квантификация осуществляется над множествами, а не над его членами. Одно из объяснений этого скачка состоит в идее структуры. М. Стайнер описывает этот процесс следующим образом:

> При рассмотрении материальных тел можно отвлечься от их конкретного пространственного расположения. При этом объекты будут мыслиться в виде некоторого многообразия, и затем будет воспринята структура этого многообразия. Именно так мы познаем стандартную модель теории множеств Цермело–Френкеля, абстрагируясь от точек на бумаге, расположенных определенным образом. Так мы приобретаем интуицию структур множеств в системе Цермело–Френкеля <...> Интуитивное восприятие структуры множеств в системе Цермело–Френкеля может

начинаться с воображения некоторого порядка точек, но оно этим не заканчивается. Раз мы абстрагируемся от геометрических особенностей этого порядка, наше ментальное состояние становится весьма отличным от простого воображения. Оно моделируется на структуре абстрактных объектов, а не на физических объектах или физическом порядке.[21]

Большая часть направлений в современной философии математики так или иначе связана с платонизмом, защищая или опровергая его. С другой стороны, сохраняется общий скепсис относительно подобного рода воскрешения старых философских программ средствами современной логики и математики. Исследователь в области когнитивных наук А. Сломан говорит:

Все, что он (Р. Пенроуз. – *В. Ц.*) говорит, состоит в том, что математически истины и концепции существуют независимо от математиков, и что они открываются, а не изобретаются. Это лишает платонизм всякого содержания <...> Хотя многие люди объявляют платонизм чем-то мистическим, или антинаучным столь же пылко, как Пенроуз защищает платонизм, такие разногласия на самом деле пусты. Нет никакой разницы, существуют ли математические объекты до их открытия или нет. Спор этот, как и всякий спор в философии, зависит от ошибочного предположения, что существует четко определенная концепция (например, «существование математического объекта»), которая может быть использована с целью постановки вопроса, на который можно дать определенный ответ. Мы все знаем, что означает существование единорогов, или вполне понимаем разумное утверждение о существовании простого числа между двумя заданными целыми числами. Но нет смысла спрашивать, существуют ли все целые числа, или существуют ли они независимо от нас, и все дело в том, что понятие существования весьма плохо определено.[22]

Один из способов разрешения проблемы, связанной с платонистским понятием существования, состоит в полной его либерализации, при которой значительное число трудностей обоснования платонизма преодолеваются. В этом отношении определенный интерес представляет т. н. «полнокровный платонизм» Балагера.[23] Онтология платонизма варьируется в зависимости от философских предпосылок контекста. Онтологические вопросы могут для платонизма решаться в противоположном направлении по сравнению с антиреалистской тенденцией, которая состоит в уменьшении числа объектов, которые могут считаться существующими. Действительно, можно прибегнуть к крайности и считать, что существуют все возможные в логическом смысле математические объекты. С этой точки зрения существовать, значит быть свободным от противоречий. Таким образом, математическая реальность представляет собой изобилие сущностей. При изложении этого «полнокровного платонизма» часто упоминается точка зрения Д. Гильберта, согласно которой, если произвольно данные аксиомы не противоречат друг другу в своих след-

[21] Steiner 1975, 134–135.

[22] Цит. по Barrow 1992, 273.

[23] Balaguer 1998.

ствиях, тогда они истинны, и вещи, определяемые аксиомами, существует. Для Гильберта это и было критерием истины и существования.

Логически возможные объекты дают слишком большой простор воображению, и несмотря на приведенное выше кредо Д. Гильберта, он не стал «полнокровным платонистом», потому что для него все-таки некоторые (даже непротиворечивые) объекты не существовали. Наиболее уязвимым пунктом в программе «полнокровного платонизма» является введение в математический дискурс понятия возможного математического объекта. Это означает обращение к модальностям, которые сами по себе представляют значительные трудности для понимания. Однако введение таких сущностей вполне естественно, исходя из обманчивой простоты тезиса: если нечто утверждается о возможном объекте, то он существует.

Вполне естественно, что эта несколько необычная концепция встречается с рядом возражений. Первое возражение исходит со стороны формализма. Согласно полнокровному платонизму, непротиворечивые теории описывают математическую реальность. Однако часто мы встречаем непротиворечивые теории, которые противоречат друг другу. Например, такая ситуация имеет место в случае системы аксиом Цермело–Френкеля плюс континуум-гипотеза и тех же аксиом плюс отрицание континуум-гипотезы. Ответ на это возражение состоит в том, что каждая непротиворечивая теория описывает часть реальности. Второе возражение касается классической эпистемологической полемики относительно того, означает ли непротиворечивость истинность. С точки зрения полнокровного платонизма математическое утверждение истинно, если и только если, оно истинно во всех стандартных моделях данной ветви математики, и оно неистинно, если оно ложно во всех таких моделях. Поскольку понятие стандартной модели в значительной степени определяется нашей интуицией относительно того, что истинно, истинность сама по себе как абстрактная категория теории познания не является препятствием для принятия полнокровного платонизма.

Полнокровный платонизм может противоречить математической практике. Если отвлечься от крайнего формализма, тогда вопрос о том, какая из двух теорий – аксиомы Цермело–Френкеля плюс континуум-гипотеза или те же аксиомы плюс отрицание континуум-гипотезы – является истинной, является вполне осмысленным вопросом. Признание же истинными обеих теорий ставит по сомнение объективность математики, и тем самым, традиционный платонизм. А вот полнокровный платонизм разрешает дилемму. Наша интуиции множества схвачена в различных формальных системах, и вполне возможно, что постановка вопросов, скажем, о континуум-гипотезе требует существенно нового понятия множества, точнее, новых теоретико-множественных аксиом, которые позволили бы устранить кажущуюся парадоксальность существования некатегоричных интерпретаций понятия множества. Об этом говорил Гедель при обсуждении континуум-гипотезы.[24] При такой постановке вопроса континуум-гипотеза является истинной в одних моделях, и ложной – в других. С другой стороны, полнокровный платонизм больше согласуется с математической практикой, потому что он не запрещает рассматривать такие ситуации, которые запрещены с точки зрения традиционного платонизма. В частности, речь идет о неразрешимых утверждениях, которые вполне допустимы в полнокровном платонизме и недопустимы в традиционном. Рассмотрим опять-таки пример с континуум-гипотезой (CH). Важность утверждения о существовании или несуществовании определенного бесконечного множества позволяет считать, что платонист, понимая эту важность, вынужден допустить различного рода математические структуры, в зависимости от того, принимаем ли мы утверждение или отрицание CH. Действительно, если мы принимаем ZFC (систему Цермело–Френкеля с аксиомой выбора), тогда можно говорить о структуре ZFC + CH и о структуре ZFC + $\neg$ CH. Если мы остаемся на позиции формализма, вопрос об истинности самой CH остается неразрешимым. Но полнокровный платонизм не позволяет оставить такой вопрос без ответа, и довольно распространенным ответом является утверждение, что мы имеем одну математику с утверждением CH, а другую математику – с отрицанием CH. Пока CH не разрешима, трудно сказать, какая из этих математических структур будет отвечать «истинному платонизму», потому что все-таки платонизм есть представление о некоторой единой математической реальности. Это предположение реализуемо в понятии намеренной интерпретации формализма, и в этом смысле мы должны признавать именно ту математическую структуру, ради которой был развит предыдущий математический аппарат. Скажем, некоторое теоретико-множественное утверждение истинно, если оно истинно в универсуме множеств, что в свою очередь, во избежание парадоксов, предполагает справедливость итеративной концепции множества. Однако и нестандартные, или ненамеренные интерпретации могут быть достаточно важными, в том смысле, что само понятие намеренной интерпретации дает достаточную свободу для появления ненамеренной интерпретации. Другими словами, понятие намеренной интерпретации может быть недостаточно строгим или определенным, и описание области математических объектов оказывается неполным. Действительно, пусть имеется две математические структуры Γ_1 и Γ_2, отличающиеся в отношении CH, а именно ZFC + CH истинно в Γ_1, а ZFC + $\neg$ CH истинно в Γ_2, а Γ_1 и Γ_2 обе являются намеренными структурами в теории множеств. Такая ситуация не позволяет считать понятие намеренной интерпретации спасением от предположения множественности платонистских реальностей.

В свете всего этого приходится признать, что несколько намеренных интерпретаций могут быть неизоморфными друг другу, и ни одна из них не является худшей или лучшей с точки зрения принятых для намеренной интерпретацией

[24] Gödel 1983.

критериев. Здесь есть полная аналогия с экспликацией концепции натурального числа в теоретико-множественных терминах, на что указал П. Бенацерраф.[25] При этом та же CH может быть истинной в одной интерпретации, и ложной – в другой. Ясно, что здесь мы имеем несколько другую форму платонизма, отличную от традиционной. Балагер называет такой платонизм IBP-платонизмом (Improved Better Platonism), который формулируется следующим образом:

> Математическое утверждение S истинно, если и только если, оно истинно во всех частях математической реальности, которые считаются намеренными в данной области математики, и если S истинно в одной части, и ложно в другой, тогда не имеет значения, истинно это предложение или ложно.[26]

Такой платонизм не приводит к серьезным проблемам, аргументирует Балагер, но он вводит в рассмотрение множественность математических реальностей. Да и сама математическая реальность представляет собой изобилие сущностей. Такое расширительное понимание платонизма в известной мере обесценивает содержание метафизического проекта – ситуацию можно уподобить расширению понятия существования на несуществующие объекты, предпринятое А. Мейнонгом. Недаром, для такой «реальности» закрепилось, по словам Р. Раутли, название «онтологических трущоб».[27] Такое усложнение исходных посылок математического платонизма по сравнению с тем, как его понимал Г. Фреге, в значительной степени меняет пейзаж философии математики.

Литература

Пенроуз, Р. (2003) *Новый ум короля*. Москва.

Рассел, Б. (2007) *Введение в математическую философию*. Новосибирск: Сибирское математическое издательство.

Рорти, Р. (1994) «Историография философии: четыре жанра», Рассел Б. *История западной философии*. Новосибирск. Т. 2.

Харди, Г. (2009) *Апология математика*. Москва.

Balaguer, M. (1998) *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford University Press.

Balaguer, M. (2009) "Fictionalism, Theft, and the Story of Mathematics," *Philosophia Mathematica* (III) 17, 145–146.

Barrow, J. (1992) *Pi in the Sky*. Oxford: Clarendon Press.

Benacerraf, P. (1983) "What Number Could not Be," *Philosophy of Mathematics*, eds. P. Benacerraf & H. Putnam. Cambridge University Press: 272–291.

Bernays, P. (1935) "Sur le platonisme dans les mathématiques," *L'enseignement mathématique* 34, 52–69.

Bernays, P. (1983) "On Platonism in Mathematics," *Philosophy of Mathematics*, eds. P. Benacerraf & H. Putnam. Cambridge University Press.

---

[25] Benacerraf 1983.

[26] Balaguer 2009.

[27] Routley 1966.

Beth, E. (1965) *Mathematical Thought*. Dordrecht, Reidel.

Coffa A. (1991) *The Semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station*. New York: Cambridge University Press.

Curry, R. (1970) *Outlines of Formalist Philosophy of Mathematics*. Amsterdam.

Gödel, K. (1983) "What is Cantor's Continuum Problem?" *Philosophy of Mathematics*, eds. P. Benacerraf & H. Putnam. Cambridge University Press: 470–485.

Hersh, R., Davis, Ph. (1983) *The Mathematical Experience*. Penguin.

Kreisel, G. (1972) "Informal Rigour and Completeness Proofs," *Problems in the Philosophy of Mathematics*, ed. I. Lakatos. North Holland: 138–157.

MacBride, F. (2003) "Speaking with Shadows. A Study of Neo-Logicism," *British Journal for the Philosophy of Science* 54, 103–163.

Putnam, H. (1975) "Philosophy of Mathematics: Matter and Method," in his: *Philosophical Papers*. Cambridge University Press. Vol. 1: 323–357.

Quine, W. V. O. (1981) "Success and Limits of Mathematization," in his: *Theories and Things*. Harvard University Press: 148–155.

Routley, R. (1966) "Some Things Do Not Exist," Notre Dame Journal of Formal Logic 7, 251–276.

Steiner, M. (1975) *Mathematical Knowledge*. Cornell University Press.