1. Теория производителя

1.1. Технологическое множество и его свойства

Рассмотрим экономику с l благами. Для конкретной фирмы естественно рассматривать часть из этих товаров как факторы производства и часть — как выпускаемую продукцию. Следует оговориться, что такое деление довольно условно, так как фирма обладает достаточной свободой в выборе ассортимента производимой продукции и структуры затрат. При описании технологии будем различить выпуск и затраты, представляя последние как выпуск со знаком минус. Для удобства представления технологии продукцию, которая и не затрачивается и не выпускается фирмой, будем относить к ее выпуску, причем объем производства этой продукции считаем равным 0. В принципе не исключена ситуация, в которой продукт производимый фирмой также потребляется ею в процессе производства. В этом случае мы будем рассматривать только чистый выпуск данного продукта, т.е. его выпуск минус затраты.

Пусть число факторов производства равно n, а число видов выпускаемой продукции равно m (отметим, что $l = m + n$). Обозначим вектор затрат (по абсолютной величине) через $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$, а объемы выпусков через $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m_+$. Вектор $(-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ будем называть **вектором чистых выпусков**. Совокупность всех технологически допустимых векторов чистых выпусков $\boldsymbol{z} = (-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ составляет **технологическое множество** Z. Таким образом, в рассматриваемом случае любое технологическое множество — это подмножество $\mathbb{R}^n_- \times \mathbb{R}^m_+$.

Такое описание производства носит общий характер. При этом можно не придерживаться жесткого деления благ на продукты и факторы производства: одно и то же благо может при одной технологии затрачиваться, а при другой — производится. В этом случае $Z \subseteq \mathbb{R}^l$.

Опишем свойства технологических множеств, в терминах которых обычно дается описание конкретных классов технологий.

1. Непустота

Технологическое множество Z непусто.

Это свойство означает принципиальную возможность осуществления производственной деятельности.

2. Замкнутость

Технологическое множество Z замкнуто.

Это свойство скорее техническое; оно означает, что технологическое множество содержит свою границу, и предел любой последовательности технологически допустимых векторов чистого выпуска также является технологически допустимым вектором чистых выпусков.

3. Свобода расходования:

$$\text{если } \boldsymbol{z} \in Z \text{ и } \boldsymbol{z}' \leqslant \boldsymbol{z}, \text{ то } \boldsymbol{z}' \in Z.$$

Это свойство можно интерпретировать как наличие возможности производить тот же самый объем выпуска, но посредством больших затрат, или меньший выпуск при тех же затратах.

4. Отсутствие «рога изобилия» (“no free lunch”)

$$z \in Z \text{ и } z \geqslant 0 \Rightarrow z = 0$$

Это свойство означает что для производства продукции в положительном количестве необходимы затраты в ненулевом объеме.

5. Невозрастающая отдача от масштаба:

$$\text{если } z \in Z \text{ и } z' = \lambda z, \text{ где } 0<\lambda<1, \text{ тогда } z' \in Z.$$

Иногда это свойство называют (не совсем точно) убывающей отдачей от масштаба. В случае двух благ, когда одно затрачивается, а другое производится, убывающая отдача означает, что (максимально возможная) средняя производительность затрачиваемого фактора не возрастает. Если за час вы можете решить в лучшем случае 5 однотипных задач по микроэкономике, то за два часа в условиях убывающей отдачи вы не смогли бы решить более 10 таких задач.

5′. Неубывающая отдача от масштаба:

$$\text{если } z \in Z \text{ и } z' = \lambda z, \text{ где } \lambda>1, \text{ тогда } z' \in Z.$$

В случае двух товаров, когда один затрачивается, а другой производится, возрастающая отдача означает, что (максимально возможная) средняя производительность затрачиваемого фактора не убывает.

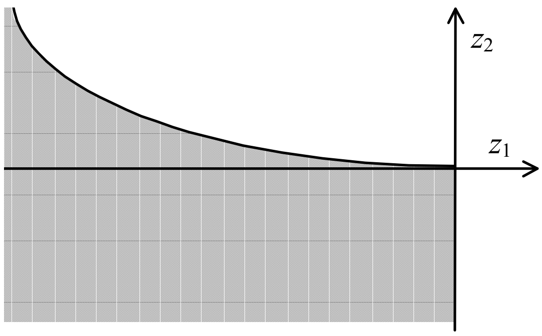


Рисунок 1. Технологическое множество с возрастающей отдачей от масштаба.

5″. Постоянная отдача от масштаба — ситуация, когда технологической множества удовлетворяет условиям 5 и 5′ одновременно, т.е.

$$\text{если } z \in Z \text{ и } z' = \lambda z', \text{ тогда } z' \in Z\ \forall \lambda>0.$$

Геометрически постоянная отдача от масштаба означает, что Z является конусом (возможно, не содержащим **0**) .

В случае двух товаров, когда один затрачивается, а другой производится, постоянная отдача означает, что средняя производительность затрачиваемого фактора не меняется при изменении объема производства.

6. Выпуклость:

$$\text{если } z', z'' \in Z \text{ и } 0<\alpha\leqslant 1, \text{ то } \alpha z' + (1-\alpha) z'' \in Z.$$

Свойство выпуклости означает возможность «смешивать» технологии в любой пропорции.

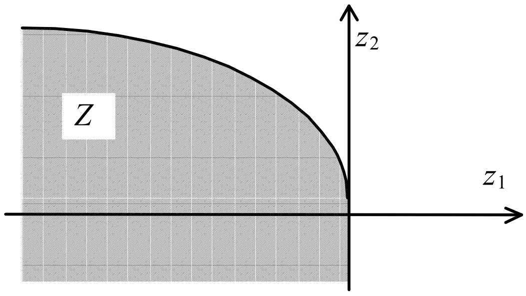


Рисунок 2. Выпуклое технологическое множество с убывающей отдачей от масштаба.

7. Необратимость

$$z \in Z \text{ и } z \neq 0 \Rightarrow (-z) \notin Z.$$

Пусть из килограмма стали можно произвести 5 подшипников. Необратимость означает, что невозможно произвести из 5-ти подшипников килограмм стали.

8. Аддитивность

$$z \in Z \text{ и } \bar{z} \in Z \Rightarrow z + \bar{z} \in Z.$$

Свойство аддитивности означает возможность комбинировать технологии.

9. Допустимость бездеятельности:

$$\mathbf{0} \in Z.$$

Утверждение 1.

1) Из невозрастающей отдачи от масштаба и аддитивности следует выпуклость.

2) Из выпуклости и допустимости бездеятельности следует невозрастающая отдача от масштаба. (Обратное не всегда верно: при невозрастающей отдаче технология может быть невыпуклой (см. Рис. 3).)

3) Множество Z обладает свойствами аддитивности и невозрастающей отдачи от масштаба тогда и только тогда, когда оно — выпуклый конус.

Доказательство:

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

■

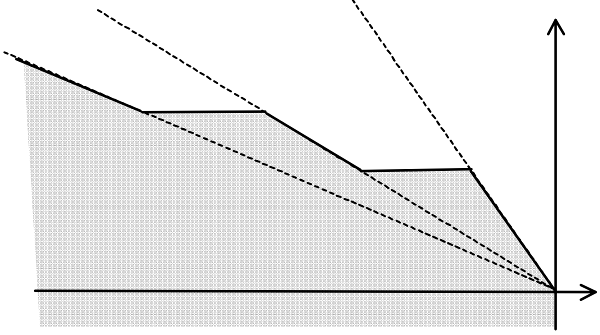


Рисунок 3. Невыпуклое технологическое множество с невозрастающей отдачей от масштаба.

При описании поведения производителя удобно представлять его производственное множество посредством некоторой производственной функции. Отметим, однако, что здесь и далее мы будем говорить только об «однопродуктовых» технологиях, т.е. $m = 1$.

Пусть X — проекция технологического множества Z на пространство векторов затрат, т.е.

$$X = \{\boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^n \mid \exists\, y\in \mathbb{R}\colon (-\boldsymbol{x}, y)\in Z\}.$$

Определение 1. Функция $f(.)$: $X \mapsto \mathbb{R}$, называется производственной функцией, представляющей технологию Z, если при каждом $\boldsymbol{x}\in X$ число $f(\boldsymbol{x})$ является значением следующей задачи:

$$y \to \max_y$$
$$(-\boldsymbol{x}, y) \in Z.$$

Утверждение 2.

Пусть для технологического множества $Z \subseteq (-X) \times \mathbb{R}$ для любого $\boldsymbol{x}\in X$ множество

$$F(\boldsymbol{x}) = \{y \mid (-\boldsymbol{x}, y) \in Z\}$$

замкнуто и ограничено сверху. Тогда технологическое множество Z может быть представлено производственной функцией.

<u>Доказательство</u>:

Замкнутость и ограниченность сверху множества $F(\boldsymbol{x})$ гарантируют, что существует $f(\boldsymbol{x})\in F(\boldsymbol{x})$, такой что $f(\boldsymbol{x}) \geqslant y\ \forall y \in F(\boldsymbol{x})$.

■

Замечание. Выполнение условий данного утверждения можно гарантировать, например, если множество Z замкнуто и обладает свойствами невозрастающей отдачи от масштаба и отсутствия рога изобилия.

Утверждение 3.

Пусть множество Z замкнуто и обладает свойствами невозрастающей отдачи от масштаба и отсутствия рога изобилия. Тогда для любого $\boldsymbol{x}\in X$ множество

$$F(\boldsymbol{x}) = \{y \mid (-\boldsymbol{x}, y) \in Z\}$$

замкнуто и ограничено сверху.

<u>Доказательство</u>:

Замкнутость множеств $F(\boldsymbol{x})$ непосредственно следует из замкнутости Z.

Покажем, что $F(\boldsymbol{x})$ ограничены сверху. Пусть это не так и при некотором $\boldsymbol{x}\in X$ существует неограниченно возрастающая последовательность $\{y_N\}$, такая что $y_N \in F(\boldsymbol{x})$. Тогда вследствие невозрастающей отдачи от масштаба $(-\boldsymbol{x}/y_N, 1) \in Z$. Поэтому (вследствие замкнутости), $(\boldsymbol{0}, 1) \in Z$, что противоречит отсутствию рога изобилия.

■

Отметим также, что если технологическое множество Z удовлетворяет гипотезе свободного расходования и существует представляющая его производственная функция $f(.)$, то , множество Z описывается следующим соотношением:

$$Z = \{(-\boldsymbol{x}, y) | \, y \leqslant f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in X\}.$$

Заметим, что если технологическое множество имеет вид

$$Z = \{(-x_1, -x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \leqslant x_1^{\alpha} x_2^{\beta}\},$$

то представляющая его производственная функция существует и является функцией Кобба-Дугласа $f(\boldsymbol{x}) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$

Этот пример показывает, что приведенные выше условия, гарантирующие существование производственной функции, не являются необходимыми.

Установим теперь некоторые взаимосвязи между свойствами технологического множества и представляющей его производственной функции.

Утверждение 4.

Пусть технологическое множество Z представляется производственной функцией $f(.)$. Тогда верно следующее

1) Если множество Z выпукло, то функция $f(.)$ вогнута.
2) Если множество Z удовлетворяет гипотезе свободного расходования, то верно и обратное, т.е. если функция $f(.)$ вогнута, то множество Z выпукло.
3) Если Z выпукло, то $f(.)$ непрерывна на внутренности множества X.
4) Если множество Z обладает свойством свободы расходования, то функция $f(.)$ не убывает.
5) Если Z обладает свойством отсутствия рога изобилия, то $f(\mathbf{0}) \leqslant 0$.
6) Если множество Z обладает свойством допустимости бездеятельности, то $f(\mathbf{0}) \geqslant 0$.

Доказательство:

(1) Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$. Тогда $(-\boldsymbol{x}_1, f(\boldsymbol{x}_1)) \in Z$ и $(-\boldsymbol{x}_2, f(\boldsymbol{x}_2)) \in Z$, и $(-\alpha\boldsymbol{x}_1-(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2, \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}_2)) \in Z$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ поскольку множество Z выпукло. Тогда по определению производственной функции

$$\alpha f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}_2) \leqslant f(\alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2),$$

что означает вогнутость $f(\boldsymbol{x})$.

(2) Поскольку множество Z обладает свойством свободного расходования, то множество Z (с точностью до знака вектора затрат) совпадает с ее подграфиком. А подграфик вогнутой функции — выпуклое множество.

(3) Доказываемый факт следует из того, что вогнутая функция непрерывна во внутренности ее области определения.

(4) Пусть $\boldsymbol{x}_2 \geqslant \boldsymbol{x}_1$ $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n_+)$. Поскольку $(-\boldsymbol{x}_1, f(\boldsymbol{x}_1)) \in Z$, то по свойству свободы расходования $(-\boldsymbol{x}_2, f(\boldsymbol{x}_1)) \in Z$. Отсюда, по определению производственной функции, $f(\boldsymbol{x}_2) \geqslant f(\boldsymbol{x}_1)$, то есть $f(.)$ неубывает.

(5) Неравенство $f(\mathbf{0}) > 0$ противоречит предположению об отсутствии рога изобилия. Значит, $f(\mathbf{0}) \leqslant 0$.

(6) По предположению о допустимости бездеятельности $(\mathbf{0}, 0) \in Z$. Значит, по определению производственной функции, $f(\mathbf{0}) \geqslant 0$. ■

В предположении о существовании производственной функции свойства технологии можно описывать непосредственно в терминах этой функции. Покажем это на примере так называемой эластичности масштаба.

Пусть производственная функция дифференцируема. В точке $\boldsymbol{x}$, где $f(\boldsymbol{x})>0$, определим локальную эластичность масштаба $e(\boldsymbol{x})$ как:

$$e(\boldsymbol{x}) = \frac{df(\lambda \boldsymbol{x})}{d\lambda}\frac{\lambda}{f(\boldsymbol{x})}\bigg|_{\lambda=1}.$$

Если в некоторой точке $e(\boldsymbol{x})$ равен 1, то считают, что в этой точке "постоянная эластичность масштаба", если больше 1 — то "растущая эластичность", меньше — "убывающая". Вышеприведенное определение можно переписать в следующем виде:

$$e(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} x_i}{f(\boldsymbol{x})}.$$

Утверждение 5.

Пусть технологическое множество Z описывается производственной функцией $f(.)$ и в точке $\boldsymbol{x}$ выполнено $f(\boldsymbol{x})>0$. Тогда верно следующее:

1) Если технологическое множество Z обладает свойством убывающей отдачи от масштаба, то $e(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$.

2) Если технологическое множество Z обладает свойством возрастающей отдачи от масштаба, то $e(\boldsymbol{x}) \geqslant 1$.

3) Если Z обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, то $e(\boldsymbol{x})=1$.

Доказательство:

(1) Рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n<1)$, такую что $\lambda_n \to 1$. Тогда $(-\lambda_n \boldsymbol{x}, \lambda_n f(\boldsymbol{x})) \in Z$, откуда следует, что $f(\lambda_n \boldsymbol{x}) \geqslant \lambda_n f(\boldsymbol{x})$. Перепишем это неравенство в виде:

$$\frac{f(\lambda_n \boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})}{\lambda_n - 1} \leqslant f(\boldsymbol{x}).$$

Переходя к пределу, имеем

$$\frac{df(\lambda \boldsymbol{x})}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=1} = \sum \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} x_i \leqslant f(\boldsymbol{x}).$$

Таким образом, $e(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$.

(2) и (3) доказываются аналогично.

■

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Пусть множество производственных возможностей фирмы задается условием:

$$z_1 \leqslant \ln(1 - z_2), \text{ где } z_2<1.$$

Какими свойствами обладает данная технология?

2. Докажите Утверждение **1**.

3. Технологические способы (–5,4), (–4,0) и (–2,2) принадлежат некоторому технологическому множеству $\boldsymbol{Z}$. Можно ли гарантировать, что технологический способ (–3,2) принадлежит $\boldsymbol{Z}$, если известно, что $\boldsymbol{Z}$ выпукло? Изобразите графически множество технологических способов, про которые можно утверждать, что они принадлежат $\boldsymbol{Z}$.

4. Технологические способы (–5,4), (–4,0) и (–2,2) принадлежат некоторому технологическому множеству $\boldsymbol{Z}$. Можно ли гарантировать, что технологический способ (–2,1) принадлежит $\boldsymbol{Z}$, если известно, что $\boldsymbol{Z}$ выпукло и характеризуется убывающей отдачей? Изобразите графически множество технологических способов, про которые можно утверждать, что они принадлежат $\boldsymbol{Z}$.

5. Технологические способы (–8,10), (–2,3) и (–4,2) принадлежат некоторому технологическому множеству $\boldsymbol{Z}$. Можно ли гарантировать, что технологический способ (–5, 5) принадлежит $\boldsymbol{Z}$, если известно, что $\boldsymbol{Z}$ характеризуется свободой расходования? Изобразите графически множество технологических способов, про которые можно утверждать, что они принадлежат $\boldsymbol{Z}$.

6. Пусть однопродуктовая технология может быть представлена производственной функцией. Показать, что производственное множество удовлетворяет свойству постоянной отдачи от масштаба тогда и только тогда, когда соответствующая производственная функция однородна первой степени.

7. Показать в случае технологии, что если производственное множество $\boldsymbol{Z}$ замкнуто и выпукло и $-\mathbb{R}^l_+ \subseteq \boldsymbol{Z}$, то оно обладает свойством свободы расходования.

1.2. Задача производителя и ее свойства

Гипотеза, лежащая в основе модели поведения производителя заключается в том, что производитель выбирает технологически допустимый вектор чистых выпусков, максимизирующий прибыль. В терминах чистых выпусков прибыль есть скалярное произведение вектора чистых выпусков $z \in Z$ на вектор цен: $\boldsymbol{pz}$. (Цены мы везде в дальнейшем будем считать строго положительными: $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$.) Таким образом, если производитель сталкивается с некоторым вектором цен $\boldsymbol{p}$, то его выбор оказывается решением следующей задачи математического программирования:

Задача 3.

$\boldsymbol{pz} \to \max_{z \in Z}$.

Существенное отличие задачи производителя (Задача 3) от задачи потребителя (Задачи 1) в том, что множество ее допустимых решений Z, как правило, не ограничено. Более того, для технологий с возрастающей отдачей, существование технологически допустимых пар с положительной прибылью приводит к существованию допустимых решений, дающих сколь угодно большую прибыль.

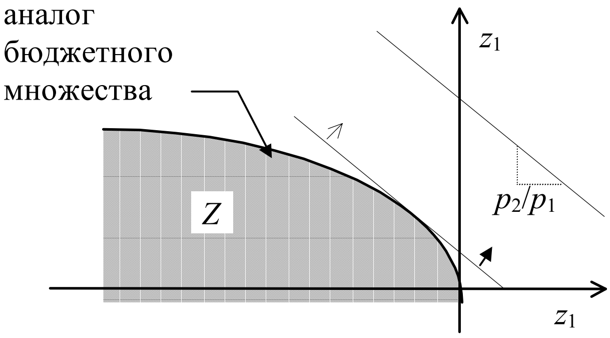


Рисунок 4. Иллюстрация решения задачи производителя

<u>Пример</u> (отсутствия решения):

Пусть технологическое множество имеет вид $Z = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \leqslant 0,\ z_2 + \alpha z_1 \leqslant 0\}$, цены благ равны p_1, p_2. Если выбрать $z_2 = -\alpha\, z_1$, то прибыль будет равна $-(\alpha p_2 - p_1)\, z_1$. Поэтому если $\alpha p_2 > p_1$, то прибыль неограничена сверху, и решение отсутствует.

Если $\alpha p_2 < p_1$, то решение единственно — z_1=0 и z_2=0. Если $\alpha p_2 = p_1$, то решением этой задачи является любая технологически допустимая пара (z_1, z_2), такая что $z_2 + \alpha\, z_1 = 0$.

Таким образом, существование решений можно гарантировать лишь при дополнительных предположениях относительно структуры множества Z. Ниже мы докажем существование решения при следующем (сильном) предположении: существует компактное множество Z', такое что

$$Z' \subset Z \text{ и } \qquad Z \subset Z' - \mathbb{R}^k_+. \qquad (*)$$

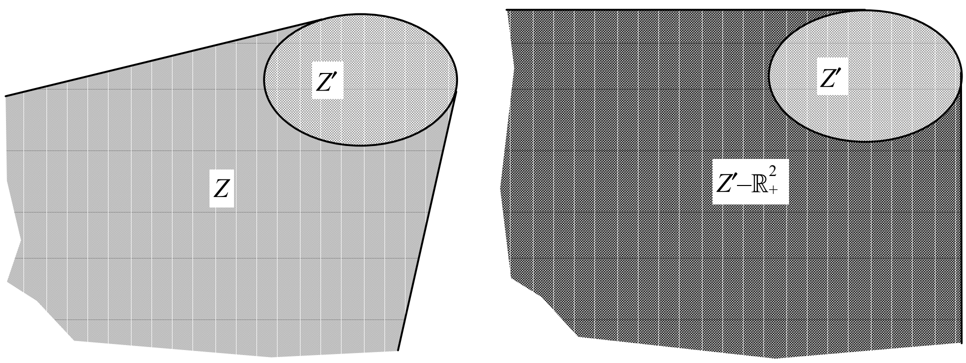


Рисунок 5. Иллюстрация предположения, гарантирующего существование решения задачи максимизации прибыли

Заметим (что легко увидеть из предлагаемых иллюстраций рис. 5), что множество Z', обладающее указанным свойством, если существует, то определяется множеством Z не единственным образом.

Утверждение 6.

Пусть выполнено соотношение (*). Тогда решение Задачи 3 существует при любом положительном векторе цен благ.

Доказательство:

Докажем, что задача максимизации прибыли на Z сводится к задаче максимизации прибыли на Z'. Пусть $z \in Z$ и $z \notin Z'$. Тогда по условию (*) найдется вектор $z' \in Z'$ такой, что $z' - z \geqslant \neq 0$. Тем самым мы нашли допустимое решение, для которого прибыль больше, чем для z. Из этого следует, что нам достаточно рассматривать только $z \in Z'$.

Поскольку Z' — компактное множество, а прибыль $\boldsymbol{pz}$ непрерывна по z, то по теореме Вейерштрасса решение Задачи 3 на множестве Z' всегда существует.

■

Определение 2.

Пусть решение Задачи 3 существует и единственно для всех значений параметров — положительных цен $\boldsymbol{p}$. Тогда определена следующая функция, которая ставит в соответствие каждому вектору цен решение задачи при этих параметрах — вектор $z(\boldsymbol{p})$. Будем называть ее функцией предложения. Если решение задачи при некоторых значениях параметров неединственно, то говорят об отображении предложения.

Определение 3.

Функция прибыли есть максимум целевой функции в Задаче 3:

$$\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p}).$$

Функция прибыли $\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p})$ аналогична непрямой функции полезности потребителя, а функция предложения $z(\boldsymbol{p})$ — функции спроса. Докажем некоторые свойства этих функций.

Утверждение 7. (Свойства функции $\pi(\boldsymbol{p})$)

1) Функция $\pi(\boldsymbol{p})$ однородна 1-й степени:

$$\pi(\lambda\boldsymbol{p}) = \lambda\pi(\boldsymbol{p}).$$

2) Функция $\pi(\boldsymbol{p})$ выпукла.

3) Функция $\pi(\boldsymbol{p})$ непрерывна на множестве положительных цен.

Доказательство:

1) Доказательство однородности оставляем в качестве упражнения.

2) Докажем выпуклость $\pi(.)$.

Пусть от некоторых двух цен $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ взята выпуклая комбинация — цена

$$\boldsymbol{p}_\alpha = \alpha\boldsymbol{p} + (1-\alpha)\boldsymbol{p}' \quad (0 < \alpha < 1).$$

Выпуклость функции $\pi(.)$ означает, что $\pi(\boldsymbol{p}_\alpha) \leqslant \alpha\pi(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha)\pi(\boldsymbol{p}')$.

Учитывая условия максимизации прибыли, имеем для $z_\alpha = z(\boldsymbol{p}_\alpha)$:

$$\boldsymbol{p}z_\alpha \leqslant \pi(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{p}'z_\alpha \leqslant \pi(\boldsymbol{p}').$$

Складывая эти неравенства с множителями α и $(1-\alpha)$ соответственно, получим требуемое неравенство.

Выпуклость функции $\pi(.)$ можно также доказать, используя тот факт, что поточечный максимум семейства выпуклых функций — выпуклая функция, заметив, что $\pi(.)$ является поточечным максимумом выпуклых (линейных) функций $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z}\in Z$.

3) Непрерывность функции $\pi(.)$ на множестве положительных цен следует, например, из того факта, что выпуклая функция непрерывна во внутренности ее области определения (для положительных цен в данном случае).

■

Аналогом тождества Роя является следующая **лемма Хотелинга**.

Утверждение 8.
Пусть функция прибыли $\pi(.)$ непрерывно дифференцируема в точке $\boldsymbol{p}\gg\boldsymbol{0}$. Тогда

$$\frac{\partial\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = z_k(\boldsymbol{p}).$$

Доказательство:

Пусть $\boldsymbol{p}^*>0$ — некоторый вектор цен. Для доказательства леммы определим две функции от от цены k-го блага p_k. Первая из них представляет собой прибыль как функцию p_k при условии, что остальные цены зафиксированы на уровне $\boldsymbol{p}^*_{-k}$, т.е.

$$\pi^k(p_k) = \pi(\boldsymbol{p}^*_{-k}, p_k) = \pi(p^*_1, \ldots, p^*_{k-1}, p_k, p^*_{k+1}, \ldots, p^*_l).$$

Обозначив $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^*)$, определим вторую функцию как

$$\mathrm{g}(p_k) = p_k z^*_k + \sum_{j\neq k} p^*_j z^*_j.$$

Она является линейной функцией p_k.

По определению $\pi(\boldsymbol{p}^*) = \boldsymbol{p}^* \boldsymbol{z}^*$, а это означает, что $\pi^k(p^*_k) = \mathrm{g}(p^*_k)$. При других ценах, вообще говоря, $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^*)$ может не давать максимум прибыли, т. е $\pi^k(p_k) \geqslant \mathrm{g}(p_k)$. Таким образом, прямая $\mathrm{g}(p_k)$ является касательной графика функции $\pi^k(p_k)$ в точке p^*_k (точка A на Рис. 6). В точке касания

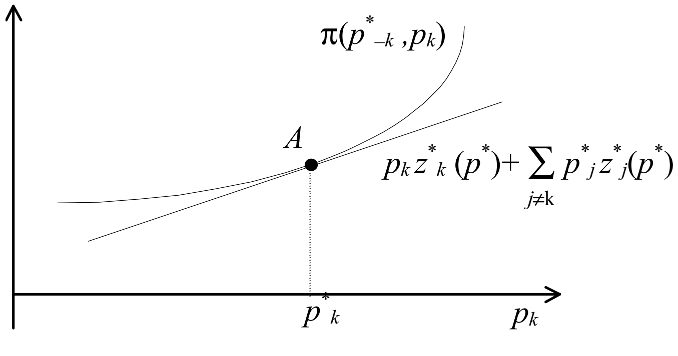


Рисунок 6. Иллюстрация доказательства Леммы Хотеллинга

$$\frac{\partial\pi^k(p^*_k)}{\partial p_k} = \frac{\partial \mathrm{g}(p^*_k)}{\partial p_k},$$

что и означает справедливость Леммы.

■

Утверждение 9. (Свойства функции $z(\boldsymbol{p})$)

- Функция $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ однородна нулевой степени.
- Если множество Z строго выпукло, то $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ — однозначная непрерывная функция.
- Если функция прибыли $\pi(.)$ дважды непрерывно дифференцируема, то матрица Якоби $M = \{\partial z_j/\partial p_k\}$ функции $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ симметрична и положительно полуопределена.

<u>Доказательство</u>:

Доказательство оставляем в качестве упражнения.

■

Если технологическое множество может быть представлено посредством производственной функции, то задача производителя при положительной цене выпускаемой продукции сводится к следующей:

$$p_y f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}\boldsymbol{x} \to \max_{\boldsymbol{x}}$$
$$\boldsymbol{x} \in X,$$

где p_y —цена выпускаемой продукции, $\boldsymbol{x}$ — количество затрачиваемых факторов производства, $\boldsymbol{w}$ — вектор цен факторов.

Пусть $\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w})$ — функция спроса на факторы производства при векторе цен $(p_y, \boldsymbol{w})$, $y(p_y, \boldsymbol{w})$ — функция предложения продукции при векторе цен $(p_y, \boldsymbol{w})$. Заметим, что если $p_y > 0$, то $y(p_y, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w}))$. В данном контексте функция прибыли записывается в следующем виде:

$$\pi(p_y, \boldsymbol{w}) = p_y f(\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w})) - \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w}).$$

Поясним связи переменных этой задачи с ранее рассмотренными. Как не трудно понять $\boldsymbol{p} = (p_y, \boldsymbol{w})$ и $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = (-\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w}), y(p_y, \boldsymbol{w}))$.

Как результаты доказанные в этом параграфе, так и те которые будут доказаны впоследствии могут быть доказаны и в случае когда первичный объект рассмотрения не технологическое множество, а производственная функция.

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Для случая, когда Z представлено дифференцируемой производственной функцией, можно доказать лемму Хотеллинга используя теорему Куна-Таккера. Проведите это доказательство. (Подсказка: см. первое доказательство леммы Шепарда для теории потребления.)

2. Докажите Утверждение **9**.

3. Покажите, что если производственная функция $f(.)$ строго вогнута, и кроме того, $f(\mathbf{0}) = 0$, то прибыль в точке оптимума неотрицательна.

4. Покажите, что если производственная функция в точке максимума прибыли обладает возрастающей отдачей от масштаба, то прибыль не может быть положительной. На основании этого выведите, что в случае возрастающей отдачи от масштаба задача производителя либо не имеет решения, либо **0** — решение задачи.

5. Пусть $y(p_y, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w}))$, а $H = \left(\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ — матрица вторых производных производственной функции $f(\boldsymbol{x})$. Выведите следующие соотношения сравнительной статики для задачи производителя.

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} = -\frac{1}{p_y}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right) H^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)'$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial p_y} = -\frac{1}{p_y} H^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)'$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{w}}\right)' = \frac{1}{p_y}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right) H^{-1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{w}} = \frac{1}{p_y} H^{-1}.$$

На основании этого сделайте заключение о поведении выпуска производителя и его спроса на факторы для вогнутых производственных функций. Проиллюстрируйте эти соотношения для производственной функции типа Кобба-Дугласа.

6. Пусть множество производственных возможностей фирмы задается условием:

$z_1 \leqslant \ln(1 - z_2)$, где $z_2 < 1$.

Постройте функции спроса / предложения на z_1, z_2. Постройте функцию прибыли для данной технологии.

7. Для технологии, описываемой производственной функцией $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\alpha}$, вычислите:

- функцию прибыли,
- функцию спроса на производственный фактор,
- функцию предложения,

Покажите, что

- функция прибыли однородна и выпукла (по ценам продукции (p) и фактора производства ($\boldsymbol{w}$)),
- функция спроса удовлетворяет закону спроса,
- функция предложения удовлетворяет закону предложения

8. Найдите функцию прибыли, функцию предложения и функцию спроса на факторы для перечисленных производственных функций:

а. $f(\boldsymbol{x}) = \prod x_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$ (функция Кобба-Дугласа).

б. $f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^{\rho}$

в. $f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} v_i(x_i) + x_n$.

Какими свойствами обладают найденные функции? Покажите, что для данных функций выполнена лемма Хотеллинга.

9. Докажите, что валовой доход фирмы упадет, если цены на все факторы производства увеличатся пропорционально.

10. Покажите, что валовой доход фирмы упадет, если упадет цена по крайней мере одного из выпускаемых ею продуктов.

11. Покажите, что прибыль фирмы упадет, если вырастет цена по крайней мере на один из используемых ею факторов производства..

12. Покажите, что прибыль фирмы упадет, если упадет цена по крайней мере на один из выпускаемых ею продуктов.

13. Предположим, что производственная функция для некоторой технологии вогнута и сепарабельна, причем предельный продукт любого фактора производства как угодно мал при достаточно больших объемах затрат этого фактора производства. Покажите, что

- валовой доход фирмы упадет, если возрастет цена по крайней мере на один из используемых ею факторов производства;
- функция спроса (предложения) данной фирмы удовлетворяет условиям валовой заменимости;
- спрос данной фирмы на любой фактор производства неограниченно возрастает при падении цены этого фактора производства;
- предложение данной фирмы неограниченно возрастает при росте выпускаемой этой фирмой продукции.

14. Покажите, что в случае однородной производственной функции показатель отдачи от масштаба не зависит от цен факторов.

15. Покажите, что в случае однородной производственной функции отношение функций спроса на любые два фактора производства не зависит от цены продукции.

16. Покажите, что функция прибыли сепарабельна тогда и только тогда, когда сепарабельна функция спроса.

1.3. Восстановление технологического множества по функции прибыли

Аналог концепции выявленных предпочтений для модели производителя имеет довольно простой вид. Пусть $(\boldsymbol{p}^i, \boldsymbol{z}^i)$ $(i = 1,...,l)$ — последовательность наблюдений: при ценах $\boldsymbol{p}^i$ наблюдался вектор чистого выпуска $\boldsymbol{z}^i$. Если при каком-то векторе цен $\boldsymbol{p}^i$ выполнено $\boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z}^j > \boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z}^i$, то $\boldsymbol{z}^i$ не максимизирует прибыль при ценах $\boldsymbol{p}^i$. А это противоречит рациональности производителя.

Если же $\boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z}^j \leqslant \boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z}^i$ $\forall\, i, j$, то последовательность наблюдений $(\boldsymbol{p}^i,\boldsymbol{z}^i)$ $(i = 1,...,l)$ не противоречит гипотезе максимизации прибыли. Технологическое множество, которое порождает такие выборы производителя, может быть построено разными способами. Рассмотрим некоторые из них.

Наиболее простым является вариант, когда технологическое множество, которое при максимизации прибыли порождает такие выборы, состоит только из точек $\boldsymbol{z}^i$, т.е.

$$Z_1=\{\boldsymbol{z}^1, \boldsymbol{z}^2,...,\boldsymbol{z}^I\}.$$

Также можно в качестве технологического множества Z можно взять выпуклую оболочку Z_2 точек $\boldsymbol{z}^1, \boldsymbol{z}^2,...,\boldsymbol{z}^I$ (если мы предполагаем, что технологическое множество выпукло). Если мы предполагаем выпуклость и свободу расходования, то в качестве Z можно взять разность между Z_2 и $\mathbb{R}^l_+$: $Z_3 = Z_2 - \mathbb{R}^l_+$. Еще один вариант — пересечение полупространств, отсекаемых соответствующими гиперплоскостями:

$$Z_4 = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z}^i,\ i = 1,...,I\,\}.$$

Все эти варианты для случая l=2 изображены на приведенных ниже рисунках. Прямые, нарисованные пунктиром, изображают цены. Отметим, что $Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset Z_4$.

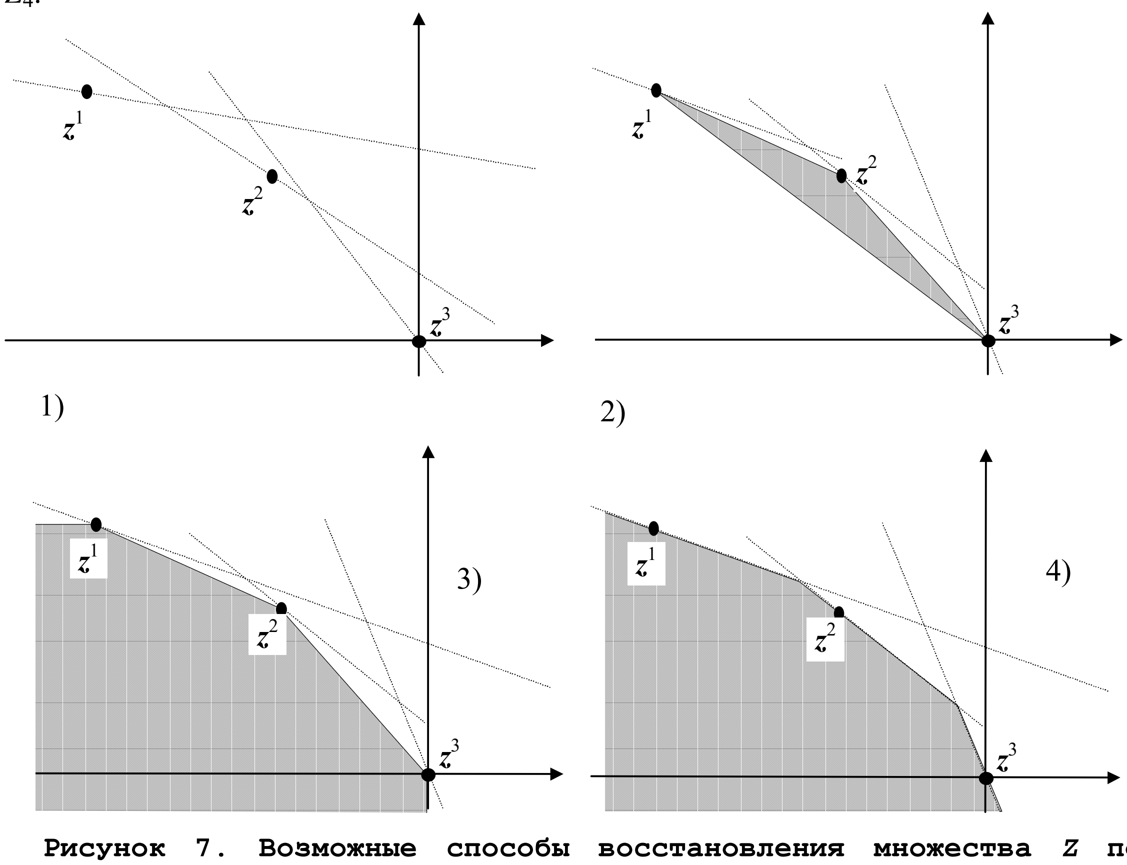


Рисунок 7. Возможные способы восстановления множества *Z* по наблюдаемым точкам

Рассмотрим некоторую функцию цен $\pi(\boldsymbol{p})$. Возникают два вопроса: будет ли она функцией прибыли рационального производителя (т.е функций порожденной максимизацией прибыли на некотором технологическом множестве. И если это так, то как “восстановить” множество Z или его характеристики.

Обсудим сначала вторую проблему, т.е. пусть известна функция прибыли $\pi(\boldsymbol{p})$ рационального производителя.

Заметим, что существование вектора $\boldsymbol{z} \in Z$, такого что $\boldsymbol{pz} > \pi(\boldsymbol{p})$ при некоторых ценах $\boldsymbol{p}$, противоречило бы гипотезе максимизации прибыли на Z. Объединим все вектора $\boldsymbol{z}$ не противоречащие этому условию при всех неотрицательных $\boldsymbol{p}$ в множество

$$Z_\pi = \bigcap_{\boldsymbol{p} \geqslant 0} \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{pz} \leqslant \pi(\boldsymbol{p})\} = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{pz} \leqslant \pi(\boldsymbol{p})\ \forall \boldsymbol{p} \geqslant 0\}.$$

Уместен вопрос: если мы построим по некоторому заданному производственному множеству Z функцию прибыли, а затем по ней построим множество Z_π, то совпадут ли множества Z и Z_π? Положительный ответ на этот вопрос позволил бы нам восстанавливать технологические множества по наблюдаемому поведению.

В общем случае Z и Z_π могут не совпадать, поскольку описанный метод построения Z_π порождает выпуклые множества (пересечение полупространств), удовлетворяющее свойству свободы расходования (поскольку берутся только неотрицательные цены), а технологическое множество Z может быть невыпуклым (как на Рис. 7(1)) или не удовлетворять свойству свободы расходования (как на Рис. 7(1) и (2)).

Утверждение 10.
Пусть технологическое множество Z замкнуто, выпукло и удовлетворяет свойству свободы расходования. Тогда оно совпадает с порождаемым им множеством Z_π.

Доказательство:

Мы докажем данное утверждение, если покажем, что $Z_\pi \subset Z$ и $Z \subset Z_\pi$.

1) ($Z \subset Z_\pi$). По определению функции прибыли для любого $\boldsymbol{z} \in Z$ имеем $\boldsymbol{pz} \leqslant \pi(\boldsymbol{p})\ \forall \boldsymbol{p} \geqslant 0$, и значит, $\boldsymbol{z} \in Z_\pi$.

2) ($Z_\pi \subset Z$). Пусть $\tilde{\boldsymbol{z}} \notin Z$. По теореме об отделимости для любого выпуклого замкнутого множества и любой точки, не принадлежащей этому множеству, существует гиперплоскость, отделяющая эту точку от этого множества. В нашем случае это означает, что существует вектор коэффициентов $\tilde{\boldsymbol{p}}$, не равный нулю и такой, что

$$\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{z}} > \tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{z}\ \forall\ \boldsymbol{z} \in Z.$$

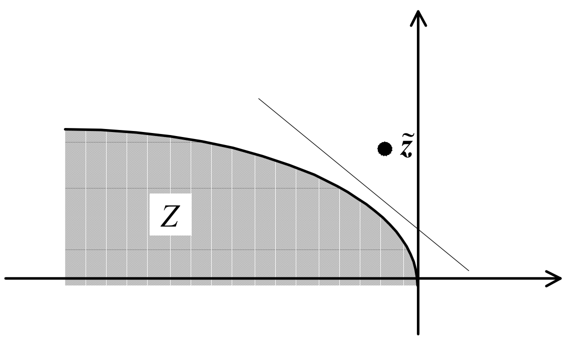


Рисунок 8. Иллюстрация отделимости

Покажем, что $\tilde{\boldsymbol{p}}$ может быть вектором цен. Для этого нужно, чтобы он не имел отрицательных компонент.

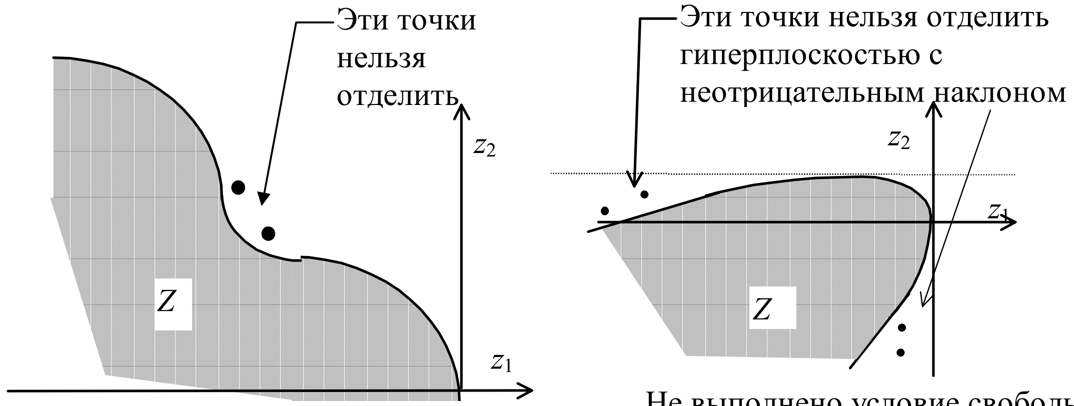
Предположим, что $\tilde{p}_i<0$. Рассмотрим некоторую точку $z'\in Z$ и луч $z' - \lambda\mathbf{e}^i$ при $\lambda \geqslant 0$, где $\mathbf{e}^i$ — орт (i-я компонента равна 1, а остальные — нули). Этот луч целиком лежит во множестве Z, так как Z удовлетворяет свойству свободы расходования. Величина $\tilde{p}z' - \lambda\tilde{p}_i$ неограничена сверху. Это противоречит тому, что $\tilde{p}\tilde{z} > \tilde{p}z \ \forall z\in Z$. Мы пришли к противоречию, поэтому $\tilde{p} \geqslant 0$.

Из того, что $\tilde{p} \geqslant 0$ и $\tilde{p}\tilde{z} > \tilde{p}z \ \forall\ z \in Z$, следует, что $\tilde{p}\tilde{z} > \pi(\tilde{p})$. Значит, $z \notin Z_\pi$.

Мы показали, что любая точка, которая не принадлежит Z, не принадлежит и Z_π. А это значит, что $Z_\pi \subset Z$.

■

Ниже на рисунке приведены, примеры ситуаций, когда при нарушении предположений теоремы, ее утверждение ($Z_\pi \subset Z$) неверно и, тем самым, невозможно восстановить Z на основе функции прибыли.



Не выполнено условие выпуклости

Не выполнено условие свободы расходования

Рисунок 9. Ситуации, когда невозможно восстановить Z.

Таким образом, мы показали, что при определенных условиях множества Z и Z_π совпадают. В общем случае это неверно и выполняется лишь включение $Z \subset Z_\pi$. Максимизация прибыли на Z_π порождает некоторую функцию прибыли $\pi^*(p)$. Возникает вопрос о том, как связаны функции $\pi(p)$ и $\pi^*(p)$.

Покажем, что эти функции совпадают даже в том случае, когда Z и Z_π не совпадают, т.е. Z_π порождает ту же самую функцию прибыли.

Утверждение 11.

Пусть $\pi(p)$ — функция прибыли, построенная на основе технологического множества Z, а $\pi^*(p)$ — функция прибыли, построенная на основе множества Z_π.

Тогда $\pi(p) = \pi^*(p)$.

Доказательство:

Если расширить допустимое множество в задаче максимизации, то значение целевой функции не уменьшится. Поэтому из $Z \subset Z_\pi$ следует, что $\pi(p) \leqslant \pi^*(p)$.

Предположим, что для некоторого $\tilde{\boldsymbol{p}}$ оказалось, что $\pi(\tilde{\boldsymbol{p}}) < \pi^*(\tilde{\boldsymbol{p}})$. По определению $\pi^*(\tilde{\boldsymbol{p}})$ существует $\tilde{\boldsymbol{z}} \in Z_\pi$ такое, что $\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{z}} = \pi^*(\tilde{\boldsymbol{p}})$, и, следовательно, $\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{z}} > \pi(\tilde{\boldsymbol{p}})$. Но существование такого $\tilde{\boldsymbol{z}} \in Z_\pi$ противоречит определению множества Z_π (как множества тех $\boldsymbol{z}$, для которых прибыль $\boldsymbol{pz}$ не больше, чем $\pi(\boldsymbol{p})$).

■

Обсудим теперь первую проблему: как для данной функции $\pi(\boldsymbol{p})$ и функции $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$, определить, являются ли они функцией прибыли и функцией предложения рационального производителя?

Понятно, что необходимыми требованиями к функции прибыли являются ее выпуклость, однородность первой степени и непрерывность. Оказывается, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы произвольная функция $\pi(\boldsymbol{p})$ была функцией прибыли для некоторого технологического множества. В качестве такого множества можно взять рассмотренное выше множество

$$Z_\pi = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{pz} \leqslant \pi(\boldsymbol{p})\ \forall \boldsymbol{p} \geqslant 0\}.$$

Следующий набор утверждений формализует сказанное выше:

(1) Если функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли, то построенная на ее основе функция $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции предложения производителя.

(2) Если функция $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции предложения производителя, то построенная на ее основе функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли.

(3) Если функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли, то существует технологическое множество, порождающее $\pi(\boldsymbol{p})$ как функцию прибыли.

Перечислим упомянутые необходимые условия. Для удобства доказательства потребуем дополнительно, что $\pi(\boldsymbol{p})$ является дважды непрерывно дифференцируемой, а $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ — непрерывно дифференцируемой.

<u>Условия на функцию $\pi(\boldsymbol{p})$</u>:

(**A1**) положительная однородность первой степени;

(**A2**) выпуклость;

(**A3**) $\pi(.)$ дважды непрерывно дифференцируема (более сильное условие, чем требуется).

<u>Условия на функцию $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$</u>:

(**B1**) положительно однородна нулевой степени,

(**B2**) матрица производных $M = \{\partial z_j/\partial p_k\}$ существует и непрерывна, положительно полуопределена и симметрична.

Сформулируем приведенный выше набор неформальных утверждений как теорему.

Утверждение 12.

(1) Пусть

$$z_k(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k},$$

где функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**A1**), (**A2**), (**A3**).

Тогда $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = (z_1(\boldsymbol{p}),...,z_l(\boldsymbol{p}))$ удовлетворяет условиям (**B1**), (**B2**) налагаемым на функцию спроса-предложения производителя.

(2) Пусть функция $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**B1**), (**B2**).

Тогда функция $\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{pz}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**A1**), (**A2**), (**A3**).

(3) Пусть функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**A1**), (**A2**), (**A3**). Тогда множество $Z_\pi = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{pz} \leqslant \pi(\boldsymbol{p})\ \forall\ \boldsymbol{p} \geqslant 0\}$ является технологическим множеством порождающим функцию прибыли $\pi(\boldsymbol{p})$.

Доказательство:

(1) (**A1**)-(**A3**) $\Rightarrow$ (**B1**)-(**B2**).

Поскольку функция $\pi(\boldsymbol{p})$ однородна первой степени, то ее производная $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ однородна нулевой степени.

Непрерывная дифференцируемость $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ следует из дважды непрерывной дифференцируемости функции $\pi(\boldsymbol{p})$.

Матрица вторых производных любой дважды непрерывно дифференцируемой функции симметрична. Применяя это свойство к функции $\pi(\boldsymbol{p})$ имеем,

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial^2\pi}{\partial p_k \partial p_j}.$$

Матрица вторых производных функции $\pi(\boldsymbol{p})$ есть матрица первых производных функции $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$. Поэтому

$$\frac{\partial z_j}{\partial p_k} = \frac{\partial z_k}{\partial p_j}.$$

Положительная полуопределенность матрицы вторых производных (то есть $\boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{x} \geqslant 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$) — необходимый (и достаточный) признак выпуклости любой дважды дифференцируемой функции.

(2) (**B1**)-(**B2**) $\Rightarrow$ (**A1**)-(**A3**).

Продифференцируем $\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{pz}(\boldsymbol{p}) = \sum p_k z_k(\boldsymbol{p})$ по p_k:

$$\frac{\partial\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = z_k(\boldsymbol{p}) + \sum_{i=1}^{l} p_i \frac{\partial z_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = z_k(\boldsymbol{p}) + \sum_{i=1}^{l} p_i \frac{\partial z_k(\boldsymbol{p})}{\partial p_i}.$$

Второе равенство - следствие симметричности производных функции $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$. Так как $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ — положительно однородна нулевой степени, то по закону Эйлера

$$\sum_{i=1}^{l} p_i \frac{\partial z_k(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = z_k(\boldsymbol{p}).$$

Далее воспроизводим доказательство пункта **(1)** в обратном порядке.

(3)

Обозначим

$$z(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial \pi(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}} = \nabla\pi(\boldsymbol{p}).$$

Так как $\pi(\boldsymbol{p})$ — однородная первой степени функция и $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ — ее градиент, то по закону Эйлера

$$\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p}).$$

Поскольку $\boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p}) = \pi(\boldsymbol{p})$, то в точке $z(\boldsymbol{p})$ при данных ценах $\boldsymbol{p}$ величина $\boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p})$ всегда не меньше, чем $\boldsymbol{p}z$ в любой точке $z \in Z_\pi$. Если мы докажем, что при любых ценах $\boldsymbol{p} \geqslant 0$ точка $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ принадлежит множеству $Z_\pi = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{p}'\boldsymbol{z} \leqslant \pi(\boldsymbol{p}') \ \forall\ \boldsymbol{p}' \geqslant 0\}$, то тем самым мы докажем, что $\pi(\boldsymbol{p})$ есть функция прибыли, соответствующая технологическому множеству Z_π.

То есть нам требуется показать, что $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) \leqslant \pi(\boldsymbol{p}')\ \forall\ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}' \geqslant 0$.

График всякой выпуклой непрерывно дифференцируемой функция $\psi(\boldsymbol{x})$ лежит выше своей касательной, т.е. выполняется соотношение:

$$\psi(\boldsymbol{x}') \geqslant \psi(\boldsymbol{x}) + \nabla\,\psi(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}).$$

Так как $\pi(\boldsymbol{p})$ — выпуклая непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\pi(\boldsymbol{p}') \geqslant \pi(\boldsymbol{p}) + \nabla\pi(\boldsymbol{p})\,(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}).$$

Поскольку $\nabla\pi(\boldsymbol{p}) = z(\boldsymbol{p})$ и $\boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p}) = \pi(\boldsymbol{p})$, получаем требуемое для доказательства утверждения соотношение

$$\pi(\boldsymbol{p}') \geqslant \pi(\boldsymbol{p}) + z(\boldsymbol{p})\,(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}) = z(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{p}'.$$

■

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Известно, что при ценах (1, 2) производитель выбрал вектор выпуска (1, –1), а при ценах (2, 1) — вектор выпуска (–1, 1). Совместимо ли это с максимизацией прибыли?

2. Известно, что при ценах (3, 2) производитель выбрал вектор выпуска (2, –1), а при ценах (2, 3) — вектор выпуска (1, –2). Совместимо ли это с максимизацией прибыли?

3. Известно, что при ценах (1, 4) производитель выбрал вектор выпуска (–4, 3), при ценах (1, 1) — вектор выпуска (0, 0), а при ценах (2, 1) — вектор выпуска (3, –4). Можно ли гарантировать, что вектор выпуска (–1, 2) не принадлежит множеству допустимых технологий?

4. Известно, что при ценах (1, 4) производитель выбрал вектор выпуска (–4, 3), при ценах (1, 1) — вектор выпуска (0, 0), а при ценах (2, 1) — вектор выпуска (3, –4). Можно ли гарантировать, что вектор выпуска (–9, 4) не принадлежит множеству допустимых технологий?

5. Сформулируйте аксиому выявленных предпочтений для модели производителя. Докажите, что если технологическое множество описывается строго вогнутой производственной функцией, то выбор производителя удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений.

6. Покажите, что выполняется соотношение $\Delta p_y\, \Delta y - \Delta \boldsymbol{w}\, \Delta \boldsymbol{x} \geqslant 0$.

7. Известно, что спрос потребителя удовлетворяет закону спроса только в случае благ, не являющихся товарами Гиффена, а спрос на факторы производства удовлетворяет закону спроса всегда. Какие особенно моделей рационального поведения производителя и потребителя предопределяют такие особенности их поведения?

8. Пусть функция прибыли производителя имеет вид

$$\pi(\boldsymbol{p}) = p_1(\ln\frac{p_1}{p_2} - 1) + p_2.$$

Проверьте, что эта функция удовлетворяет свойствам функции прибыли. Восстановите по функции прибыли соответствующее ей технологическое множество.

9. Пусть функция прибыли производителя имеет вид

$$\pi(p_y,\boldsymbol{w}) = p_y^{\frac{1}{1-\alpha}} (\frac{\alpha}{\boldsymbol{w}})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \boldsymbol{w}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (p_y\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Проверьте, что эта функция удовлетворяет свойствам функции прибыли. Найдите функцию спроса. Восстановите по функции прибыли соответствующее ей технологическое множество.

1.4. Функция издержек и ее свойства

Итак, мы изучили основные свойства модели рационального поведения производителя. По причинам, которые станут ясны из дальнейшего, в микроэкономике утвердилась традиция описывать технологию посредством функции издержек. В этим параграфе приведем соответствующие результаты относительно свойств функций издержек и связь этого понятия с рассмотренными выше.

Пусть, как и ранее, $\boldsymbol{y}$ — вектор выпуска, а $\boldsymbol{x}$ — вектор затрат на ее производство.

Определение 4.

Для каждого вектора выпуска $\boldsymbol{y}$ множество требуемых затрат $V(\boldsymbol{y})$ — это множество векторов затрат, обеспечивающих этот выпуск при данном технологическом множестве Z, т.е.

$$V(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x} \mid (-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in Z\}.$$

Из предполагаемых свойств Z вытекают некоторые свойства множества $V(\boldsymbol{y})$ и соответствующего отображения $V(.)$:

1. Из выпуклости Z следует выпуклость множеств $V(\boldsymbol{y})$:

2. Из свободы расходования для Z следует свобода расходования для множеств $V(\boldsymbol{y})$:

$$\boldsymbol{x} \in V(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{x}' \geqslant \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x}' \in V(\boldsymbol{y}).$$

Заметим, что обратное, вообще говоря, неверно.

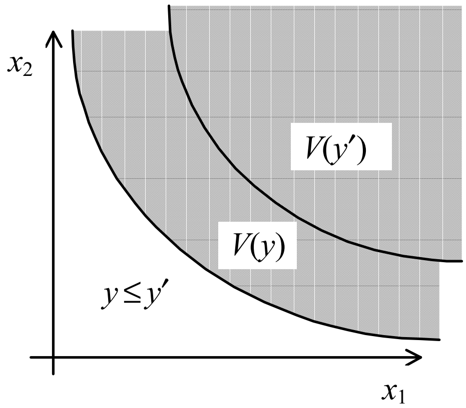


Рисунок 10. Монотонность V(.)

Обычно предполагается монотонность отображения $V(.)$, т. е. вложенность множеств $V(.)$:

$$\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{y}' \Rightarrow V(\boldsymbol{y}') \subset V(\boldsymbol{y}).$$

Множества $V(y)$, как и Z, в предположении свободного расходования можно строить по производственной функции:

$$V(y) = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \geqslant y\}.$$

Обратно, в случае однопродуктовой технологии ($y \in \mathbb{R}$), можно определить на основе $V(.)$ производственную функцию следующим образом:

$$f(\boldsymbol{x}) = \max y_{\ \boldsymbol{x} \in V(y)}.$$

Утверждение 13.

Если отображение $V(.)$ монотонно, то соответствующая производственная функция монотонна, а если к тому же множества $V(y)$ выпуклы, то она квазивогнута.

Доказательство:

Доказательство этого утверждения оставляется читателю в качестве упражнения. ■

В терминах множеств $V(y)$ можно определить **изокванты** для данной технологии

$$Q(y) = \{\ \boldsymbol{x} \in V(y) \ \mid\ \boldsymbol{x} \notin V(y'),\quad \forall\ y' > y\ \}.$$

Это множество таких векторов затрат $\boldsymbol{x}$, которые позволяют произвести y, но не позволяют произвести больше y. Таким образом, изокванта $Q(y)$ — это граница множества $V(y)$.

Например, для производственной функции Кобба-Дугласа с двумя видами затрат имеем

$$Z=\{(-x_1,-x_2,y) \mid y \leqslant x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}\}$$
$$V(y)=\{(x_1,x_2) \mid y \leqslant x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}\}$$
$$Q(y)=\{(x_1,x_2) \mid y = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}\}$$

Напомним, что через $\boldsymbol{w}$ мы обозначаем цены затрачиваемых ресурсов (часть общего вектора цен $\boldsymbol{p}$, соответствующая $-\boldsymbol{x}$).

По аналогии с Задачей 3 рассмотрим следующую задачу

Задача 4.

$$\boldsymbol{wx} \to \min$$
$$\boldsymbol{x} \in V(\boldsymbol{y}).$$

Определение 5.

Функция издержек $c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ — значение целевой функции Задачи 4 — для каждого вектора цен $\boldsymbol{w}$ и выпуска $\boldsymbol{y}$ указывает минимальную величину издержек, при которых в соответствие с данной технологией можно произвести $\boldsymbol{y}$.

Если технология задана производственной функцией $y \leqslant f(\boldsymbol{x})$, то Задача 4 примет вид:

$$\boldsymbol{wx} \to \min$$
$$y = f(\boldsymbol{x}).$$

Утверждение 14. **(Свойства функции издержек $c(w, y)$ выпуклой технологии)**

1) $c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ положительно однородна первой степени по ценам факторов:

$$c(\lambda\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) = \lambda\, c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}).$$

2) Монотонна по ценам факторов и выпуску.

3) Вогнута по ценам (поточечный максимум вогнутых функций).

4) Непрерывна.

Доказательство:

Доказательство этого утверждения аналогично приводимым ранее и оставляется читателю в качестве упражнения.

■

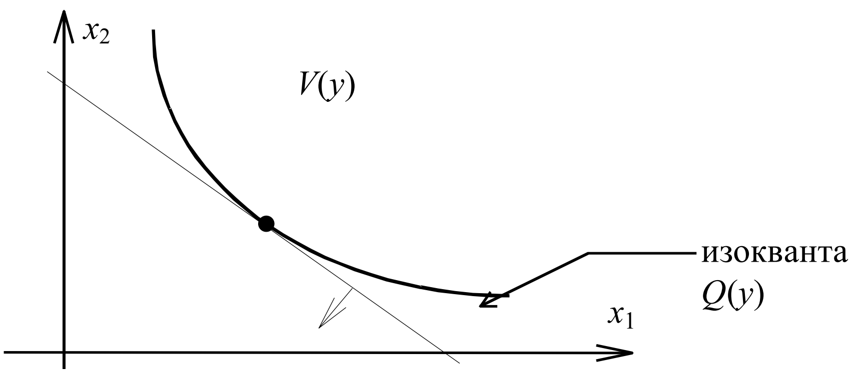


Рисунок 11. Построение функции издержек

В дальнейшем нам понадобится также понятие функции условного спроса.

Определение 6.

Функция условного спроса на факторы производства $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ есть оптимальное решение Задачи 4.

Заметим, что функция издержек и функция условного спроса на факторы производства определены для любой технологии (непустого замкнутого множества Z).

Утверждение 15. (Свойства функции $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$)

1) Функция $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ однородна нулевой степени как функция цен факторов производства.

2) Если множество $V(\boldsymbol{y})$ строго выпукло, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ — однозначная непрерывная функция $\boldsymbol{w}$.

Доказательство:

Доказательство этого утверждения аналогично приводимым ранее и оставляется читателю в качестве упражнения.

■

Если кроме того функция издержек дифференцируема, то верна **лемма Шеппарда**:

Утверждение 16.

Пусть $\boldsymbol{x}^*$ — вектор условного спроса на факторы производства при ценах $\boldsymbol{w}^*$, когда требуется произвести $\boldsymbol{y}$. Тогда

$$\frac{\partial c(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{y})}{\partial w_i} = x_i(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{y}) = x_i^*.$$

или

$$\nabla c(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^*,$$

Доказательство:

Введем функцию $g(\boldsymbol{w}) = c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^*$.

По определению функции издержек функция $g(\boldsymbol{w})$ достигает максимума в точке $\boldsymbol{w}^*$:

$$g(\boldsymbol{w}) \leqslant 0.$$
$$g(\boldsymbol{w}^*) = 0.$$

Если функция издержек дифференцируема, то g тоже дифференцируема. Если точка оптимума внутренняя ($\boldsymbol{w}^*>0$), то по условию первого порядка максимума градиент ее должен быть равен нулю:

$$\nabla g(\boldsymbol{w}^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla c(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^*.$$

■

Построим по функции издержек $c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ при некотором фиксированном объеме производства следующее множество:

$$V_c(\boldsymbol{y}):=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{w}\boldsymbol{x} \geqslant c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) \ \forall \boldsymbol{w}\geqslant 0\}.$$

При любом векторе выпуска $\boldsymbol{y}$ это множество является выпуклым по построению. Так как цены неотрицательны, то выполняется также следующее свойство, которое можно называть свойством свободы расходования ресурсов:

$$V_c(\boldsymbol{y}) = V_c(\boldsymbol{y}) + \mathbb{R}^n_+, \qquad (*)$$

т.е. если $\boldsymbol{x}$ принадлежит множеству $V_c(\boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{x}' \geqslant \boldsymbol{x}$, то $\boldsymbol{x}'$ также принадлежит множеству $V_c(\boldsymbol{y})$.

Ясно, что множество требуемых затрат $V(\boldsymbol{y})$ и $V_c(\boldsymbol{y})$ могут не совпадать, если само исходное множество допустимых затрат $V(\boldsymbol{y})$ не является выпуклым или монотонным.

Утверждение 17.
Пусть $V(\boldsymbol{y})$ выпуклое и монотонное (удовлетворяющее свойству (*)) множество. Тогда $V(\boldsymbol{y}) = V_c(\boldsymbol{y})$.

Доказательство:
Доказательство этого утверждения оставляется читателю в качестве упражнения.
■

Отметим, что даже если множества $V(\boldsymbol{y})$ и $V_c(\boldsymbol{y})$ не совпадают друг с другом, это различие не существенно с точки зрения описания поведения производителя, поскольку $V_c(\boldsymbol{y})$ порождает ту же самую функцию издержек, что и $V(\boldsymbol{y})$.

Утверждение 18.
Пусть $c^*(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$ — решение задачи

$$\boldsymbol{wx} \to \min_{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{x} \in V_c(\boldsymbol{y}).$$

Тогда $c^*(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$.

Доказательство:
Доказательство этого утверждения оставляется читателю в качестве упражнения.
■

Заметим, что два эти утверждения — аналоги соответствующих результатов относительно связи Z и Z_π, $\pi(\mathrm{p})$ и $\pi^*(\mathrm{p})$.

Это утверждение обосновывает возможность получения *некоторого* множества допустимых затрат $V_c(\boldsymbol{y})$, порождающего функцию издержек $c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$. Но совпадение $V_c(\boldsymbol{y})$ и $V(\boldsymbol{y})$ возможно только в том случае, когда $V(\boldsymbol{y})$ удовлетворяет предположениям выпуклости и монотонности. Практический способ восстановления V читатель может сконструировать сам.

В заключение укажем на связь между двумя типами кривых: изоквантами в пространстве возможных издержек, определяемыми уравнениями типа $f(\boldsymbol{x}) = y$ при разных y и изокостами в пространстве возможных цен, определяемыми формулами типа $c(\boldsymbol{w},y)=const$.

Для наглядности рассмотрим случай двух производственных факторов. Тогда при монотонной технологии можно рассматривать изокванту как функцию $x_2(x_1)$, а изокосту — как функцию $w_2(w_1)$. Эти зависимости задаются соответствующими соотношениями, определяющими их как неявные функции.

Из определения изокосты имеем

$$c(w_1+dw_1,\ w_2+dw_2,\ y) = c(w_1,\ w_2,\ y) \text{ или}$$

$$dw_1\frac{\partial c}{\partial w_1} + dw_2\frac{\partial c}{\partial w_2} = 0$$

Тогда

$$\frac{dw_2}{dw_1} = -\frac{\dfrac{\partial c}{\partial w_1}(\boldsymbol{w},y)}{\dfrac{\partial c}{\partial w_2}(\boldsymbol{w},y)} = -\frac{x_1(\boldsymbol{w},y)}{x_2(\boldsymbol{w},y)} = -\frac{x_1^*}{x_2^*}$$

Аналогично получим соотношение для изокванты

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}} = -\frac{w_1}{w_2}.$$

Эти соотношения двойственности показывают, что чем больше кривизна изокосты, тем меньше кривизна изокванты, и наоборот. Действительно, на графиках видно, что если две точки, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ и $\bar{\boldsymbol{x}}$ одного графика далеки друг от друга, а их касательные близки (малая кривизна, то есть сильная взаимозаменяемость затрат в производстве), то в двойственном графике соответствующие точки $\bar{\boldsymbol{w}}$, $\tilde{\boldsymbol{w}}$ будут характеризоваться, наоборот, близким положением, но сильно отличающимися касательными.

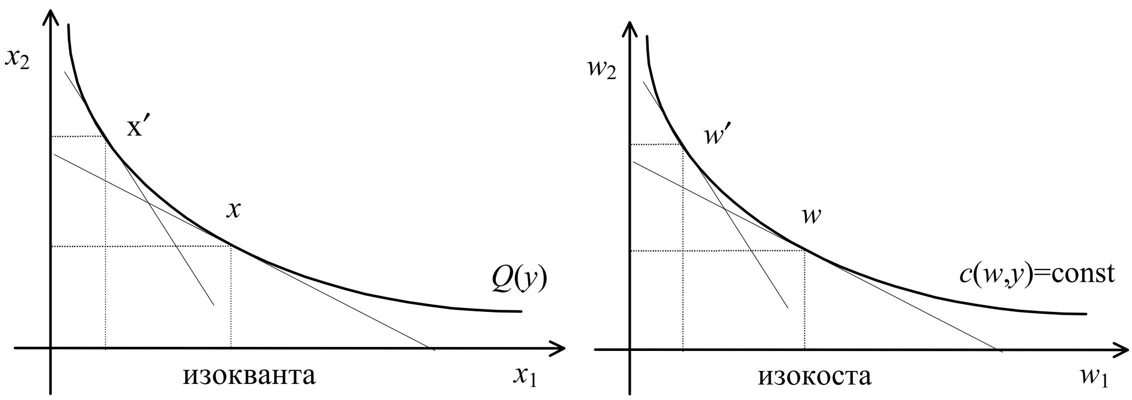
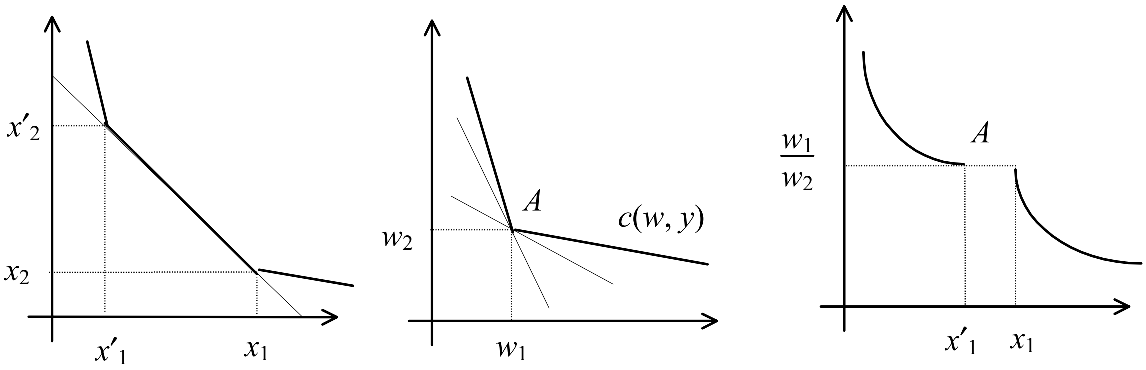


Рисунок 12

При полной взаимозаменяемости затрат любой структуре затрат соответствует одна и та же структура цен (см. рис ниже). Таким образом, структура цен не определяет однозначно структуру затрат.



В любой точке отрезка производная одна и та же

Множество производных одной точке

Кривая спроса

Рисунок 13

И наоборот, если затраты жестко взаимодополняемы, то цены, при которых эти затраты минимизирую издержки, определяются неоднозначно.

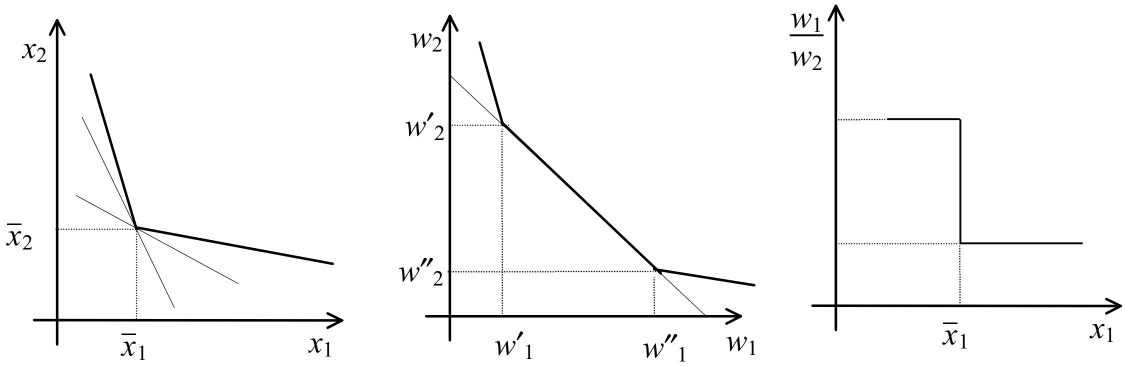


Рисунок 14. Ситуация, обратная предыдущей

Еще один «нерегулярный» случай— невыпуклость IRS — иллюстрирует нижеследующий рисунок.

При разных векторах цен $\boldsymbol{w}$ один и тот же $\boldsymbol{x}$.

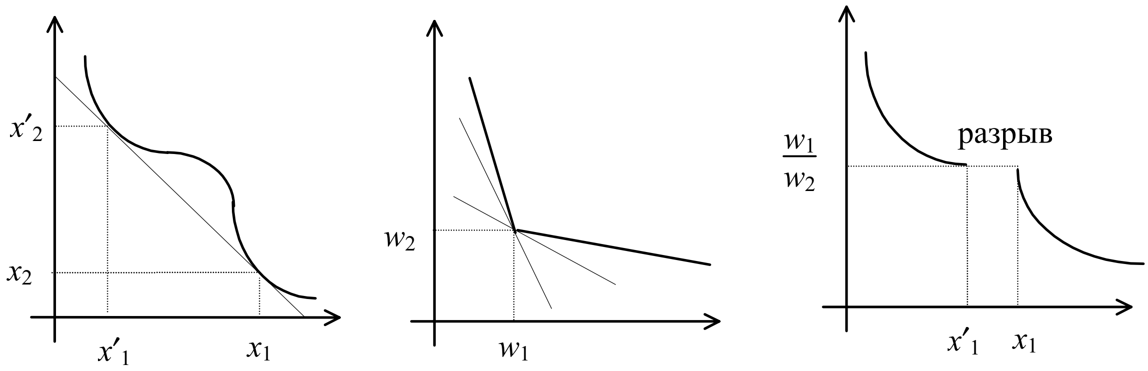


Рисунок 15. Изокванта не является выпуклой функцией

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Функция c(y,$\mathbf{w}$)= $y^{1/2}(w_1w_2)^{3/4}$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Да
♦ Нет
♦ Недостаточно информации

2. Функция c(y,$\mathbf{w}$)= $(y + 1/y)(w_1w_2)^{1/2}$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Да
♦ Нет
♦ Недостаточно информации

3. Функция c(y,$\mathbf{w}$)= $y(w_1 - (w_1w_2)^{1/2} + w_2)$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Да
♦ Нет
♦ Недостаточно информации

4. Функция c(y,$\mathbf{w}$)= $y(w_1 + w_2)$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Да
♦ Нет
♦ Недостаточно информации

5. Функция c(y,$\mathbf{w}$)= y min$\{w_1, w_2\}$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Да
♦ Нет
♦ Недостаточно информации

6. Функция $c(y,\boldsymbol{w})= y(a\ w_1 + b\ w_2)$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ При положительных коэффициентах a и b

♦ Если a равно b

♦ При любых коэффициентах a и b данная функция не является функцией издержек для некоторой технологии

7. Функция $c(y,\boldsymbol{w})= y\ \min\{a\ w_1,\ b\ w_2\}$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ При положительных коэффициентах a и b

♦ Если a равно b

♦ При любых коэффициентах a и b данная функция не является функцией издержек для некоторой технологии

8. Функция $c(y,\boldsymbol{w})= y\ w_1^a\ w_2^b$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Если сумма $a+b$ меньше или равна единицы

♦ При положительных коэффициентах a и b и если сумма $a+b$ меньше или равна единице

♦ При положительных коэффициентах a и b и если сумма $a+b$ больше единицы

9. Множество требуемых ресурсов на производство объема y задается неравенством

$$ax_1 + bx_2 \geqslant y^2 \text{ при } a,b>0.$$

Какой вид имеет соответствующая производственная функция?

10. Найдите функции издержек для следующих производственных функций:

а. $f(\boldsymbol{x}) = \prod x_i^{\alpha_i},\ \alpha_i > 0.$

б. $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{\rho}$

в. $f(\boldsymbol{x}) = \min\{x_i/a_i\}$

г. $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$

11. Предположим, что предприятие имеет строго вогнутую производственную функцию $f(\boldsymbol{x})$. Рассмотрим следующие две задачи:

$$\boldsymbol{wx} \to \min_{\boldsymbol{x}} \qquad\qquad f(\boldsymbol{x}) \to \max_{\boldsymbol{x}}$$
$$y^* \leqslant f(\boldsymbol{x}) \qquad\qquad \boldsymbol{wx} \leqslant c^*$$

Докажите следующие два утверждения:

I. Пусть $\boldsymbol{x}^*$ является решением первой задачи. Тогда $\boldsymbol{x}^*$ является решением второй задачи при $c^* = \boldsymbol{wx}^*$.

II. Пусть $\boldsymbol{x}^*$ является решением второй задачи. Тогда $\boldsymbol{x}^*$ является решением первой задачи при $y^* = f(\boldsymbol{x}^*)$.

12. Предположим, что предприятие со строго вогнутой производственной функцией $f(\boldsymbol{x})$ имеет функцию издержек $c(\boldsymbol{w}, y)$. Докажите, что оптимальный объем производство в следующих двух задачах совпадает

$$p_y y - \boldsymbol{wx} \to \max_{y,\, \boldsymbol{x}} \qquad\qquad p_y y - c(\boldsymbol{w}, y) \to \max_{\boldsymbol{x}}$$
$$y \leqslant f(\boldsymbol{x})$$

13. Доказать, что если функция издержек выпукла, то производителю выгоднее производить продукцию, чем закрыться (производить нулевой объем).

14. Докажите Утверждение **13**.

15. Докажите Утверждение **14**.

16. Докажите Утверждение **15**.

17. Докажите Утверждение **17**.

18. Докажите Утверждение **18**.

19. Пусть функция издержек строго вогнута, и, кроме того, C(0) = 0. Докажите, что данная функция издержек была порождена производственной функцией, которая в точках оптимального выбора производителя характеризуется возрастающей отдачей от масштаба.

20. Для технологии, описываемой производственной функцией $f(\boldsymbol{x}) = x^{\alpha}$, вычислите функцию издержек. Покажите, что функция издержек однородна по цене фактора производства и выпукла по выпуску (y).

21. Показать, что если производственная функция квазивогнута и обладает постоянной отдачей от масштаба, то функция предельных издержек не убывает по выпуску.

22. Множество требуемых ресурсов на производство объема y задается неравенством

$$ax_1 + \mathrm{b}x_2 \geqslant y^2 \text{ при } a,\mathrm{b}>0.$$

Постройте функцию издержек.

23. Покажите, что издержки фирмы возрастут, если цены на все выпускаемые ею продукты увеличатся пропорционально.

24. Предположим, что производственная функция строго вогнута. Покажите, что функция издержек выпукла и строго выпукла, если хотя бы один фактор производства является переменным (т.е. в краткосрочном, среднесрочном и долгосрочном периоде).

25. Фирма имеет n заводов, издержки производства на которых описываются следующими функциями $c_i(y) = \alpha_i y^2$, i=1,...,n. Определите функцию издержек фирмы.

26. Фирма имеет два завода, издержки производства на которых описываются следующими функциями $c_1(y) = \alpha y^2$, $c_2(y) = \beta y$. Определите функцию издержек фирмы.