Александров Александр

I. Существует ли полная теория, у которой есть две конечные модели разной мощности?

II. Найти решение уравнения $(\omega + 2) \cdot x + y = \omega \cdot 2 + 3$ с минимально возможным ординалом y.

III. Доказать, что существует рекурсивная функция f, такая что если n — геделевский номер некоторой формулы Φ, то $f(n)$ — номер формулы, которая получается из Φ заменой всех вхождений символа $\exists$ на символ $\forall$.

Лащенкова Наталья

I. Записать предложение пустой сигнатуры, истинное на всех бесконечных моделях и ложное на всех трехэлементных моделях.

II. Найти решение уравнения $(\omega + 1) \cdot x + y = \omega \cdot 2 + 1$ с минимально возможным ординалом y.

III. Доказать, что существует рекурсивная функция f, такая что если n — геделевский номер некоторой формулы Φ, то $f(n)$ — номер формулы, которая получается из Φ заменой всех вхождений символа $\forall$ на символ $\exists$.

IV. Написать Σ-формулу, определяющую функцию φ, где $\varphi(x)$ — количество чисел, не превосходящих x и взаимно простых с x.

Манохин Сергей

I. Доказать секвенцию: $\forall x \forall y(\Phi(x) \vee \Psi(y)) \vdash \exists x \Phi(x) \vee \exists x \Psi(x)$ (переменная y не имеет вхождений в формулы Φ и Ψ).

II. Доказать секвенцию: $\forall x \exists y(\Phi(x) \,\&\, \Psi(y)) \vdash \exists x \Phi(x) \,\&\, \exists x \Psi(x)$ (переменная y не имеет вхождений в формулы Φ и Ψ).

III. Привести к пренексной нормальной форме формулу

$$\exists y \forall z R(x, y, z) \to \exists z(\exists x Q(x, y, z) \to \exists y P(z, x, y))$$

IV. Привести к пренексной нормальной форме формулу

$$\exists x(\forall y(\exists z P(x, y, z) \to Q(z, y, x)) \to R(z, x, y))$$

V. Привести к пренексной нормальной форме формулу

$$\exists x P(x, y, z) \to \exists y(Q(y, z, x) \to (\exists z R(z, x, y) \,\&\, \exists x R(x, y, z)))$$

VI. Будут ли модели $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ и $\langle \mathbb{N}, \geqslant \rangle$ элементарно эквивалентными?

VII. Записать предложение сигнатуры, состоящей из одного бинарного предиката и истинное только на бесконечных моделях.

VIII. Может ли аксиоматизируемый класс состоять из двух моделей?

IX. Написать формулу языка теории множеств, утверждающую что x — транзитивное бинарное отношение на y.

X. Написать формулу языка теории множеств, утверждающую что x состоит из бесконечных подмножеств y.

XI. Доказать, что $2^2 = 4$ (по определению операции возведения в степень для ординалов).

XII. Найти решение уравнения $(\omega + 5) \cdot x + y = \omega \cdot 2 + 3$ с минимально возможным ординалом y.

XIII. Привести пример транзитивного множества, элементы которого не транзитивны.

XIV. Доказать, что существует рекурсивная функция f, такая что если n — геделевский номер некоторой формулы Φ, то $f(n)$ равно числу всех вхождений константы 0 в формулу Φ.

XV. Доказать, что существует рекурсивная функция f, такая что если n — геделевский номер некоторой формулы Φ, то $f(n)$ — номер формулы, которая получается из Φ заменой всех вхождений константы 0 на терм $\underline{1}$.

XVI. Написать Σ-формулу, определяющую функцию $f(x) = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2x$.

XVII. Написать Σ-формулу, определяющую функцию f, где $f(x)$ равно минимальному y, такому что $y \geqslant x$ и $c(r(y), l(y)) \leqslant y$.

XVIII. Написать Σ-формулу, определяющую функцию f, где $f(x)$ равно количеству элементов множества $\{y : x \leqslant y^3 \leqslant x + y^2\}$.

Машковский Сергей

I. Будут ли модели $\langle \omega, + \rangle$ и $\langle \omega^2, + \rangle$ элементарно эквивалентными? (Имеются в виду ординалы и сложение на ординалах.)

II. Написать Σ-формулу, определяющую функцию $f(x, n) = 0^n + 1^n + \cdots + x^n$ (считаем, что $0^0 = 1$).

Фисенко Юлия

I. Доказать секвенцию: $\forall x \forall y(\Phi(x) \vee \Psi(y)) \vdash \forall x \Phi(x) \vee \exists x \Psi(x)$ (переменная y не имеет вхождений в формулы Φ и Ψ).

II. Теория сигнатуры, состоящей из одной одноместной функции f, задается следующими аксиомами:

$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x \neg(f(x) = x) \\ 2. & \forall x(f(f(x)) = x) \\ 3_n (n \geqslant 1). & \exists x_1 \ldots \exists x_n (\&_{i \neq j} \neg(x_i = x_j)) \end{array}$$

Будет ли эта теория полной?

III. Найти решение уравнения $(\omega^2 + \omega + 1) \cdot x + y = \omega^3 + \omega^2 + \omega$ с минимально возможным ординалом y.

IV. Доказать, что существует рекурсивная функция f, такая что если n — геделевский номер некоторой формулы Φ, то $f(n)$ — номер формулы, которая получается из Φ заменой всех вхождений символа $+$ на символ $\cdot$.

Чеканников Сергей

I. Доказать секвенцию: $\forall x \exists y (\Phi(x) \vee \Psi(y)) \vdash \exists y \forall x (\Phi(x) \vee \Psi(y))$ (переменная y не имеет вхождений в формулы Φ и Ψ).

II. Написать формулу языка теории множеств, утверждающую что x — двухэлементное подмножество y.

III. Найти решение уравнения $(2 + \omega^2 + 2) \cdot x + y = \omega^3 \cdot 2$ с минимально возможным ординалом y.

IV. Написать Σ-формулу, определяющую функцию f, где $f(x)$ — минимальное простое число, большее чем x^2.

Четыркина Дарья

I. Класс $\mathcal{K}$ состоит из двух моделей $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ и $\mathfrak{N} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq \rangle$ сигнатуры $\{\leqslant\}$. Является ли $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ полной теорией?

II. Написать формулу языка теории множеств, утверждающую что x — функция из $y \times y$ в $z \times z$.

III. Написать Σ-формулу, определяющую функцию f, где $f(x)$ равно количеству составных чисел, не превосходящих x.

Шестов Александр

I. Доказать секвенцию: $\exists x \Phi(x), \forall x(\Phi(x) \to \Psi(x)) \vdash \exists x \Psi(x)$.

II. Теория сигнатуры, состоящей из одного двухместного предиката P, задается следующими аксиомами:

1. $\forall x \exists y P(x, y)$
2. $\forall y \exists x P(x, y)$
3. $\forall x \neg P(x, x)$
4. $\forall x \forall y (P(x, y) \to \exists z (P(x, z) \,\&\, P(z, y)))$

Будет ли эта теория полной?

III. Написать формулу языка теории множеств, утверждающую что объединение любых двух элементов x есть элемент x.

IV. Найти решение уравнения $(\omega^3 + \omega) \cdot x + y = \omega^4 + \omega^3 \cdot 3$ с минимально возможным ординалом y.

V. Доказать, что существует рекурсивная функция f, такая что если n — геделевский номер некоторой формулы Φ, то $f(n)$ равно числу всех вхождений символа $+$ в формулу Φ.

VI. Написать Σ-формулу $\Phi(x)$, истинную на $\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $x = p^q$, где p и q — простые.