УДК 510.5

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ m-СТЕПЕНИ

С. Ю. ПОДЗОРОВ

В работе даётся описание типов изоморфизма главных идеалов верхней полурешётки m-степеней, порождённых арифметическими множествами. Результат А. Лахлана 1972 года для вычислимо перечислимых m-степеней распространяется на произвольные уровни арифметической иерархии. В качестве следствий этого результата устанавливается характеризация типов локального изоморфизма полурешёток Роджерса арифметических нумераций конечных семейств и доказывается, что нетривиальные полурешётки Роджерса нумераций, вычислимых на разных уровнях арифметической иерархии, не могут быть изоморфны, если разрыв между уровнями больше 1.

Ключевые слова и фразы: арифметическая иерархия, m-сводимость, дистрибутивная верхняя полурешётка, лахлановская полурешётка, нумерация, полурешётка Роджерса.

В 1972 году А. Лахлан [4] описал полурешётки, изоморфные главным идеалам верхней полурешётки вычислимо перечислимых m-степеней. Позднее в работе [13] было показано, что полурешётка удовлетворяет описанию Лахлана тогда и только тогда, когда она является дистрибутивной верхней полурешёткой с наибольшим и наименьшим элементами, имеющей Σ^0_3-представление. Таким образом, по результатам упомянутых двух работ справедливо следующее утверждение: верхняя полурешётка изоморфна главному идеалу полурешётки вычислимо перечислимых m-степеней тогда и только тогда, когда она является ограниченной дистрибутивной полурешёткой, допускающей Σ^0_3-представление.

Основным результатом данной работы является обобщение этого утверждения, позволяющее распространить его на арифметические m-степени. Доказывается, что для любого натурального n верхняя полурешётка изоморфна главному идеалу полурешётки m-степеней Σ^0_{n+1}-множеств тогда и только тогда, когда она является ограниченной дистрибутивной полурешёткой, допускающей Σ^0_{n+3}-представление. Более того, ограниченными дистрибутивными полурешётками с Σ^0_{n+3}-представлениями будут также все главные идеалы верхней полурешётки m-степеней, порождённые Δ^0_{n+2}-множествами, и для каждой ограниченной дистрибутивной полурешётки с

Работа поддержана грантами РФФИ 08-01-00336 и НШ 4413.2006.1

Σ^0_{n+3}-представлением найдётся коиммунное либо вычислимое Σ^0_{n+1}-множество, порождающее изоморфный этой полурешётке главный идеал верхней полурешётки m-степеней. Последнее усиливает основной результат работы [12] и вместе с результатами работы [11] позволяет расширить класс полурешёток, являющихся главными идеалами и сегментами в полурешётках Роджерса арифметических нумераций. Что, в частности, влечёт усиление результатов о различии типов изоморфизма полурешёток Роджерса арифметических нумераций разных уровней арифметической иерархии, представленных в работах [3, 5].

Переходим непосредственно к изложению.

§1 Главные идеалы полурешётки арифметических m-степеней

Основные понятия, относящиеся к теории вычислимости, можно найти в [15], к теории решёток в [7], к теории нумераций в [9]. Мы предполагаем, что читателю они известны. Во введении к книге [9] также содержатся полезные сведения, относящиеся к дистрибутивным полурешёткам.

Для обозначения значения нумерации ν на натуральном числе x будем, следуя традиции, писать νx вместо $\nu(x)$, опуская скобки. Для частичной функции f через δf обозначим её область определения, а через ρf — область значений.

Для предупорядоченного множества $\mathcal{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ ассоциированное с ним частично упорядоченное множество будем обозначать через $\widetilde{\mathcal{A}} = \langle \widetilde{A}, \leqslant \rangle$ (сохраняя одно и то же обозначение для предпорядка и ассоциированного с ним порядка), а элемент $\widetilde{A}$, содержащий $x \in A$ (класс эквивалентности) — через $[x]_{\mathcal{A}}$ (либо просто через $[x]$, если ясно, о каком $\mathcal{A}$ идёт речь). Предупорядоченное множество $\mathcal{A}$ будем называть *предрешёткой*, (*верхней предполурешёткой*, *нижней предполурешёткой*), если $\widetilde{\mathcal{A}}$ является решёткой (верхней полурешёткой, нижней полурешёткой). Предрешётку (верхнюю предполурёшетку) будем называть *дистрибутивной*, если ассоциированная с ней решётка (верхняя полурешётка) дистрибутивна. В дальнейшем верхние полурешётки (верхние предполурешётки) мы называем просто полурешётками (предполурешётками), поскольку нижние полурешётки мы рассматривать не будем. Для предрешётки (предполурешётки) $\mathcal{A}$ запись $\mathcal{A} = \langle A, \leqslant; u, v \rangle$ ($\mathcal{A} = \langle A, \leqslant; u \rangle$) будет означать, что u и v — бинарные операции на $\mathcal{A}$, представляющие на $\widetilde{\mathcal{A}}$ операции взятия точной верхней и точной нижней граней соответственно (то есть для любых $x, y \in A$ $[u(x,y)] = \sup\{[x],[y]\}$ и $[v(x,y)] = \inf\{[x],[y]\}$).

Если в полурешётке $\mathcal{L}$ есть наименьший или наибольший элементы, то обозначаем их $\perp_{\mathcal{L}}$ и $\top_{\mathcal{L}}$ соответственно.

Пусть $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant^{\mathcal{L}}; \vee^{\mathcal{L}} \rangle$ — полурешётка с носителем L, ν — нумерация множества L и $n \in \mathbb{N}$. Скажем, что ν является Σ^0_n*-представлением* полурешётки $\mathcal{L}$, если выполнены следующие 2 свойства:

1. бинарное отношение "$\nu x \leqslant^{\mathcal{L}} \nu y$" на $\mathbb{N}$ принадлежит классу Σ^0_n арифметической иерархии;

2. существует вычислимая функция $u : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, такая что $\nu u(x,y) = \nu x \vee^{\mathcal{L}} \nu y$ для любых $x, y \in \mathbb{N}$.

Скажем, что ν является *n-лахлановским представлением* полурешётки $\mathcal{L}$, если существует последовательность $\{\mathcal{D}_i = \langle D_i, \leqslant_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ конечных дистрибутивных предрешёток, для которой выполнены следующие 6 свойств:

1. $D_0 \subseteq D_1 \subseteq \ldots$ — сильно вычислимая последовательность конечных подмножеств натурального ряда и $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i = \mathbb{N}$;

2. для всех i $0, 1 \in D_i$ и для всех $x \in D_i$ $0 \leqslant_i x \leqslant_i 1$;

3. для $x, y \in D_i$ из $x \leqslant_i y$ следует $x \leqslant_{i+1} y$, определённые естественным образом отображения $\widetilde{\mathcal{D}}_i$ в $\widetilde{\mathcal{D}}_{i+1}$ сохраняют точные верхние грани;

4. тернарное отношение "$x \leqslant_i y$" принадлежит классу Π^0_{n+2} арифметической иерархии;

5. существуют последовательности функций $\{u_i : D_i^2 \to D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{v_i : D_i^2 \to D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, вычислимые равномерно по i, такие что $\mathcal{D}_i = \langle D_i, \leqslant_i; u_i, v_i\rangle$;

6. для всех $x, y \in \mathbb{N}$ справедливо $\nu x \leqslant^{\mathcal{L}} \nu y \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})(x, y \in D_i \,\&\, x \leqslant_i y)$.

Из определений сразу следует, что каждое n-лахлановское представление является Σ^0_{n+3}-представлением. Легко показать, что если полурешётка $\mathcal{L}$ имеет n-лахлановское представление для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то она содержит наименьший элемент $\perp_{\mathcal{L}} = \nu 0$, наибольший элемент $\top_{\mathcal{L}} = \nu 1$ и является дистрибутивной (так как она изоморфна прямому пределу $\varinjlim_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{D}}_i$).

В работе [13] доказано следующее утверждение.

Если полурешётка $\mathcal{L}$ дистрибутивна, содержит наибольший и наибольший элементы и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ обладает Σ^0_{n+3}-представлением ν, то существует n-лахлановское представление μ полурешётки $\mathcal{L}$, такое что $\nu \leqslant \mu$.

При $n = 0$ это утверждение совпадает с утверждением теоремы 1 из указанной работы. Далее в замечании 1 (из работы [13]) отмечено, что результат остаётся справедливым для произвольного $n \in \mathbb{N}$, причём в доказательстве необходимо сделать лишь одно незначительное изменение.

При рассмотрении m-степеней мы игнорируем m-степени множеств $\varnothing$, $\mathbb{N}$ и, таким образом, считаем, что в полурешётке $\mathcal{L}^m = \langle L^m, \leqslant^{\mathcal{L}^m}; \vee^{\mathcal{L}^m}\rangle$ всех m-степеней содержится наименьший элемент $\perp_{\mathcal{L}^m}$, состоящий из вычислимых множеств. Для произвольного $U \subseteq \mathbb{N}$, не равного $\varnothing$ и $\mathbb{N}$, через $\deg_m(U)$ обзначим m-степень множества U, а через $\mathcal{L}^m_U = \langle L^m_U, \leqslant^{\mathcal{L}^m_U}; \vee^{\mathcal{L}^m_U}\rangle$ — главный идеал в $\mathcal{L}^m$, порождённый элементом $\deg_m(U)$.

Если $X \subseteq \mathbb{N}$ и ε — отношение эквивалентности на $\mathbb{N}$, то пусть $[X]_\varepsilon$ обозначает множество $\{y \in \mathbb{N} : (\exists x \in X)(\langle x, y\rangle \in \varepsilon)\}$. Если X и ε вычислимо перечислимы, то множество $[X]_\varepsilon$ также вычислимо перечислимо. Скажем, что эквивалентность ε *согласована с* X, если $X = [X]_\varepsilon$.

Введём, следуя [4], Ψ-оператор. Для произвольного $U \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимо перечислимого $X \subseteq \mathbb{N}$ пусть

1. если $X \cap U \neq \varnothing$ и $X \nsubseteq U$, то $\Psi(U \mid X) = \deg_m(f^{-1}(U))$, где f — всюду определённая вычислимая функция, такая что $\rho f = X$ (ясно, что $\Psi(U \mid X)$ не зависит от выбора f);

2. если $X \cap U = \varnothing$ или $X \subseteq U$, то $\Psi(U \mid X) = \bot_{\mathcal{L}^m}$.

Отметим без доказательства следующие свойства Ψ-оператора:

1. для $a \in L^m$ справедливо $a \leqslant^{\mathcal{L}^m} \deg_m(U) \Leftrightarrow$ существует вычислимо перечислимое множество X, такое что $a = \Psi(U \mid X)$;

2. $\Psi(U \mid X_1 \cup X_2) = \Psi(U \mid X_1) \vee^{\mathcal{L}^m} \Psi(U \mid X_2)$;

3. если $U_1 =^* U_2$ и $X_1 =^* X_2$, то $\Psi(U_1 \mid X_1) = \Psi(U_2 \mid X_2)$ (здесь и далее $=^*$ означает равенство по модулю конечных множеств);

4. если вычислимо перечислимая эквивалентность ε согласована с U, то $\Psi(U \mid X) = \Psi(U \mid [X]_\varepsilon)$;

5. если $X_2 \cap U \neq \varnothing$ и $X_2 \nsubseteq U$, то $\Psi(U \mid X_1) \leqslant^{\mathcal{L}^m} \Psi(U \mid X_2)$ тогда и только тогда, когда существует частичная вычислимая функция θ, такая что $X_1 \subseteq \delta\theta$, $\theta(X_1) \subseteq X_2$ и $(\forall x \in X_1)(x \in U \leftrightarrow \theta(x) \in U)$.

Пусть $\mathcal{E}$ обозначает решётку всех вычислимо перечислимых множеств, а $\mathcal{E}^*$ — фактор-решётку решётки $\mathcal{E}$ по модулю конечных множеств. Из свойств 1 – 3 Ψ-оператора легко следует, что при каждом фиксированном $U \neq \varnothing, \mathbb{N}$ отображение $\lambda X \Psi(U \mid X)$ является эпиморфизмом решётки $\mathcal{E}^*$ (рассматриваемой как верхняя полурешётка) на полурешётку $\mathcal{L}^m_U$.

Пусть $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — универсальная вычислимая последовательность всех одноместных частичных вычислимых функций. Пусть для $i \in \mathbb{N}$ W_i обозначает вычислимо перечислимое множество с клиниевским номером i (то есть $W_i = \delta\theta_i$), а $\{W_i^t\}_{t,i \in \mathbb{N}}$ — двойная сильно вычислимая последовательность конечных множеств, такая что $W_i^0 \subseteq W_i^1 \subseteq \ldots$ и $W_i = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} W_i^t$ при всех $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 1 *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $U \subseteq \mathbb{N}$ — произвольное Δ^0_{n+2}-множество, не равное $\varnothing$ и $\mathbb{N}$. Тогда $\mathcal{L}^m_U$ является дистрибутивной верхней полурешёткой с наибольшим и наименьшим элементами, имеющей Σ^0_{n+3}-представление.*

Доказательство. Наличие наименьшего элемента $\bot_{\mathcal{L}^m_U} = \bot_{\mathcal{L}^m}$ и наибольшего элемента $\top_{\mathcal{L}^m_U} = \deg_m(U)$ в полурешётке $\mathcal{L}^m_U$ очевидно. Дистрибутивность $\mathcal{L}^m_U$ напрямую следует из дистрибутивности $\mathcal{L}^m$, которая, в свою очередь, является хорошо известным в теории вычислимости фактом.

Пусть $\nu x = \Psi(U \mid W_x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$. Тогда, согласно свойству 1 Ψ-оператора, ν является нумерацией множества L^m_U. Пусть $m \in U$ и $k \in \mathbb{N} \setminus U$.

По свойству 3 $\nu y = \Psi(U \mid W_y \cup \{m,k\})$ для всех $y \in \mathbb{N}$. По свойству 5 имеем

$$\nu x \leqslant^{\mathcal{L}_U^m} \nu y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i \in \mathbb{N})(W_x \subseteq \delta\theta_i \,\&\, \theta_i(W_x) \subseteq W_y \cup \{m,k\} \,\& \\ (\forall z \in W_x)(x \in U \leftrightarrow \theta_i(x) \in U)).$$

Отсюда по алгоритму Тарского-Куратовского получаем, что отношение "$\nu x \leqslant^{\mathcal{L}_U^m} \nu y$" принадлежит классу Σ^0_{n+3}. Наконец, существует вычислимая функция u, такая что $W_{u(x,y)} = W_x \cup W_y$ для всех $x, y \in \mathbb{N}$ и для неё, в силу свойства 2, при любых $x, y \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\nu u(x,y) = \nu x \vee^{\mathcal{L}_U^m} \nu y$. Значит, ν является Σ^0_{n+3}-представлением полурешётки $\mathcal{L}_U^m$. $\square$

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 2 *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{L}$ — дистрибутивная верхняя полурешётка с наименьшим и наибольшим элементами, имеющая Σ^0_{n+3}-представление. Тогда существует коиммунное либо вычислимое Σ^0_{n+1}-множество U, такое что $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}_U^m$.*

Доказательство этой теоремы будет дано в следующем параграфе.

Из теорем 1 и 2 немедленно вытекает характеризация типов изоморфизма главных идеалов полурешётки m-степеней, порождённых арифметическими множествами.

Следствие 1 *Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и верхней полурешётки $\mathcal{L}$ следующие условия эквивалентны:*

1. *$\mathcal{L}$ является дистрибутивной верхней полурешёткой с наименьшим и наибольшим элементами, имеющей Σ^0_{n+3}-представление;*
2. *$\mathcal{L}$ изоморфна главному идеалу верхней полурешётки m-степеней, порождённому коиммунным либо вычислимым Σ^0_{n+1}-множеством;*
3. *$\mathcal{L}$ изоморфна главному идеалу верхней полурешётки m-степеней, порождённому иммунным либо вычислимым Π^0_{n+1}-множеством;*
4. *$\mathcal{L}$ изоморфна главному идеалу верхней полурешётки m-степеней, порождённому Δ^0_{n+2}-множеством.*

Доказательство. Импликации (4) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) составляют содержание теорем 1 и 2. Импликация (2) $\Rightarrow$ (4) следует из включения $\Sigma^0_{n+1} \subseteq \Delta^0_{n+2}$. Наконец, эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (3) следует из того, что соответствие, сопоставляющее каждому подмножеству $\mathbb{N}$ его дополнение, задаёт автоморфизм полурешётки $\mathcal{L}^m$. $\square$

§2 Доказательство теоремы 2

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и ν' — Σ^0_{n+3}-представление дистрибутивной полурешётки $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant^{\mathcal{L}}; \vee^{\mathcal{L}} \rangle$ с наименьшим и наибольшим элементами. По упомянутому в предыдущем параграфе утверждению, доказанному в работе [13], существует нумерация $\nu \geqslant \nu'$ множества L, являющаяся n-лахлановским представлением полурешётки $\mathcal{L}$.

Теорема 1 из работы [12] эквивалентна следующему утверждению:

Каждая полурешётка, имеющая 0-лахлановское представление, изоморфна полурешётке $\mathcal{L}_U^m$ для некоторого вычислимого или гиперпростого множества U.

Таким образом, для $n = 0$ теорему 2 можно считать доказанной. В дальнейшем будем предполагать, что $n > 0$.

Зафиксируем последовательность $\{\mathcal{D}_i = \langle D_i, \leqslant_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ конечных дистрибутивных предрешёток, для которой выполнены 6 свойств из определения n-лахлановского представления.

Мы будем использовать технику работы с башнями, изобретённую Лахланом в [4] и впоследствии усовершенствованную другими авторами в работах [8, 14]. Однако каркасы и башни будут строится не сразу для последовательности предполурешёток $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, как это делалось в указанных работах, а для аппроксимирующих эту последовательность спектров, как в работе Ершова [10]. Другими словами, мы собираемся "смешать" технику Лахлана с техникой Ершова, заимствуя элементы из обоих конструкций (Ершов работал не с башнями, а с эквивалентными им представлениями). Дадим необходимые определения.

Спектром будем называть конечную последовательность бинарных отношений $\mathfrak{S} = \langle \leqslant_0^{\mathfrak{S}}, \dots, \leqslant_k^{\mathfrak{S}}\rangle$, такую что

1. для любого $i \leqslant k$ отношение $\leqslant_i^{\mathfrak{S}}$ — предпорядок на D_i, для которого $\mathcal{D}_i^{\mathfrak{S}} = \langle D_i, \leqslant_i^{\mathfrak{S}}\rangle$ — конечная дистрибутивная предрешётка с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1;
2. для произвольных $i < k$ и $x, y \in D_i$ из $x \leqslant_i y$ следует $x \leqslant_{i+1} y$, а определённое естественным образом отображение $\widetilde{\mathcal{D}}_i^{\mathfrak{S}}$ в $\widetilde{\mathcal{D}}_{i+1}^{\mathfrak{S}}$ сохраняет точные верхние грани.

Число k в этом определении мы называем *длиной* спектра $\mathfrak{S}$. Длина спектра $\mathfrak{S}$ обозначается $\mathrm{lh}(\mathfrak{S})$. Будем говорить, что спектр $\mathfrak{S}$ является *началом* спектра $\mathfrak{S}'$ и писать $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}'$, если $\mathrm{lh}(\mathfrak{S}) \leqslant \mathrm{lh}(\mathfrak{S}')$ и $\leqslant_i^{\mathfrak{S}}$ совпадает с $\leqslant_i^{\mathfrak{S}'}$ для любого $i \leqslant \mathrm{lh}(\mathfrak{S})$. Если $\mathfrak{S}$ — спектр и $m \leqslant \mathrm{lh}(\mathfrak{S})$, то единственный спектр $\mathfrak{S}'$ длины m, для которого $\mathfrak{S}' \preccurlyeq \mathfrak{S}$, обозначим $\mathfrak{S} \upharpoonright m$.

Мы называем спектр $\mathfrak{S}$ *хорошим*, если для каждого $i \leqslant k$ отношение $\leqslant_i^{\mathfrak{S}}$ совпадает с отношением $\leqslant_i$. Для каждого натурального k существует ровно один хороший спектр длины k, который мы обозначаем $\mathfrak{S}^k$.

Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольный спектр длины k и $A \subseteq D_i$ для $i \leqslant k$. Скажем, что A является *атомом спектра* $\mathfrak{S}$ *уровня* i, если в решётке $\widetilde{\mathcal{D}}_i^{\mathfrak{S}}$ выполняется следующее соотношение: $\inf\{[x] : x \in A\} \nleqslant_i^{\mathfrak{S}} \sup\{[x] : x \notin A\}$. Другими словами, атомы уровня i — это главные верхние порядковые конусы в $\mathcal{D}_i^{\mathfrak{S}}$, порождённые элементами, которые отличны от $[0]$ и не разложимы в объединение двух строго меньших элементов.

Отметим следующие два свойства атомов (здесь, как и ранее, $\mathfrak{S}$ — произвольный спектр длины k, доказательства свойств см. в [4, 8, 14]):

1. при $i \leqslant k$ решётка $\widetilde{\mathcal{D}}_i^{\mathfrak{S}}$ изоморфна подрешётке в решётке всех подмножеств множества атомов спектра $\mathfrak{S}$ уровня i; изоморфизм задаётся правилом $[x]_{\mathcal{D}_i^{\mathfrak{S}}} \mapsto \{A$ — атом спектра $\mathfrak{S}$ уровня $i : x \in A\}$;

2. для произвольных $i < k$ и атома A спектра $\mathfrak{S}$ уровня $i+1$ существует единственное множество $\{A_1, \ldots, A_m\}$ попарно несравнимых по включению атомов спектра $\mathfrak{S}$ уровня i, такое что $A \cap D_i = A_1 \cup \ldots \cup A_m$.

Для $k \in \mathbb{N}$ под *деревом высоты* k мы понимаем произвольное конечное дерево, в котором каждая максимальная ветвь имеет длину $k+1$ (и которое мы считаем растущим "вниз"). Другими словами, *деревом высоты* k называется конечное частично упорядоченное множество $\mathcal{M} = \langle M, \leqslant_{\mathcal{M}}\rangle$ с наибольшим элементом, в котором для каждого $a \in M$ множество $\{x \in M : a \leqslant_{\mathcal{M}} x\}$ линейно упорядочено и каждое максимальное по включению линейно упорядоченное подмножество состоит из $(k+1)$-го элемента. Наибольший элемент дерева $\mathcal{M}$ мы называем *корнем* этого дерева и обозначаем $r_{\mathcal{M}}$. Для $a \in M$ под *уровнем* элемента a понимается длина максимальной цепи, составленной из элементов, меньших, чем a. Уровень элемента a обозначается $h_{\mathcal{M}}(a)$. Легко заметить, что высота дерева всегда совпадает с уровнем его корня и, более того, если $\mathcal{M}$ — дерево высоты k, то для произвольного $a \in M$ справедливо равенство $h_{\mathcal{M}}(a) = k + 1 - |\{x \in M : a \leqslant_{\mathcal{M}} x\}|$.

Каркасом высоты k мы называем произвольную тройку $\mathcal{F} = \langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c\rangle$ такую, что

1. $\mathfrak{S}$ — спектр длины k;

2. $\mathcal{M} = \langle M, \leqslant_{\mathcal{M}}\rangle$ — дерево высоты k;

3. c — отображение из M в $\mathcal{P}(D_k)$, такое что для любого $a \in M$ множество $c(a)$ является атомом спектра $\mathfrak{S}$ уровня $h_{\mathcal{M}}(a)$;

4. если для элемента $a \in M$ ненулевого уровня $\mathrm{Sc}(a)$ обозначает множество последователей элемента a (то есть множество всех элементов уровня $h_{\mathcal{M}}(a)-1$, меньших a), то $c(a) \cap D_{h_{\mathcal{M}}(a)-1} = \bigcup\{c(b) : b \in \mathrm{Sc}(a)\}$.

Будем говорить, что каркасы $\langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c\rangle$ и $\langle \mathfrak{S}', \mathcal{M}', c'\rangle$ *изоморфны*, если $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ и существует изоморфизм f дерева $\mathcal{M}$ на дерево $\mathcal{M}'$, такой что $c = c' \circ f$. Далее мы отождествляем изоморфные каркасы.

Если $\mathcal{F} = \langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c\rangle$ — каркас, то $\mathfrak{S}$ мы называем *спектром каркаса* $\mathcal{F}$, а множество $c(r_{\mathcal{M}})$ — *атомом каркаса* $\mathcal{F}$. Из второго свойства атомов сразу следует, что если $\mathfrak{S}$ — спектр длины k и A — атом спектра $\mathfrak{S}$ уровня k, то существует единственный (с точностью до изоморфизма, что в дальнейшем не будет оговариваться) каркас высоты k с этими спектром и атомом.

Пусть $\mathcal{F}_1 = \langle \mathfrak{S}_1, \mathcal{M}_1, c_1\rangle$ и $\mathcal{F}_2 = \langle \mathfrak{S}_2, \mathcal{M}_2, c_2\rangle$ — каркасы, $a \in M_1$, $b \in M_2$, $k = h_{\mathcal{M}_1}(a) = h_{\mathcal{M}_2}(b)$ и $\mathfrak{S}_1 \restriction k = \mathfrak{S}_2 \restriction k$. Используя второе свойство атомов и индукцию по k легко показать, что следующие утверждения равносильны:

1. $c_1(a) \subseteq c_2(b)$;

2. существует изоморфное вложение f частично упорядоченного множества $\{x \in M_1 : x \leqslant_{\mathcal{M}_1} a\}$ в частично упорядоченное множество $\{x \in M_2 : x \leqslant_{\mathcal{M}_2} b\}$, такое что $c_1(x) \subseteq c_2(f(x))$ для любого $x \leqslant_{\mathcal{M}_1} a$.

Так как отображение f, о котором говорится во втором пункте, является изоморфным вложением, то оно сохраняет уровни элементов и, в частности, $f(a) = b$. Множество всех таких f обозначим $\Phi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, a, b)$.

Под *башней высоты* k будем понимать четвёрку $\mathcal{T} = \langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c, \varphi \rangle$, для которой

1. $\langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c \rangle$ — каркас высоты k;
2. φ — отображение, сопоставляющее элементам M непустые конечные подмножества натурального ряда;
3. если a и $\mathrm{Sc}(a)$ обозначают то же самое, что в четвёртом пункте определения каркаса, то $\varphi(a) = \bigcup\{\varphi(b) : b \in \mathrm{Sc}(a)\}$ и $\varphi(b_1) \cap \varphi(b_2) = \varnothing$ для любых различных $b_1, b_2 \in \mathrm{Sc}(a)$.

Для башни $\mathcal{T} = \langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c, \varphi \rangle$ каркас $\langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c \rangle$ будем называть *каркасом* этой башни, а множество $\varphi(r_{\mathcal{M}})$ — её *основанием*, которое мы обозначаем $\mathrm{base}(\mathcal{T})$. Ясно, что имея произвольный каркас и любое достаточно большое конечное подмножество $\mathbb{N}$, можно построить башню на этом каркасе, взяв исходное множество в качестве основания.

Предположим, что $\mathcal{T}_1 = \langle \mathfrak{S}_1, \mathcal{M}_1, c_1, \varphi_1 \rangle$ и $\mathcal{T}_2 = \langle \mathfrak{S}_2, \mathcal{M}_2, c_2, \varphi_2 \rangle$ — башни с каркасами $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно, $a \in M_1$ и $b \in M_2$ — элементы одинакового уровня k, $\mathfrak{S}_1 \upharpoonright k = \mathfrak{S}_2 \upharpoonright k$, $c_1(a) \subseteq c_2(b)$ и $f \in \Phi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, a, b)$. Определим отображение φ следующим образом: для каждого $y \in M_2$ пусть $\varphi(y) = \varphi_2(y) \cup \bigcup\{\varphi_1(x) : x \leqslant_{\mathcal{M}_1} a,\ f(x) \leqslant_{\mathcal{M}_2} y\}$. Легко проверить, что $\mathcal{T} = \langle \mathfrak{S}_2, \mathcal{M}_2, c_2, \varphi \rangle$ — башня, каркас которой совпадает с каркасом башни $\mathcal{T}_2$, основание равно основанию башни $\mathcal{T}_2$ в объединении с $\varphi_1(a)$ и

1. для любого $x \in M_1$ уровня $\leqslant k$ либо $x \nleqslant_{\mathcal{M}_1} a$ и $\varphi_1(x) \cap \mathrm{base}(\mathcal{T}) = \varnothing$, либо $x \leqslant_{\mathcal{M}_1} a$ и $\varphi_1(x) \subseteq \varphi(f(x))$;
2. для любого $y \in M_2$ выполнено $\varphi_2(y) \subseteq \varphi(y)$.

Мы будем говорить, что башня $\mathcal{T}$ получается *модификацией* башни $\mathcal{T}_2$ при помощи башни $\mathcal{T}_1$ и отображения f. Число k называется *уровнем модификации*. В дальнейшем при пошаговых построениях если башня модифицируется на каком-то шаге, то мы, допуская некоторую некорректность в терминологии, часто будем говорить о том, что было до и после модификации, как об одной и той же башне. Это не приведёт нас к недоразумениям.

Опишем процесс построения башен. Перед каждым шагом конструкции будет построено конечное число башен, основания которых являются подмножествами некоторого начального отрезка натурального ряда. Этот отрезок состоит из чисел, успевших побывать в основаниях башен, построенных перед этим шагом, и чисел $0, 1$. Числа, принадлежащие этому отрезку, мы называем *использованными*, а остальные числа — *неиспользованными*.

Каждый раз, когда будет строится новая башня, её основанием будет служить достаточно большой начальный отрезок неиспользованных натуральных чисел. Числа 0 и 1 считаются использованным до начала конструкции, то есть перед построением самой первой башни. По ходу конструкции кроме построения новых башен мы будем также преобразовывать и разрушать уже построенные башни.

Напомним, что мы рассматриваем каркасы с точностью до изоморфизма. В частности, для каждого натурального k существует лишь конечное число различных каркасов высоты k. Для каждого каркаса $\mathcal{F}$ пусть $\mathcal{T}_1^{\mathcal{F},t}, \ldots, \mathcal{T}_{s(\mathcal{F},t)}^{\mathcal{F},t}$ — все башни с каркасом $\mathcal{F}$, существующие перед шагом t и перечисленные в порядке их постройки. Будем считать, что множество всех пар вида $\langle \mathcal{F}, m \rangle$, где $\mathcal{F}$ — каркас, а m — натуральное число, эффективно упорядочено по типу ω (первый бесконечный кардинал). Можно считать, что если $m_1 < m_2$, то $\langle \mathcal{F}, m_1 \rangle < \langle \mathcal{F}, m_2 \rangle$ для всех каркасов $\mathcal{F}$. Пусть l — вычислимая функция большого размаха, то есть вычислимая сюрьекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, у которой каждое натуральное число имеет бесконечно много прообразов. Дадим описание шага t конструкции.

Шаг t**.** Этот шаг состоит из двух этапов.

Этап I. Для $i = l(t)$ проверяем, существуют ли башни $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{m_1}^{\mathcal{F},t} = \langle \mathfrak{S}_1, \mathcal{M}_1, c_1, \varphi_1 \rangle$ и $\mathcal{S} = \mathcal{T}_{m_2}^{\mathcal{G},t} = \langle \mathfrak{S}_2, \mathcal{M}_2, c_2, \varphi_2 \rangle$ с каркасами $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ соответственно и элементы $a \in M_1$, $b \in M_2$, такие что

1. высоты обоих башен не меньше чем i;
2. $\mathfrak{S}_1 \upharpoonright i = \mathfrak{S}_2 \upharpoonright i$;
3. $h_{\mathcal{M}_1}(a) = h_{\mathcal{M}_2}(b) = i$;
4. $c_1(a) \subseteq c_2(b)$;
5. башня $\mathcal{S}$ была построена раньше, чем башня $\mathcal{T}$ и $\langle \mathcal{G}, m_2 \rangle < \langle \mathcal{F}, m_1 \rangle$;
6. $\varphi_2(b) \cap W_i^t = \varnothing$ и $\varphi_1(a) \cap W_i^t \neq \varnothing$.

Если башен и элементов с нужными свойствами не найдётся, то сразу переходим к следующему этапу. В противном случае выберем $\mathcal{S}$ наиболее ранней постройки, для этой $\mathcal{S}$ выберем (некоторым эффективным образом) башню $\mathcal{T}$, элементы a, b и функцию $f \in \Phi(\mathcal{F}, \mathcal{G}, a, b)$. Модифицируем башню $\mathcal{S}$ при помощи $\mathcal{T}$ и f, разрушаем башню $\mathcal{T}$ и переходим к следующему этапу.

Этап II. Ищем каркас $\mathcal{F}$ и $m > 0$ с наименьшим возможным значением $\langle \mathcal{F}, m \rangle$, такие что число существующих к настоящему моменту башен, построенных на каркасе $\mathcal{F}$, меньше чем m и строим новую башню на каркасе $\mathcal{F}$, взяв в качестве основания достаточно большой начальный отрезок неиспользованных натуральных чисел. Переходим к следующему шагу.

Описание конструкции закончено. Ясно, что она эффективна. Исследуем её свойства.

Каждая построенная башня либо через некоторое время разрушается, либо не разрушается никогда, а может лишь преобразовываться на последующих шагах. В последнем случае мы называем башню *постоянной*. Каждая постоянная башня может быть преобразована лишь конечное число раз. Действительно, для башни $\mathcal{T} = \langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c, \varphi \rangle$ количество элементов a множества M, для которых $\varphi(a) \cap W^t_{h_{\mathcal{M}}(a)} \neq \varnothing$, не уменьшается с ростом t и возрастает каждый раз, когда башня подвергается преобразованию. Скажем, что постоянная башня является *финальной* на шаге t, если она существует и не подвергается преобразованиям на шагах $\geqslant t$.

Лемма 1 *Для каждого каркаса $\mathcal{F}$ справедливо следующее утверждение: $\lim_{t\to\infty} s(\mathcal{F}, t) = \infty$ и для любого $m > 0$ $\mathcal{T}^{\mathcal{F},t}_m$ является одной и той же финальной башней почти на всех шагах t.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых каркаса $\mathcal{F}$ и $m > 0$ башни $\mathcal{T}^{\mathcal{F},t}_m$ существуют и совпадают почти на всех шагах t.

Допустим, что это не верно. Пусть $\langle \mathcal{F}, m \rangle$ — наименьшая пара, для которой это не так. Пусть t_0 — настолько большой шаг, что для всех $\langle \mathcal{F}', m' \rangle < \langle \mathcal{F}, m \rangle$, таких что $m' > 0$, башни $\mathcal{T}^{\mathcal{F}',t}_{m'}$ существуют, совпадают и являются финальными на всех шагах $t \geqslant t_0$. Если перед некоторым шагом $t \geqslant t_0$ башня $\mathcal{T}^{\mathcal{F},t}_m$ не определена, то $s(\mathcal{F}, t) = m - 1$ и, как следует из описания этапов I и II, ни одна из башен с каркасом $\mathcal{F}$ не будет разрушаться и башня с каркасом $\mathcal{F}$ будет построена на шаге t, так что значение $\mathcal{T}^{\mathcal{F},t}_m$ определено при всех $t > t_0$. В силу выбора пары $\langle \mathcal{F}, m \rangle$, шага t_0 и описания этапа I башня $\mathcal{T}^{\mathcal{F},t_0+1}_m$ не разрушается и, значит, после конечного числа преобразований становится финальной. $\Box$

Для каждых каркаса $\mathcal{F}$ и $m \in \mathbb{N}$ обозначим башню $\mathcal{T}^{\mathcal{F},t}_m$, одну и ту же для всех достаточно больших t (в её финальном варианте), через $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m$. Для каждого $x > 1$ справедливо следующее утверждение: на некотором шаге x попадает в основание некоторой башни и через некоторое число шагов либо перестаёт лежать в основаниях башен, либо оказывается в основании некоторой финальной башни. Первое очевидно, поскольку на этапе II каждого шага строится некоторая башня. После того, как число попало в основание некоторой башни, оно становится использованным и если после этого оно перестаёт лежать в основаниях башен, то уже не попадает туда снова. Наконец, если перед некоторым шагом t число x лежит в основании одной башни, а после шага t — в основании другой башни, то вторая башня была построена раньше первой, из чего следует, что количество подобных "переходов" для каждого x ограничено.

Любая финальная башня равна $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m$ для некоторых каркаса $\mathcal{F}$ и натурального числа $m > 0$. Множество всех чисел, не лежащих в основаниях финальных башен, обозначим через D. Ясно, что D вычислимо перечислимо и $0, 1 \in D$. Так как $n > 0$, то для каждого $x \notin D$ можно эффективно с оракулом $\mathbf{0}^{(n)}$ вычислить каркас $\mathcal{F}$ и число m, такие что $x \in \mathrm{base}(\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m)$.

Пусть $\mathcal{F} = \langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c \rangle$ — каркас высоты k и $A = c(r_{\mathcal{M}})$ — его атом. Скажем, что $\mathcal{F}$ является *плотным* каркасом, если существует бесконечно много финальных башен $\mathcal{T} = \langle \mathfrak{S}', \mathcal{M}', c', \varphi' \rangle$ высоты $\geqslant k$, таких что $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}'$ и для некоторого элемента $a \in M'$ уровня k справедливы равенство $A = c'(a)$ и неравенство $\varphi'(a) \cap W_k \neq \varnothing$. Скажем, что этот каркас является *насыщенным*, если для всех финальных башен $\mathcal{T} = \langle \mathfrak{S}', \mathcal{M}', c', \varphi' \rangle$ с $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}'$ и всех $a \in M'$ уровня k, для которых $A \subseteq c'(a)$, справедливо $\varphi'(a) \cap W_k \neq \varnothing$.

Лемма 2 *Каркас является плотным тогда и только тогда, когда он является насыщенным.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Действительно, для каждом каркасе строится бесконечно много финальных башен, так что из насыщенности сразу следует плотность.

Покажем необходимость. Предположим, что $\mathcal{F} = \langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c \rangle$ — плотный каркас высоты k. Пусть $\mathcal{T} = \langle \mathfrak{S}', \mathcal{M}', c', \varphi' \rangle$ — финальная башня, такая что $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}'$ и $a \in M'$ — элемент уровня k, для которого $c(r_{\mathcal{M}}) = A \subseteq c'(a)$. Имеем $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\mathcal{G}}_m$ для некоторых каркаса $\mathcal{G}$ и числа $m > 0$. Пусть t_0 настолько велико, что для всех $\langle \mathcal{G}', m' \rangle \leqslant \langle \mathcal{G}, m \rangle$ справедиво $\mathcal{T}^{\mathcal{G}', t_0}_{m'} = \mathcal{T}^{\mathcal{G}'}_{m'}$, причём все эти башни к шагу t_0 уже стали финальными. В силу плотности существуют каркас $\mathcal{G}''$ и число $m'' > 0$, такие что $\langle \mathcal{G}'', m'' \rangle > \langle \mathcal{G}, m \rangle$ и для финальной башни $\mathcal{T}^{\mathcal{G}''}_{m''} = \langle \mathfrak{S}'', \mathcal{M}'', c'', \varphi'' \rangle$, построенной после башни $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}_m$, найдётся элемент $b \in M''$ уровня k, для которого $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}''$, $c''(b) = A$ и $\varphi''(b) \cap W_k \neq \varnothing$. Пусть $t_1 \geqslant t_0$ настолько велико, что башня $\mathcal{T}^{\mathcal{G}'', t_1}_{m''} = \mathcal{T}^{\mathcal{G}''}_{m''}$ уже стала финальной к шагу t_1 и $\varphi''(b) \cap W^{t_1}_k \neq \varnothing$. Пусть, наконец, $t \geqslant t_1$ таково, что $k = l(t)$. По выбору t ни одна из башен $\mathcal{T}^{\mathcal{G}', t}_{m'}$ для $\langle \mathcal{G}', m' \rangle \leqslant \langle \mathcal{G}, m \rangle$ не будет модифицироваться на этапе I этого шага, а, значит, $\varphi'(a) \cap W^t_k \neq \varnothing$.□

Введём в рассмотрение ряд отношений эквивалентности и множеств. Пусть i — произвольное натуральное число, $\mathfrak{S}$ — спектр длины i и $d \in D_i$. Полагаем

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \{\langle x, y \rangle : x, y \in D\} \cup \{\langle x, y \rangle : x, y \in \mathrm{base}(\mathcal{T}) \text{ для некоторой} \\
&\quad \text{финальной башни } \mathcal{T}\}, \\
\varepsilon_i &= \{\langle x, y \rangle : x, y \in D \vee x = y\} \cup \{\langle x, y \rangle : \text{существуют финальная} \\
&\quad \text{башня } \langle \mathfrak{S}', \mathcal{M}, c, \varphi \rangle \text{ высоты } \geqslant i \text{ и элемент } a \in M \text{ уровня } i, \\
&\quad \text{такие что } x, y \in \varphi(a)\}, \\
R^{\mathfrak{S},0}_{d,i} &= \bigcup \{x : \text{существует финальная башня } \langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c, \varphi \rangle \text{ такая, что} \\
&\quad d \in c(r_{\mathcal{M}}) \text{ и } x \in \varphi(r_{\mathcal{M}})\}, \\
R^{\mathfrak{S},1}_{d,i} &= D \cup \bigcup \{x : \text{существуют финальная башня } \langle \mathfrak{S}', \mathcal{M}, c, \varphi \rangle \text{ высоты} \\
&\quad > i \text{ и элемент } a \in M \text{ уровня } i, \text{ такие что } \mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}', \ d \in c(a) \text{ и} \\
&\quad x \in \varphi(a)\}.
\end{aligned}
$$

Ясно, что $\varepsilon_i \subseteq \varepsilon$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Отметим также, что указанные множества и эквивалентности вычислимы с оракулом $\mathbf{0}^{(n)}$ равномерно по всем параметрам.

Лемма 3 *Для любых $i \in \mathbb{N}$, спектра $\mathfrak{S}$ длины i и $d \in D_i$ отношение ε_i и множества $R^{\mathfrak{S},0}_{d,i}$, $R^{\mathfrak{S},1}_{d,i}$ вычислимо перечислимы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}^1_i$ обозначает множество всех насыщенных каркасов высоты $\leqslant i$, а $\mathfrak{F}^2_i$ — множество всех каркасов высоты $\leqslant i$, не являющихся плотными. По лемме 2 каждый каркас высоты $\leqslant i$ попадает ровно в одно из этих множеств.

Для каждого каркаса $\mathcal{F} = \langle \mathfrak{S}', \mathcal{M}', c' \rangle \in \mathfrak{F}^2_i$ высоты $k \leqslant i$ найдётся финальная башня $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \langle \mathfrak{S}', \mathcal{M}', c', \varphi' \rangle$, построенная на этом каркасе, для которой $\varphi'(r_{\mathcal{M}'}) \cap W_k = \varnothing$. Пусть t_0 настолько велико, что к шагу t_0 башни $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ для всех $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}^2_i$ уже построены. Пусть $t_1 \geqslant t_0$ таково, что к шагу t_1 все башни, которые строились перед шагом t_0, либо разрушились, либо стали финальными.

Скажем, что для некоторой башни $\mathcal{T} = \langle \mathfrak{S}'', \mathcal{M}'', c'', \varphi'' \rangle$ и $t \in \mathbb{N}$ выполнено условие $C(\mathcal{T}, t)$, если для произвольных $k \leqslant i$, $a \in M''$ уровня k и каркаса $\mathcal{F}$, имеющего спектр $\mathfrak{S}'' \restriction k$ и атом $c''(a)$, справедливо $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}^1_i \Rightarrow \varphi''(a) \cap W^t_k \neq \varnothing$. Из определения насыщенности следует, что это условие выполняется для всех финальных башен при всех достаточно больших t.

Пусть D^t обозначает множество чисел, оказавшихся в D к шагу t. Введём в рассмотрение следующие множества:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^t_i \quad &= \quad \{\langle x, y\rangle : x, y \in D^t \vee x = y\} \cup \{\langle x, y\rangle : \text{к шагу } t \text{ существуют} \\
&\qquad \text{башня } \langle \mathfrak{S}', \mathcal{M}, c, \varphi\rangle \text{ высоты } \geqslant i \text{ и элемент } a \in M \text{ уровня } i, \\
&\qquad \text{такие что } x, y \in \varphi(a) \text{ и для всех башен } \mathcal{T}, \text{ построенных} \\
&\qquad \text{ранее, выполнено } C(\mathcal{T}, t)\}, \\
R^{\mathfrak{S},0,t}_{d,i} \quad &= \quad \bigcup \{x : \text{к шагу } t \text{ существует башня } \langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c, \varphi\rangle \text{ такая, что} \\
&\qquad d \in c(r_{\mathcal{M}}),\ x \in \varphi(r_{\mathcal{M}}) \text{ и для всех башен } \mathcal{T}, \text{ построенных} \\
&\qquad \text{ранее, выполнено } C(\mathcal{T}, t)\}, \\
R^{\mathfrak{S},1,t}_{d,i} \quad &= \quad D^t \cup \bigcup \{x : \text{к шагу } t \text{ существуют башня } \langle \mathfrak{S}', \mathcal{M}, c, \varphi\rangle \text{ высоты} \\
&\qquad > i \text{ и элемент } a \in M \text{ уровня } i, \text{ такие что } \mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}',\ d \in c(a), \\
&\qquad x \in \varphi(a) \text{ и для всех башен } \mathcal{T}, \text{ построенных ранее, выполнено} \\
&\qquad C(\mathcal{T}, t)\}.
\end{aligned}$$

Ясно, что введённые множества вычислимы равномерно по t. Так как условие C выполняется для всех финальных башен при всех достаточно больших t, то для любых $x, y \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in \varepsilon_i \quad &\Leftrightarrow \quad \langle x, y\rangle \in \varepsilon^t_i \text{ почти для всех } t, \\
x \in R^{\mathfrak{S},0}_{d,i} \quad &\Leftrightarrow \quad x \in R^{\mathfrak{S},0,t}_{d,i} \text{ почти для всех } t, \\
x \in R^{\mathfrak{S},1}_{d,i} \quad &\Leftrightarrow \quad x \in R^{\mathfrak{S},1,t}_{d,i} \text{ почти для всех } t.
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что $\varepsilon^t_i \subseteq \varepsilon^{t+1}_i$, $R^{\mathfrak{S},0,t}_{d,i} \subseteq R^{\mathfrak{S},0,t+1}_{d,i}$ и $R^{\mathfrak{S},1,t}_{d,i} \subseteq R^{\mathfrak{S},1,t+1}_{d,i}$ при всех $t \geqslant t_1$.

Пусть $t \geqslant t_1$ и $\langle x, y\rangle \in \varepsilon_i^t$. Если $x, y \in D^t$ или $x = y$, то $\langle x, y\rangle \in \varepsilon_i^{t+1}$. В противном случае перед шагом t существует башня $\mathcal{T} = \langle \mathfrak{S}', \mathcal{M}, c, \varphi\rangle$ высоты $\geqslant i$ и элемент $a \in M$ уровня i, такие что $x, y \in \varphi(a)$ и для всех башен $\mathcal{T}'$, построенных раньше чем $\mathcal{T}$, выполнено $C(\mathcal{T}', t)$. Если на шаге t башня $\mathcal{T}$ не разрушается, то $\langle x, y\rangle \in \varepsilon_i^{t+1}$. Предположим, что $\mathcal{T}$ разрушается на этом шаге. Тогда происходит модификация некоторой башни $\mathcal{S} = \langle \mathfrak{S}'', \mathcal{M}', c', \varphi'\rangle$, построенной раньше, чем $\mathcal{T}$. Пусть k — уровень этой модификации и $b' \in M'$, $a' \in M$ таковы, что $\mathcal{S}$ модифицируется при помощи $f \in \Phi(\mathcal{F}, \mathcal{G}, a', b')$, где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — каркасы башен $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$ соответственно. Пусть $\mathcal{H}$ — каркас высоты k, построенный на спектре $\mathcal{S}'' \restriction k$ и атоме $\varphi'(b')$. Каркас $\mathcal{H}$ не может лежать в $\mathfrak{F}_i^1$, поскольку для башни $\mathcal{S}$ выполнено условие C. Каркас $\mathcal{H}$ также не может лежать в $\mathfrak{F}_i^2$ из-за выбора t_1, поскольку в противном случае вместо башни $\mathcal{S}$ модификации должна подвергаться башня $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$, построенная раньше, чем $\mathcal{S}$. Остаётся единственная возможность: $k > i$, то есть модификация имеет уровень, больший чем i. Но тогда либо $a \leqslant_{\mathcal{M}} a'$ и $x, y \in \varphi'(f(a))$, либо $a \nleqslant_{\mathcal{M}} a'$ и $x, y \in D^{t+1}$. В обоих случаях $\langle x, y\rangle \in \varepsilon_i^{t+1}$.

Импликации $x \in R_{d,i}^{\mathfrak{S},0,t} \Rightarrow x \in R_{d,i}^{\mathfrak{S},0,t+1}$ и $x \in R_{d,i}^{\mathfrak{S},1,t} \Rightarrow x \in R_{d,i}^{\mathfrak{S},1,t+1}$ для произвольных $x \in \mathbb{N}$ и $t \geqslant t_1$ доказываются аналогично. Идея доказательства, как и в предыдущем случае, заключается в следующем: если x оказался в $R_{d,i}^{\mathfrak{S},0,t}$ или в $R_{d,i}^{\mathfrak{S},1,t}$ за счёт того, что он попал в основание некоторой башни, то на шаге t эта башня может разрушиться лишь в результате модификации уровня, большего чем i. $\square$

Переходим к определению коиммунного множества U, принадлежащего классу Σ_{n+1}^0. Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 4 *Существует последовательность* $\{V_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S}$ *— спектр*$\}$ *подмножеств* $\mathbb{N}$*, перечислимых с оракулом* $\mathbf{0}^{(n)}$ *равномерно по* $\mathfrak{S}$*, такая что*

1. *для любого* $\mathfrak{S}$ *множество* $V_{\mathfrak{S}}$ *является начальным сегментом* $\mathbb{N}$*;*

2. *из* $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}'$ *следует* $V_{\mathfrak{S}} \subseteq V_{\mathfrak{S}'}$*;*

3. *спектр* $\mathfrak{S}$ *хороший* $\Rightarrow$ *множество* $V_{\mathfrak{S}}$ *конечно;*

4. $\mathfrak{S}$ *— плохой спектр* $\Rightarrow V_{\mathfrak{S}'} = \mathbb{N}$ *почти для всех* $\mathfrak{S}' \succcurlyeq \mathfrak{S}$.

Доказательство. Для произвольного $i \in \mathbb{N}$ и $P \subseteq D_i^2$ пусть $R(P, i)$ обозначает условие $(\forall \langle x, y\rangle \in P)(x \leqslant_i y)$, а $Q(P, i)$ — условие $(\forall \langle x, y\rangle \notin P)(x \nleqslant_i y)$. Тогда R является Π_{n+2}^0-условием, а Q — Σ_{n+2}^0-условием на P и i.

Так как $R \in \Pi_{n+2}^0$, то существует $\mathbf{0}^{(n)}$-вычислимая функция $h(P, i, t)$, такая что $h(P, i, 0) \leqslant h(P, i, 1) \leqslant \ldots$ и $\lim_{t\to\infty} h(P, i, t) = \infty \Leftrightarrow R(P, i)$. Так как $Q \in \Sigma_{n+2}^0$, то существует Σ_{n+1}^0-предикат T, такой что для любых $i \in \mathbb{N}$ и $P \subseteq D_i^2$ множество $\{t : T(P, i, t)\}$ является начальным сегментом натурального ряда, равным $\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда не выполнено $Q(P, i)$.

Пусть теперь $\mathfrak{S} = \langle \leqslant_0^{\mathfrak{S}}, \ldots, \leqslant_k^{\mathfrak{S}}\rangle$ — спектр длины k. Положим

$$V_{\mathfrak{S}} = \{t : (\exists i \leqslant k) T(\leqslant_i^{\mathfrak{S}}, i, t)\} \cup \{t : (\exists i \leqslant k)(h(\leqslant_i^{\mathfrak{S}}, i, t) \leqslant k)\}.$$

Легко проверить, что все требуемые свойства выполняются. $\square$

Зафиксируем $\mathbf{0}^{(n)}$-вычислимую функцию $p(\mathfrak{S},t)$, такую что $p(\mathfrak{S},0) \leqslant p(\mathfrak{S},1) \leqslant \ldots$ и $V_{\mathfrak{S}} = \{x : \exists t(x < p(\mathfrak{S},t))\}$. Для каждого каркаса $\mathcal{F} = \langle \mathfrak{S}, \mathcal{M}, c\rangle$ положим $p(\mathcal{F},t)$ равным $p(\mathfrak{S},t)$. Пусть, как и в первом параграфе, $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — универсальная вычислимая последовательность всех частичных вычислимых функций. Дадим описание процесса, перечисляющего по шагам множество U. Его отличительной особенностью является то, что основание любой финальной башни либо вообще не содержит чисел из U, либо на некотором шаге перечисляется в U "целиком". По ходу конструкции на некоторые башни будут ставится метки $[\mathcal{F}]$, где $\mathcal{F}$ — каркас. Некоторые метки мы в процессе построения будем исключать из рассмотрения, после чего они уже никуда не будут ставиться.

Шаг 0**.** Перечисляем в U все числа из D, кроме нуля. Переходим к следующему шагу.

Шаг $t+1$**.** Этот шаг состоит из двух этапов.

Этап I. Перечисляем в U все числа из $\mathrm{base}(\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m)$ для всех пар $\langle \mathcal{F}, m\rangle$, таких что $\mathcal{F}$ — каркас высоты $\leqslant t$ и $m < p(\mathcal{F},t)$. Затем для каждого $i \leqslant t$ если W^t_i не содержит чисел, уже перечисленных в U и содержит число из основания некоторой финальной башни высоты $> i$, то перечисляем в U все числа из основания этой башни. Затем снимаем с башен, основания которых были перечислены в U, все метки. Наконец, выбираем наименьшую пару $\langle \mathcal{F}, m\rangle$, такую что на башне $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m$ не стоит никаких меток и её основание ещё не перечислено в U. Перечисляем $\mathrm{base}(\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m)$ в U и переходим к следующему этапу.

Этап II. Ищем каркас $\mathcal{F}$ с наименьшим возможным значением пары $\langle \mathcal{F}, p(\mathcal{F},t)\rangle$, для которого метка $[\mathcal{F}]$ нигде не стоит и ещё не исключена из рассмотрения. Пусть m — наименьшее число, для которого основание башни $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m$ ещё не перечислено в U и i равно высоте $\mathcal{F}$. Проверяем, существуют ли числа $x \in \mathrm{base}(\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m) \cap \delta\theta_i$, такие что $\theta_i(x)$ не лежит в основании башни с каркасом $\mathcal{F}$. Если таких чисел нет, то исключаем метку $[\mathcal{F}]$ из рассмотрения и переходим к следующему шагу. В противном случае выберем такой x. Если $\theta_i(x) = 0$, то перечисляем основание башни $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m$ в U, исключаем метку $[\mathcal{F}]$ из рассмотрения и переходим к следующему шагу. Если $\theta_i(x)$ уже перечислено в U, то ставим на башню $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m$ метку $[\mathcal{F}]$ и переходим к следующему шагу. Если $\theta_i(x) \neq 0$ и ещё не перечислено в U, то, значит, $\theta_i(x)$ лежит в основании некоторой финальной башни $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}_k$. Если на башне $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}_k$ не стоит никаких меток, то перечисляем $\mathrm{base}(\mathcal{T}^{\mathcal{G}}_k)$ в U, ставим на башню $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m$ метку $[\mathcal{F}]$ и переходим к следующему шагу. Наконец, если на башне $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}_k$ уже стоят другие метки, то действуем в зависимости от случая:

1. если $\langle \mathcal{F}, p(\mathcal{F},t)\rangle < \langle \mathcal{G}, p(\mathcal{G},t)\rangle$, то ставим на башню $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m$ метку $[\mathcal{F}]$, снимаем с башни $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}_k$ все метки, перечисляем её основание в U и переходим к следующему шагу;
2. если $\langle \mathcal{F}, p(\mathcal{F},t)\rangle > \langle \mathcal{G}, p(\mathcal{G},t)\rangle$, то ставим метку $[\mathcal{F}]$ на башню $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}_k$, перечисляем основание башни $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}_m$ в U и переходим к следующему шагу.

Описание конструкции закончено. Ясно, что она эффективна с оракулом $\mathbf{0}^{(n)}$ и, значит, $U \subseteq \Sigma^0_{n+1}$.

Перед каждым шагом каждая метка стоит не более чем на одной башне. Для каждого каркаса $\mathcal{F}$ перед каждым шагом метки стоят не более чем на одной башне с этим каркасом, причём одна из этих меток обязательно равна $[\mathcal{F}]$. Ставится метка может только на башню, основание которой ещё не перечислено в U к моменту её выставления. До тех пор, пока метка стоит на башне, её основание не может быть перечислено в U, а если оно перечисляется, то все метки с этой башни сразу снимаются. Кроме того, за счёт последних действий первого этапа каждая башня рано или поздно либо окажется снабжённой меткой, либо её основание попадёт в U. Значит, для каждого каркаса либо основания всех башен с этим каркасом перечисляются в U, либо существует единственная башня, для которой это не так.

По построению имеем $D \setminus \{0\} \subseteq U$ и основание любой финальной башни либо целиком лежит в U, либо не содержит чисел из U. Значит, эквивалентность ε и все эквивалентности ε_i для $i \in \mathbb{N}$ согласованы с $U \cup \{0\}$.

Скажем, что спектр $\mathfrak{S}$ является *квазихорошим*, если множество $V_{\mathfrak{S}}$ конечно. Легко видеть, что квазихорошие спектры образуют начальный сегмент в дереве всех спектров и что единственная бесконечная ветвь в этом сегменте состоит из хороших спектров. Легко заметить, что за счёт этапа I основания всех башен, спектр которых не является квазихорошим, попадают в U.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$, спектра $\mathfrak{S}$ длины i и $d \in D_i$ положим $R^{\mathfrak{S}}_{d,i} = R^{\mathfrak{S},0}_{d,i} \cup R^{\mathfrak{S},1}_{d,i}$. Множество $R^{\mathfrak{S},0}_{d,i}$ может содержать лишь конечное число элементов, не принадлежащих U, так что $\Psi(U \mid R^{\mathfrak{S},0}_{d,i}) = \bot_{\mathcal{L}^m}$. Несложно также заметить, что $[R^{\mathfrak{S},1}_{d,i}]_{\varepsilon_{i+1}} = R^{\mathfrak{S}_1}_{d,i+1} \cup \ldots \cup R^{\mathfrak{S}_k}_{d,i+1}$, где $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_k$ — все спектры длины $i+1$, расширяющие $\mathfrak{S}$. Так как ε_{i+1} — согласованная с $U \cup \{0\}$ перечислимая эквивалентность, то $\Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}}_{d,i}) = \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S},0}_{d,i}) \vee^{\mathcal{L}^m} \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S},1}_{d,i}) = \bot_{\mathcal{L}^m} \vee^{\mathcal{L}^m} \Psi(U \cup \{0\} \mid [R^{\mathfrak{S},0}_{d,i}]_{\varepsilon_{i+1}}) = \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}_1}_{d,i+1} \cup \ldots \cup R^{\mathfrak{S}_k}_{d,i+1}) = \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}_1}_{d,i+1}) \vee^{\mathcal{L}^m} \ldots \vee^{\mathcal{L}^m} \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}_k}_{d,i+1})$. Итерируя этот преобразование произвольное конечное число раз, убеждаемся, что $\Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}}_{d,i}) = \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}_1}_{d,i+m}) \vee^{\mathcal{L}^m} \ldots \vee^{\mathcal{L}^m} \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}_l}_{d,i+m})$, где m — произвольное натуральное число, а $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_l$ — все спектры длины $i+m$, расширяющие $\mathfrak{S}$.

Если спектр $\mathfrak{S}$ не является квазихорошим, то $R^{\mathfrak{S}}_{d,i} \subseteq U \cup \{0\}$ и $\Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}}_{d,i}) = \bot_{\mathcal{L}^m}$. А так как почти все спектры, расширяющие плохой спектр, не являются квазихорошими, то из двух предудущих равенств получаем, что $\Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}}_{d,i}) = \bot_{\mathcal{L}^m}$ для любого плохого спектра $\mathfrak{S}$.

Наконец, если $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^i$ — хороший спектр, то среди спектров длины $i+1$, расширяющих $\mathfrak{S}$, один равен $\mathfrak{S}^{i+1}$, а остальные — плохие, так что $\Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}) = \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}^{i+1}}_{d,i+1})$.

Определим отображение λ из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}^m_U$, полагая $\lambda(x) = \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i})$, где $x \in L$, $d \in \mathbb{N}$ таково, что $x = \nu(d)$ и i выбрано так, что $d \in D_i$. Это отображение определено корректно и является гомоморфизмом полурешёток. Действительно, выше было показано, что $\Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i})$ не зависит от выбора

i. Если $\nu(d_1) = \nu(d_2)$, то можно выбрать i так, чтобы $d_1 \equiv_i d_2$; тогда каждый атом уровня i в любом хорошем спектре содержит d_1 тогда и только тогда, когда он содержит d_2 и $R^{\mathfrak{S}^i}_{d_1,i} = R^{\mathfrak{S}^i}_{d_2,i}$. Получаем, что значение $\lambda(x)$ не зависит от выбора d, такого что $x = \nu(d)$. Наконец, если $x_1 \vee^{\mathcal{L}} x_2 = x_3$, $x_1 = \nu(d_1)$, $x_2 = \nu(d_2)$, $x_3 = \nu(d_3)$ и $d_1, d_2, d_3 \in D_i$, то в решётке $\widetilde{\mathcal{D}}_i$ элемент $[d_3]$ равен объединению $[d_1]$ и $[d_2]$, каждый атом уровня i в любом хорошем спектре содержит d_3 тогда и только тогда, когда он содержит d_1 или d_2, $R^{\mathfrak{S}^i}_{d_3,i} = R^{\mathfrak{S}^i}_{d_1,i} \cup R^{\mathfrak{S}^i}_{d_2,i}$ и $\lambda(x_3) = \lambda(x_1) \vee^{\mathcal{L}^m} \lambda(x_2)$.

Лемма 5 *Отображение λ является изоморфным вложением.*

Доказательство. Сначала покажем, что для каждого каркаса $\mathcal{F}$ с квазихорошим спектром метка $[\mathcal{F}]$ на некотором шаге либо исключается из рассмотрения, либо становится постоянной, то есть встаёт на некоторую башню и больше с неё не снимается.

Ясно, что спектр каркаса $\mathcal{F}$ является квазихорошим тогда и только тогда, когда $p(\mathcal{F}) = \lim_{t\to\infty} p(\mathcal{F}, t) < \infty$. Докажем наше утверждение индукцией по $\langle \mathcal{F}, p(\mathcal{F})\rangle$.

Пусть $\mathcal{F}$ — каркас с квазихорошим спектром высоты i и $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}' : p(\mathcal{F}) < \infty$ и $\langle \mathcal{F}', p(\mathcal{F}')\rangle < \langle \mathcal{F}, p(\mathcal{F})\rangle\}$. Предположим, что для любого $\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}$ утверждение про метки справедливо. Пусть t_0 настолько велико, что к шагу t_0+1 все метки $[\mathcal{F}']$ для $\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}$ либо были исключены из рассмотрения, либо стали постоянными. Пусть $t_1 \geqslant t_0$ настолько велико, что $p(\mathcal{F}') = p(\mathcal{F}', t_1)$ для всех $\mathcal{F}' \in \mathfrak{F} \cup \{\mathcal{F}\}$ и $\langle \mathcal{F}', p(\mathcal{F}', t_1)\rangle > \langle \mathcal{F}, p(\mathcal{F})\rangle$ для любого $\mathcal{F}' \notin \mathfrak{F} \cup \{\mathcal{F}\}$. Пусть i' равно максимальной высоте каркаса из $\mathfrak{F} \cup \{\mathcal{F}\}$. Пусть $t_2 \geqslant t_1$ таково, что для всех $j < i'$ либо $W_j \cap U = \varnothing$, либо $W_j^{t_2}$ содержит элементы, перечисленные в U к шагу $t_2 + 1$.

Предположим, что наше утверждение относительно метки $[\mathcal{F}]$ неверно. Тогда эта метка никогда не исключается из рассмотрения и существует бесконечно много таких $t \geqslant t_2$, что после этапа I шага $t{+}1$ она нигде не стоит. Пусть t_3 — одно из таких t. Из описания этапа II и выбора t_1 видно, что на шаге $t_3 + 1$ эта метка либо исключится из рассмотрения, что невозможно, либо поставится на одну из башен $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}_m$ для некоторого $\mathcal{G} \in \mathfrak{F} \cup \{\mathcal{F}\}$. Пусть $t > t_3$ таково, что на шаге $t + 1$ эта метка снова снимается. По выбору t_2 это не может произойти на первом этапе шага $t+1$. Однако этого не может произойти и на этапе II этого шага, так как в противном случае должна ставиться метка $[\mathcal{G}]$ для $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}$, что невозможно в силу выбора t_0.

Переходим к доказательству основного утверждения леммы. Необходимо показать, что для любых $a, b \in \mathbb{N}$ если $\nu(a) \nleqslant^{\mathcal{L}} \nu(b)$, то $\lambda(\nu(a)) \nleqslant^{\mathcal{L}_m} \lambda(\nu(b))$. Предположим, что первое верно, а второе нет. Пусть i таково, что $a, b \in D_i$. Так как $\lambda(\nu(a)) = \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{a,i})$ и $\lambda(\nu(b)) = \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{b,i})$, то либо найдётся j, такое что $\delta\theta_j = R^{\mathfrak{S}^i}_{a,i}$, $\rho\theta_j = R^{\mathfrak{S}^i}_{b,i}$ и $x \in U \Leftrightarrow \theta_j(x) \in U$ для любого $x \in \delta\theta_j$, либо $R^{\mathfrak{S}^i}_{b,i} \subseteq U$, либо $R^{\mathfrak{S}^i}_{b,i} \cap U = \varnothing$.

Включение $R^{\mathfrak{S}^i}_{b,i} \subseteq U$ невозможно, так как $0 \in D \subseteq R^{\mathfrak{S}^i}_{b,i}$ и $0 \notin U$. Равенство $R^{\mathfrak{S}^i}_{b,i} \cap U = \varnothing$ также невозможно, поскольку $1 \in D \setminus \{0\} \subseteq R^{\mathfrak{S}^i}_{b,i} \cap U$.

Рассмотрим оставшийся случай. Так как каждая частичная вычислимая функция имеет бесконечно много номеров, то можно считать, что $j \geqslant i$. Так как $\lambda(\nu(a)) \not\leqslant^{\mathcal{L}_m} \lambda(\nu(b))$, то найдётся каркас $\mathcal{F}$ высоты j со спектром $\mathfrak{S}^j$, такой что a принадлежит, а b не принадлежит атому этого каркаса. Основание любой башни с каркасом $\mathcal{F}$ содержит числа из $R^{\mathfrak{S}^i}_{a,i}$ и не содержит чисел из $R^{\mathfrak{S}^i}_{b,i}$, так что метка $[\mathcal{F}]$ может быть исключена из рассмотрения только если в основании некоторой финальной башни с каркасом $\mathcal{F}$ содержится $x \in U$, такой что $\theta_i(x) = 0$. Однако это невозможно и, значит, эта метка на некотором шаге ставится и больше не снимается. Но тогда для некоторого x один из элементов множества $\{x, \theta_i(x)\}$ будет перечислен в U на этом шаге, а другой попадёт в основание башни, на которую поставится постоянная метка, и никогда не перечислится в U. Противоречие. □

Лемма 6 *Отображение λ является изоморфизмом $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^m_U$.*

Доказательство. Так как λ является изоморфным вложением, то достаточно показать, что любой элемент $\mathcal{L}^m_U$ попадает в образ λ.

Пусть $u \in L^m_U$. Тогда $u = \Psi(U \mid W_i)$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ — все плотные каркасы со спектром $\mathfrak{S}^i$ и $A_1, \ldots, A_k$ — их атомы. Пусть d — элемент D_i, лежащий во всех атомах $A_1, \ldots, A_k$ и не лежащий ни в одном другом атоме спектра $\mathfrak{S}^i$ уровня i. Такой элемент найдётся по лемме 2, так как для любого атома A уровня i спектра $\mathfrak{S}^i$, такого что $A \supseteq A_m$ для некоторого $m \in [1, k]$ каркас, построенный на этом атоме со спектром $\mathfrak{S}^i$, будет насыщенным и, значит, $A \in \{A_1, \ldots, A_k\}$.

Покажем, что $[R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i]_{\varepsilon_i} \cup D =^* R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}$. Пусть $x \in R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}$. Тогда либо $x \in D$, либо $x \in \varphi(a)$ для некоторой финальной башни $\mathcal{T} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{M}, c, \varphi \rangle$ и некоторого $a \in M$ уровня i, таких что $\mathfrak{S}^i \preccurlyeq \mathfrak{S}$ и $d \in \varphi(a)$. Последнее означает, что атом $\varphi(a)$ принадлежит $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Значит, каркас со спектром $\mathfrak{S}^i$, построенный на атоме $\varphi(a)$, является насыщенным и $\varphi(a)$ содержит элемент y, принадлежащий W_i. Атом $\varphi(a)$ содержит также число 1 и, значит, $y \in R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i$. То, что $x, y \in \varphi(a)$, означает, что $\langle x, y \rangle \in \varepsilon_i$, так что имеем $x \in [R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i]_{\varepsilon_i}$.

Пусть, наоборот, $x \in [R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i]_{\varepsilon_i} \cup D$. Если $x \in D$, то $x \in R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}$. Если же $x \notin D$, то найдутся финальная башня $\mathcal{T} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{M}, c, \varphi \rangle$, для которой $\mathfrak{S}^i \preccurlyeq \mathfrak{S}$, и элемент $a \in M$ уровня i, такие что $x \in \varphi(a)$ и $\varphi(a) \cap W_i \neq \varnothing$. Если $\varphi(a) \in \{A_1, \ldots, A_k\}$, то $d \in \varphi(a)$ и $x \in R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}$. Если же $d \notin \varphi(a)$, то каркас со спектром $\mathfrak{S}^i$, построенный на атоме $\varphi(a)$, не является плотным и существует лишь конечное число возможностей для x.

Имеем $\Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}) = \Psi(U \mid [R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i]_{\varepsilon_i} \cup D) = \Psi(U \cup \{0\} \mid [R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i]_{\varepsilon_i}) \vee^{\mathcal{L}^m} \Psi(U \mid D) = \Psi(U \cup \{0\} \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i) \vee^{\mathcal{L}^m} \bot_{\mathcal{L}^m} = \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i)$. Пусть X является объединением всех таких Y, что Y равно либо $R^{\mathfrak{S},0}_{1,m}$ для спектра $\mathfrak{S}$ длины $m < i$, либо $R^{\mathfrak{S}}_{1,i}$ для плохого спектра длины i. Для всех Y, из которых составлен X, справедливо $\Psi(U \mid Y) = \bot_{\mathcal{L}^m}$ и, значит, $\Psi(U \mid X) = \bot_{\mathcal{L}^m}$. Из равенства $\mathbb{N} = X \cup R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i}$ окончательно получаем $u = \Psi(U \mid W_i) = \Psi(U \mid (X \cap$

$W_i) \cup (R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i)) = \perp_{\mathcal{L}^m} \vee^{\mathcal{L}^m} \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i) = \Psi(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}) = \lambda(\nu(d))$. $\square$

Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться, что U вычислимо или коиммунно. Это действительно так, поскольку любое бесконечное вычислимо перечислимое множество содержит элементы из U. Действительно, если W_i бесконечно, то оно либо содержит ненулевые элементы из D, либо числа из оснований финальных башен высоты $> i$, либо бесконечно много чисел, принадлежащих основаниям финальных башен высоты $\leqslant i$. В первом случае $W_i \cap U \neq \varnothing$, так как $D \subseteq U \cup \{0\}$, во втором случае $W_i \cap U \neq \varnothing$ из-за этапа I в конструкции, перечисляющей U, а в третьем случае $W_i \cap U \neq \varnothing$ из-за того, что лишь конечное число финальных башен высоты $\leqslant i$ содержат в своих основаниях числа не из U.

Теорема 2 доказана.

§3 Приложения к теории нумераций.

Результаты, полученные в предыдущих параграфах, позволяют решить ряд открытых вопросов и усилить некоторые ранее полученные результаты, относящиеся к теории нумераций.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}$ — непустое семейство множеств, принадлежащих классу Σ^0_{n+1} арифметической иерархии и ν — нумерация $\mathcal{F}$. Тогда ν называется Σ^0_{n+1}-*вычислимой*, если множество пар $\{\langle x, y\rangle : x \in \nu y\}$ принадлежит классу Σ^0_{n+1}. Σ^0_{n+1}-вычислимые нумерации задают идеал в полурешётке всех нумераций семейства $\mathcal{F}$, который называется *полурешёткой Роджерса* этого семества и обозначается $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$.

При $n = 0$ понятие Σ^0_{n+1}-вычислимой нумерации совпадает с классическим понятием вычислимой нумерации. Исследование таких нумераций ведётся с конца 60-ых годов прошлого века; им посвящено огромное множество работ, среди которых в первую очередь следует отметить монографию [9]. Для $n > 0$ исследование Σ^0_{n+1}-вычислимых нумераций началось во второй половине последнего десятилетия прошлого века. Среди работ, посвящённых этим нумерациям, можно указать [1, 2, 3, 5, 11, 12], а также множество других, не вошедших в библиографию данной статьи.

Одной из центральных задач теории нумераций, возникающих при исследовании *арифметических* (то есть Σ^0_{n+1}-вычислимых для некоторого n) нумераций, является исследование алгебраических свойств полурешёток Роджерса, а именно: описание их типов изоморфизма в целом, типов изоморфизма главных идеалов и сегментов в этих полурешётках (т. н. *локальное описание*), различных элементов с особыми свойствами (минимальных, неразложимых, предельных и др.). Отдельные результаты в этом направлении уже были получены в указанных и других работах.

Чтобы усилить некоторые из этих результатов и получить новые, распространим оператор Ψ на нумерации (так же, как это делается в работах [2, 10, 11, 12, 14], в некоторых с другими обозначениями). Пусть ν — произвольная нумерация произвольного множества S и X — произвольное не пустое вычислимо перечислимое множество. Полагаем $\Psi(\nu \mid X)$ равным классу эквивалентности нумераций множества $\nu(X)$, содержащим нумерацию $\nu\circ f$, где f — всюду определённая вычислимая функция, область значений которой равна X. Несложно проверить, что это определение не зависит от выбора f и что для этого обозначения выполняются свойства, аналогичнве свойствам Ψ-оператора для множеств, а именно:

1. для произвольной нумерации μ справедливо $\mu \leqslant \nu \Leftrightarrow$ существует вычислимо перечислимое множество X, такое что $[\mu] = \Psi(\nu \mid X)$;
2. $\Psi(\nu \mid X_1 \cup X_2) = \Psi(\nu \mid X_1) \vee \Psi(\nu \mid X_2)$;
3. $\Psi(\nu \mid X_1) \leqslant \Psi(\nu \mid X_2)$ тогда и только тогда, когда $\nu(X_1) \subseteq \nu(X_2)$ и существует частичная вычислимая функция θ, такая что $X_1 \subseteq \delta\theta$, $\theta(X_1) \subseteq X_2$ и $(\forall x \in X_1)(\nu x = \nu\theta(x))$.

Лемма 7 *Пусть $a, b \in \mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ для некоторых $n, \mathcal{F}$ и $a \leqslant b$. Тогда сегмент $[a, b]$ в $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ является ограниченной дистрибутивной полурешёткой, имеющей Σ^0_{n+3}-представление.*

Доказательство. Ограниченность (то есть существование наименьшего и наибольшего элементов) очевидна. Дистрибутивность следует из дистрибутивности полурешётки $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$.

Пусть ν — нумерация, такая что $b = [\nu]$. Имеем $a = \Psi(\nu|X)$ для некоторого вычислимо перечислимого множества X. Пусть δ — нумерация, такая что $\delta e = \Psi(\nu|X \cup W_e)$. Из свойств Ψ-оператора очевидно, что δ — нумерация сегмента $[a, b]$ и что для вычислимой функции u, такой что $W_{u(d,e)} = W_d \cup W_e$, выполняется равенство $\delta u(d, e) = \delta d \vee \delta e$. Для доказательство того, что δ является Σ^0_{n+3}-представлением, осталось показать, что отношение "$\delta d \leqslant \delta e$" принадлежит классу Σ^0_{n+3} арифметической иерархии. Имеем

$$\begin{aligned} \delta d \leqslant \delta e \quad \Leftrightarrow \quad & (\exists i \in \mathbb{N})(X \cup W_d \subseteq \delta\theta_i \;\&\; \theta_i(X \cup W_d) \subseteq W_e \;\&\; \\ & (\forall z \in W_d)(\nu z = \nu\theta_i(z)). \end{aligned}$$

Так как нумерация ν является Σ^0_{n+1}-вычисмой, то отношение "$\nu z_1 = \nu z_2$" принадлежит классу Π^0_{n+2} и алгоритм Тарского-Куратовского немедленно даёт нужный результат. $\square$

Следствие 2 *Если в полурешётке $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ существует наименьший элемент, то любой её главный идеал является ограниченной дистрибутивной полурешёткой, имеющей Σ^0_{n+3}-представление.*

Следствие 3 *Если $\mathcal{F}$ — непустое конечное семейство Σ^0_{n+1}-множеств, то любой главный идеал полурешётки $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ является ограниченной дистрибутивной полурешёткой, имеющей Σ^0_{n+3}-представление.*

Скажем, что полурешётка *тривиальна*, если она одноэлементна. Ясно, что если семейство $\mathcal{F}$ Σ^0_{n+1}-множеств одноэлементно, то полурешётка

$\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ тривиальна. Для $n > 0$ это достаточное условие одновременно является и необходимым: известно, что если $n > 0$ и состоящее более чем из одного элемента семейство $\mathcal{F}$ имеет Σ^0_{n+1}-вычислимую нумерацию, то полурешётка $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ бесконечна [2, 11]. Для $n = 0$ ситуация выглядит сложнее. Для конечного $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ полурешётка $\mathcal{R}^0_1(\mathcal{F})$ тривиальна тогда и только тогда, когда все элементы $\mathcal{F}$ попарно не сравнимы по включению. Кроме того, известны примеры бесконечных $\mathcal{F}$, содержащих пару вложенных друг в друга множеств, с нетривиальной полурешёткой $\mathcal{R}^0_1(\mathcal{F})$.

Под *типом локального изоморфизма* полурешётки будем понимать совокупность типов изоморфизма главных идеалов этой полурешётки. Скажем, что полурешётки *локально изоморфны*, если их типы локального изоморфизма совпадают. Если полурешётки изоморфны, то они локально изоморфны; обратное, очевидно, не верно.

Описание типов локального изоморфизма полурешёток $\mathcal{R}^0_1(\mathcal{F})$ для конечных $\mathcal{F}$ является известным в теории нумераций фактом. Этих типов всего два. Один состоит из единственной тривиальной полурешётки и имеет место в случае тривиальной $\mathcal{R}^0_1(\mathcal{F})$, то есть когда $\mathcal{F}$ не содержит пары различных вложенных друг в друга множеств. Если же $\mathcal{F}$ содержит такую пару, то главные идеалы полурешётки $\mathcal{R}^0_1(\mathcal{F})$ — это, в точности, лахлановские полурешётки, то есть полурешётки, имеющие 0-лахлановское представление. Другими словами, все ограниченные дистрибутивные полурешётки, имеющие Σ^0_3-представление.

Ниже мы собираемся обобщить этот результат на случай произвольного n.

Лемма 8 *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует ограниченная дистрибутивная полурешётка, имеющая Σ^0_{n+1}-представление, но не имеющая Σ^0_n-представления.*

Доказательство. В книге [6] утверждается (со ссылкой на работу Фейнера), что существует булева алгебра, имеющая Σ^0_1-представление, но не имеющая вычислимого представления. Эта алгебра не может иметь вычислимое представление и как верхняя полурешётка, поскольку в той же книге доказывается, что булева алгебра вычислима как алгебра тогда и только тогда, когда она вычислима как частичный порядок. Таким образом, при $n = 0$ справедливость утверждения леммы установлено. Релятивизация этого утверждение относительно $\mathbf{0}^{(n)}$ даёт его справедливость при произвольном n. $\square$

Лемма 9 *Пусть полурешётка $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ нетривиальна и $\mathcal{L}$ — произвольная ограниченная дистрибутивная полурешётка, имеющая Σ^0_{n+3}-преставление. Тогда в $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ существует идеал, изоморфный:*

1. *$\mathcal{L}$, если $\mathcal{F}$ конечно;*

2. *$\mathcal{L}$ без наименьшего элемента, если $\mathcal{F}$ бесконечно.*

Доказательство. В работе [11] доказан следующий результат.

Если полурешётка $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ нетривиальна, а множество U $\mathbf{0}^{(n+1)}$-вычислимо и иммунно, то в $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ существует идеал, изоморфный $\mathcal{L}^m_U$ в случае конечного $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}^m_U$ без наименьшего элемента в случае бесконечного $\mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{L}$ — ограниченная дистрибутивная полурешётка с Σ^0_{n+3}-представлением. По следствию 1 существует иммунное или вычислимое Π^0_{n+1}-множество U, такое что $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^m_U$. Если U вычислимо, то полурешётка $\mathcal{L}$ тривиальна и утверждение леммы очевидно. Если же U иммунно, то достаточно заметить, что все множества из Π^0_{n+1} являются $\mathbf{0}^{(n+1)}$-вычислимыми и сослаться на процитированный выше результат. □

Следствие 4 *Если полурешётка $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ нетривиальна и $\mathcal{L}$ — произвольная ограниченная дистрибутивная полурешётка, имеющая Σ^0_{n+3}-представление, то в $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ существует идеал, изоморфный $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Если $\mathcal{F}$ конечно, то это утверждение леммы 9. Если же $\mathcal{F}$ бесконечно, то вместо $\mathcal{L}$ можно рассмотреть полурешётку, равную $\mathcal{L}$ с присоединённым к ней "внешним образом" наименьшим элементом и опять сослаться на лемму 9. □

Теорема 3 *Пусть $\mathcal{F}$ — конечное семейство Σ^0_{n+2} — множеств. Тогда имеет место один из следующих трёх случаев:*

1. *семейство $\mathcal{F}$ одноэлементно и полурешётка $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ тривиальна;*
2. *$\mathcal{F}$ не одноэлементно, состоит из попарно несравнимых по включению множеств и главные идеалы в $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ — это в точности ограниченные дистрибутивные полурешётки, имеющие Σ^0_{n+3}-представление;*
3. *$\mathcal{F}$ содержит пару различных вложенных друг в друга множеств и главные идеалы в $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ — это в точности ограниченные дистрибутивные полурешётки, имеющие Σ^0_{n+4}-представление.*

Доказательство. Если $\mathcal{F}$ одноэлементно, то, очевидно, выполнен первый случай.

Пусть $\mathcal{F}$ не одноэлементно и не содержит двух различных сравнимых по включению множеств. По лемме 9 каждая ограниченная дистрибутивная полурешётка, имеющая Σ^0_{n+3}-представление, изоморфна некоторому главному идеалу в $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$. Покажем, что других идеалов нет. Пусть b — произвольный элемент $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ и a — наименьший элемент этой полурешётки. Идеал, порождённый b, совпадает с сегментом $[a, b]$. Далее действуем так же, как в лемме 9: вводим ν, X, δ и т. п. Единственное, в чём нужно дополнительно убедиться — это то, что отношение "$\nu z_1 = \nu z_2$" принадлежит классу Π^0_{n+2} арифметической иерархии.

Так как элементы $\mathcal{F}$ попарно не сравнимы по включению, то существует конечное семейство $\mathcal{S}$ конечных множеств, такое что для любого $F \in \mathcal{F}$

существует $S \in \mathcal{S}$ со свойством $S \subseteq F$ и, наоборот, для любого $S \in \mathcal{S}$ существует единственное $F \in \mathcal{F}$, для которого $S \subseteq F$. Значит,

$$\nu z_1 = \nu z_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S})(S_1 \subseteq \nu z_1 \,\&\, S_2 \subseteq \nu z_2 \to S_1 = S_2).$$

Применив к правой части алгоритм Тарского-Куратовского, немедленно получаем требуемое.

Рассмотрим последний случай. Пусть $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ и $F_1 \subset F_2$. По следствию 3 каждый главный идеал в $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$ является ограниченной дистрибутивной решёткой, имеющей Σ^0_{n+4}-представление. Необходимо доказать, что выполнено обратное, то есть что каждая ограниченная дистрибутивная полурешётка с Σ^0_{n+4} -представлением изоморфна главному идеалу в U. Пусть $\mathcal{L}$ — такая полурешётка. По следствию 1 существует $U \in \Sigma^0_{n+2}$, такое что $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^m_U$. Пусть ν — разрешимая нумерация $\mathcal{F}$, а μ — нумерация множества $\{F_1, F_2\}$, такая что $\mu x = F_2 \Leftrightarrow x \in U$. Легко проверить, что $\nu \oplus \mu$ — Σ^0_{n+2}-вычислимая нумерация $\mathcal{F}$ и что главный идеал в $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{F})$, порождённый элементом $[\nu \oplus \mu]$, изоморфен $\mathcal{L}^m_U$. $\Box$

Таким образом, описаны все типы локального изоморфизма полурешёток $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ для конечных $\mathcal{F}$. Как показывают лемма 8 и теорема 3, при $n > 0$ этих типов ровно три.

Кроме того, из теоремы 3 следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся конечные семейства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, для которых полурешётки $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{G})$ нетривиальны и локально изоморфны. Если же "разрыв между уровнями" больше 1, то, как показывает следующая теорема, ситуация совершенно иная не только для конечных, но и вообще для всех семейств.

Теорема 4 *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$ таковы, что $n + 2 \leqslant m$. Если для некоторых семейств $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ полурешётки $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{R}^0_{m+1}(\mathcal{G})$ локально изоморфны, то они тривиальны.*

Доказательство. По лемме 8 существует ограниченная дистрибутивная полурешётка, имеющая Σ^0_{n+4}-представление, но не имеющая Σ^0_{n+3}-преставления. Пусть полурешётка $\mathcal{R}^0_{m+1}(\mathcal{G})$ нетривиальна. По следствию 4 в $\mathcal{R}^0_{m+1}(\mathcal{G})$ существует главный идеал, изоморфный $\mathcal{L}$. Однако по лемме 7 полурешётка $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ не может содержать, идеалов, изоморфных $\mathcal{L}$, так как каждый идеал с наименьшим элементом является также и сегментом. Значит, если полурешётки локально изоморфны, то $\mathcal{R}^0_{m+1}(\mathcal{G})$ тривиальна, и, следовательно, $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ тоже тривиальна. $\Box$

Следствие 5 *Если $n + 2 \leqslant m$ и полурешётки $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$, $\mathcal{R}^0_{m+1}(\mathcal{G})$ нетривиальны, то они не изоморфны.*

В [3] было доказано, что для любого $\mathcal{F}$ и $m \geqslant n + 4$ существует $\mathcal{G}$, такое что полурешётки $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{R}^0_{m+1}(\mathcal{G})$ не изоморфны. Затем в [5] было установлено, что если $m \geqslant n + 3$, то полурешётки $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{R}^0_{m+1}(\mathcal{G})$ либо не изоморфны, либо тривиальны. Следствие 5 даёт ещё более сильный результат: по сравнению с [5] "разрыв между уровнями" сокращён с 3 до 2.

Вопрос о том, можно ли сократить этот "разрыв" с 2 до 1, то есть обязаны ли быть неизоморфными нетривиальные полурешётки $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{G})$, остаётся открытым. Пока известно лишь то, что для конечных семейств и $n = 0$ ответ на него положителен. Как уже было замечено после теоремы 3, даже если все такие полурешётки не изоморфны, установить это, исследуя только типы локального изоморфизма, не удастся.

Список литературы

[1] *Badaev S. A., Goncharov S. S., Sorbi A.* Completeness and Universality of Arithmetical Numberings. // in: Computability and Models. 2003. Kluwer Academic/Plenum Publishers, P. 11 – 44.

[2] *Badaev S. A., Goncharov S. S., Podzorov S. Yu., Sorbi A.* Algebraic properties of Rogers semilattices of arithmetical numberings. // in: Computability and Models. 2003. Kluwer Academic/Plenum Publishers, P. 45 – 78.

[3] *Badaev S. A., Goncharov S. S., Sorbi A.* Isomorphism Types and Theories of Rogers Semilattices of Arithmetical Numberings. // in: Computability and Models. 2003. Kluwer Academic/Plenum Publishers, P. 79 – 91.

[4] *Lachlan A. H.* Recursively enumerable many-one degrees // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 3. С. 326 – 358.

[5] *Бадаев С. А., Гончаров С. С., Сорби А.* Типы изоморфизма полурешёток Роджерса семейств из различных уровней арифметической иерархии // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 6. С. 637 – 654.

[6] *Гончаров С. С.* Счётные булевы алгебры и разрешимость. Научная книга, Новосибирск, 1996.

[7] *Гретцер Г.* Общая теория решёток. М.: Мир, 1982.

[8] *Денисов С. Д.* Строение верхней полурешётки рекурсивно перечислимых m-степеней и смежные вопросы. 1 // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 6. С. 643 – 683.

[9] *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

[10] *Ершов Ю. Л.*. Полурешётки Роджерса конечных частично упорядоченных множеств. // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 1. С. 44 – 84.

[11] *Подзоров С. Ю.* Начальные сегменты в полурешётках Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций. // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 2. С. 211 – 226.

[12] *Подзоров С. Ю.* О локальном строении полурешёток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций. // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 2. С. 148 – 172.

[13] *Подзоров С. Ю.* Нумерованные дистрибутивные полурешётки. // Матем. труды. 2006. Т. 9, № 2. С. 109 – 132.

[14] *Подзоров С. Ю.* Универсальная лахлановская полурешётка без наибольшего элемента. // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 3. С. 299 – 345.

[15] *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.