Олигополия

Олигополией называют ситуацию, когда на рынке несколько производителей, и каждый из них может влиять на цену. Если производителей двое, то такую олигополию называют **дуополией**.

В отличие от моделей монополии, где рассматривается принятие решений единственной фирмой — монополией, в моделях олигополии рассматривается принятие решений сразу несколькими экономическими агентами — олигополистами, причем результат функционирования каждого из них зависит не только от предпринимаемых им самим действий, но и от действий его конкурентов.[72] Таким образом мы сталкиваемся здесь с феноменом так называемого стратегического поведения — предмета теории игр. В связи с этим практически все модели олигополии представляют собой игры различного рода, и моделирование олигополистических рынков в существенной степени использует аппарат теории игр.

Мы будем предполагать здесь, если не оговорено иное, что общая структура олигополистической отрасли (технология, количество производителей, тип конкуренции и т.д.) заданы экзогенно. Логически возможны разные гипотезы о поведении участников олигополии. Участники могут демонстрировать либо некооперативное, либо кооперативное поведение (сговор, картель). Поэтому типы некооперативного поведения можно классифицировать по следующим признакам:

(I) Одновременное принятие решений.

(II) Последовательное принятие решений. Традиционно рассматриваемый — один из участников лидер, остальные подстраиваются к его решению. Возможны и более сложные цепочки ходов.

Нас прежде всего интересует некооперативное поведение олигополистов, хотя попутно мы будем рассматривать и кооперативное поведение (картель). Для каждой из этих гипотез о последовательности принятия решений можно, кроме того, предполагать, что стратегии всех участников (при одновременном принятии решений) или лидера (при последовательном принятии решений) сводятся к назначению либо цен, либо объемов выпуска. Таким образом, получаем четыре типа некооперативного поведения (см. Таблицу 22).

[72] Нужно оговориться, что модели монополии, особенно модели дискриминации, все же включают в себя некоторые элементы теории игр, поскольку кроме решений монополиста рассматривается также реакция на них потребителей.

Таблица 22

	Одновременно	Последовательно
Количество	Модель Курно	Модель Штакельберга
Цена	Модель Бертрана	Ценовое лидерство

В дальнейшем будем считать, что некоторую однородную продукцию производят n фирм, технологии которых представлены возрастающими функциями издержек $c_j(y_j)$, $j = 1, \ldots, n$, а спрос на продукцию задается убывающей обратной функцией спроса $p(Y)$. Областью определения для выпусков y_j везде будем считать $[0, +\infty)$. Кроме того в дальнейшем мы не будем учитывать требование неотрицательности прибыли отдельного олигополиста. Под равновесием совершенной конкуренции будем понимать такое равновесие, которое установилось бы, если бы производители игнорировали влияние своего объема выпуска на цену.[73]

1. Модель Курно

В модели Курно производители принимают решение относительно объемов производства и принимают эти решения одновременно, исходя из своих предположений о решениях, принятых другими (их конкурентами).

Пусть y^e_{ji} — ожидаемый (производителем j) объем производства производителя i, $\boldsymbol{y}^e_{-j}$ — составленный из этих ожиданий вектор $(y^e_{j1}, \ldots, y^e_{j,j-1}, y^e_{j,j+1}, \ldots, y^e_{jn})$. Тогда при выпуске y_j его (ожидаемая) прибыль составит величину $\Pi^e_j(y_j, \boldsymbol{y}^e_{-j}) = p(y_j + \sum_{i\neq j} y^e_{ji}) \cdot y_j - c_j(y_j)$. Выпуск, максимизирующий прибыль при ограничении $y_j \geqslant 0$, зависит, таким образом, от ожидаемого объема производства других производителей. Если ожидаемые объемы производства совпадают с фактическими, то такое состояние можно назвать равновесием олигополии. Описанное понятие равновесия было введено в

[73] То есть, были бы, пользуясь английским термином, price-taker'ами.

прошлом веке французом Антуаном Огюстеном Курно.[74] Это равновесие часто называют **равновесием Курно**. Следует отметить, однако, что было бы точнее говорить о *равновесии Нэша в модели Курно*.[75]

Определение 14.

Равновесие Курно — это совокупность выпусков $(y_1^*, \dots, y_n^*)$ и ожиданий $(\boldsymbol{y}_{-1}^e, \dots, \boldsymbol{y}_{-n}^e)$, таких что выпуск любого производителя, y_j^*, максимизирует его прибыль на $[0, +\infty)$ при ожиданиях $\boldsymbol{y}_{-j}^e$, и ожидания всех производителей оправдываются, т.е. $\boldsymbol{y}_{-j}^e = \boldsymbol{y}_{-j}^*$, $j = 1, \dots, n$.

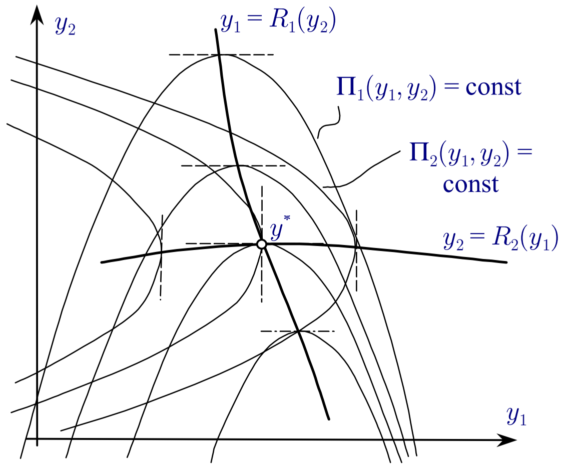


Рисунок 57

Другими словами, y_j^* является решением задачи

$$\Pi_j(y_j) = p(y_j + \sum_{i \neq j} y_i^*) \cdot y_j - c_j(y_j) \to max_{y_j \geqslant 0}.$$

Зависимость оптимального объема производства y_j от $\sum_{i \neq j} y_i^e$ называют функцией отклика, если решение задачи единственно

[74] Cournot, A. A. (1838), «Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses».

[75] Часто равновесие в рассмотренной модели называют также равновесием по Нэшу-Курно.

(отображением отклика в общем случае). Будем обозначать ее через $R_j(Y_{-j})$, где $Y_{-j} = \sum_{i \neq j} y_i$ — (ожидаемый) суммарный объем производства блага всеми другими производителями. Если оптимальный отклик однозначен, то равновесие Курно $(y_1^*, \dots, y_n^*)$ является решением следующей системы уравнений:[76]

$$y_j^* = R_j(\sum_{i \neq j} y_i^*), \; j = 1, \dots, n.$$

Пусть $(y_1^*, \dots, y_n^*)$ — равновесие Курно. Тогда выполняются следующие соотношения (условия первого порядка):

$$\Pi_j'(y_j^*) = p(Y^*) + p'(Y^*) \cdot y_j^* - c_j'(y_j^*) \leqslant 0,$$

где $Y^* = \sum_{i=1}^n y_i^*$, причем

$$\Pi_j'(y_j^*) = 0, \quad \text{если } y_j^* > 0.$$

Данные соотношения — необходимые условия первого порядка, представляют дифференциальную характеристику равновесия Курно.

Проиллюстрируем с помощью графика равновесие Курно для случая двух фирм (дуополии) (Рис. 57). На рисунке изображены кривые постоянной прибыли ($\Pi_1(y_1,y_2) = const$ и $\Pi_2(y_1,y_2) = const$) и кривые отклика ($y_1 = R_1(y_2)$ и $y_2 = R_2(y_1)$), которые можно определить как множество точек, где касательные к кривым равной прибыли параллельны соответствующим осям координат. Точка пересечения кривых отклика является равновесием Нэша-Курно ($\boldsymbol{y}^*$).

Свойства равновесия Курно в случае постоянных и одинаковых предельных издержек

Проведем анализ модели Курно в упрощенном варианте, предположив, что предельные издержки постоянны и совпадают у всех производителей, т.е. $c_j'(y_j) = c$. Кроме того будем предполагать выполнение условий:

(C_1) $p(0) > c$,

(C_2) существует $\tilde{Y}$, такой что $p(\tilde{Y}) < c$,

[76] Если отклики неоднозначны, то нужно решить аналогичную систему включений.

(C_3) функция $p(\cdot)$ дифференцируема и $p'(y) < 0\ \forall y > 0$.

Симметричность равновесия и положительность выпусков

Докажем, что объемы производства у всех олигополистов совпадают. Пусть это не так, и существуют два производителя, j и k, такие что $y_j^* > y_k^*$. Запишем условия первого порядка, учитывая, что выпуск y_j^* положителен, а y_k^* может быть равен нулю:

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\cdot y_j^* - c\ = 0$$

и

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\cdot y_k^* - c\ \leqslant 0.$$

Вычитая из второго неравенства первое, получим

$$p'(Y^*)\,(y_k^* - y_j^*)\ \leqslant 0.$$

Поскольку $p'(Y^*) < 0$, то $y_k^* \geqslant y_j^*$. Получили противоречие. Таким образом, объем производства у каждой фирмы в равновесии Курно одинаков: $y_j^* = \dfrac{Y^*}{n}\ \forall j = 1, \ldots, n$,

а условия первого порядка совпадают и приобретают вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c\ \leqslant 0,$$

причем неравенство заменяется на равенство, если суммарный выпуск Y^* положителен.

Если $p(0) > c$, то в равновесии Курно суммарный выпуск не может быть нулевым, поскольку, подставляя $Y^* = 0$ в условия первого порядка, получаем

$$p(0) - c\ \leqslant 0.$$

Существование и единственность равновесия

Таким образом, при $p(0) > c$, выпуск общий положителен и условия первого порядка имеют вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c\ = 0,$$

Заметим, что существование корня этого уравнения можно гарантировать, если выполнены условия C_1–C_3 и, кроме того, функция $p(\cdot)$ *непрерывно* дифференцируема, поскольку в этих условиях непрерывная функция $p(Y) + p'(Y)\dfrac{Y}{n} - c$ принимает значения разных знаков на концах интервала $[0, \tilde{Y}\,]$.

Если дополнительно потребовать, чтобы функция $p(y + y')\cdot y$ была вогнута по y при любом $y' \geqslant 0$, то можно утверждать, что $\left(\dfrac{Y^*}{n}, \ldots, \dfrac{Y^*}{n}\right)$ — равновесие Курно (выполнено условие второго порядка).

Заметим при этом, что поскольку при сделанном предположении функция $p(y)\,y$ вогнута, то равновесие Курно единственно, поскольку условие первого порядка выполнено в одной точке.

Действительно, функцию $p(Y) + p'(Y)\dfrac{Y}{n} - c$ можно представить в виде

$$\frac{1}{n}[p(Y) + p'(Y)Y] + p(Y)\frac{n-1}{n} - c.$$

Первое слагаемое здесь не возрастает, а второе убывает при $n > 1$, поэтому функция $p(Y) + p'(Y)\dfrac{Y}{n} - c$ убывает и может быть равной нулю не более чем в одной точке.

В точке $Y = 0$ (в которой условие первого порядка может не выполняться как равенство) равновесия быть не может, поскольку, как мы предположили, $p(0) > c$.

Сравнение равновесия Курно с равновесиями при монополии и совершенной конкуренции

Следует отметить три характеристики равновесия Курно:

1. Объем выпуска Y^* в равновесии Курно выше, чем объем выпуска $y^{м}$ при монополии (или картеле, когда производители выбирают выпуск, максимизирующий суммарную прибыль).

2. Объем выпуска Y^* в равновесии по Курно ниже, чем объем выпуска $\bar{Y}$ в условиях совершенной конкуренции (ситуации, когда производители рассматривают цены как данные).

3. При росте числа участников объем выпуска в равновесии Курно приближается к равновесию при совершенной конкуренции.

Теорема 22.
Пусть $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ — равновесие Курно, и $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ — равновесие при совершенной конкуренции, $y^{м}$ — равновесие при монополии.[77] Предположим, что выполнены условия C_1–C_3. Тогда

[77] Как нетрудно показать, тот же самый объем производства будет выбран, если олигополисты образуют картель (см. ниже).

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i > Y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^* > y^{M}$$

Доказательство.

Как было показано выше, равновесие Курно удовлетворяет условию

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c = 0.$$

Как было доказано в главе о монополии, выполнение C_1–C_3 гарантирует, что $y^M > 0$, поэтому y^M удовлетворяет условию первого порядка

$$p(y^M) + p'(y^M)y^M - c = 0.$$

С другой стороны, при совершенной конкуренции, как известно, цена равна предельным издержкам:

$$p(\bar{Y}) - c = 0.$$

Вычитая из третьего соотношения первое, получим

$$p(\bar{Y}) - p(Y^*) = p'(Y^*)\frac{Y^*}{n}.$$

Поскольку правая часть соотношения отрицательна, а функция $p(\cdot)$ убывает, то

$$Y^* > \bar{Y}.$$

Предположим, что $y^M > Y^*$. Тогда увеличение выпуска одного из производителей (например, первого) на величину $Y^* - y^M$ приводит к росту суммарной прибыли (до монопольно высокой). Поскольку при этом прибыль остальных производителей может только уменьшиться, прибыль первого возрастает, что противоречит предположению о том, что Y^* — совокупный выпуск в равновесии Курно. ■

Рост выпуска с ростом числа участников

Теорема 23.
Предположим, что выполнены условия C_1–C_3 и, кроме того, функция $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Пусть Y_n^* — суммарный выпуск в равновесие Курно с n участниками. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} Y_n^* = \bar{Y}.$$

Доказательство.

Для любого Y_n^* выполняются соотношения (условия первого порядка)

$$p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n} - c = 0.$$

Предыдущая теорема гарантирует ограниченность последовательности Y_n^* ($Y_n^* \in (0, \bar{Y})$). Так как функция $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, то из этого следует ограниченность $p'(Y_n^*)Y_n^*$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}[p'(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n}] = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} p(Y_n^*) = c. \quad ■$$

Свойства равновесия Курно в случае функций издержек общего вида

Вышеприведенные результаты получены при достаточно сильном предположении о функции издержек. Ниже будут приведены естественные обобщения полученных результатов при отказе от этого предположения.

Существование равновесия

Прежде обсудим условия на функции издержек и функции спроса, при которых равновесие Курно существует.

Теорема 24.
Предположим, что в модели Курно выполнены следующие условия:
1) функции издержек $c_j(y)$ дифференцируемы при всех возможных объемах выпуска (неотрицательных y),
2) обратная функция спроса $p(y)$ непрерывна и убывает при всех неотрицательных y,
3) функция $p(y + y')\cdot y$ вогнута по y при любом $y' \geq 0$,
4) функции издержек $c_j(y)$ выпуклы (функции предельных издержек не убывают)[78],

[78] Обычно условия 3) и 4) теоремы существования заменяют следующие условия Хана: $p'(Y) + p''(Y)\,y_j < 0$ и $p'(Y) - c_j''(y_j) < 0\ \forall\, j, Y, y_j$ (Hahn, F. (1962) "The Stability of the Cournot Oligopoly Solution," *Review of Economic Studies*, **29**, 329-31). Заметим, что они также гарантирует строгую

5) существуют $\tilde{y}_j > 0$ $j = 1, \ldots, n$ такие, что $p(y_j) < c'_j(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$.

Тогда равновесие Курно $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ существует, причем $0 \leqslant y_j^* < \tilde{y}_j \; \forall j$.[79]

Доказательство.

Доказательство оставляется в качестве упражнения. Ниже приводится возможная схема такого доказательства.

1) Докажите, что при любых (разумных) ожиданиях относительно выпуска конкурентов ни одному из производителей не выгодно выбирать объем производства, превышающий объем $\tilde{y}_j$. Тем самым, выбор каждого участника может быть ограничен компактным множеством. Можно использовать тот же способ доказательства, что и для монополии. При этом аналогом совокупного излишка будут функции $\int_0^y p(t)dt - c_j(y) - c_j(0)$. При доказательстве удобно учитывать, что для каждой фирмы j суммарный выпуск других фирм Y_{-j} есть константа, поэтому задача максимизации прибыли по y_j сводится к максимизации прибыли по Y при ограничении $Y \geqslant Y_{-j}$.

2) Докажите непрерывность и вогнутость функции прибыли каждого участника при любых ожиданиях относительно выбора других.

3) Воспользуйтесь теоремой Нэша. ■

Сам факт существования равновесия, хоть и повышает доверие к модели Курно, но мало полезен для анализа олигополистического рынка. Без информации, характеризующей равновесие, модель Курно, как и любая модель, оказывалась бы мало пригодной. Следующие далее утверждения позволяют сравнить равновесие Курно с монопольным равновесием и равновесием в ситуации совершенной конкуренции.

Сравнение равновесия Курно с равновесием при совершенной конкуренции

Нижеследующие результаты дают сравнительную характеристику объемов производства в отрасли при разных типах ее организации.

Теорема 25.

(1) Предположим, что равновесие Курно, $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$, и равновесие при совершенной конкуренции, $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$, существуют, и обратная функция спроса $p(y)$ убывает. Тогда суммарный выпуск в равновесии Курно, $Y^* = \sum_{i=1}^n y_i^*$, не превышает суммарный выпуск в условиях совершенной конкуренции, $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i$.

(2) Если, кроме того, выполнены следующие условия:

- $\bar{Y} > 0$,
- обратная функция спроса, $p(y)$, и функции издержек, $c_j(y)$, $j = 1, \ldots, n$ дифференцируемы при всех неотрицательных y, причем $p'(Y^*) < 0$
- функции издержек, $c_j(y)$, выпуклы,

то Y^* меньше $\bar{Y}$.

вогнутость функции прибыли и, таким образом, вместе с другими условиями теоремы — существование равновесия Курно. Анализ поведения олигополии в ситуации, когда выполнено условие Хана, оказывается достаточно простым и приводится в задачах. Условие 5) заменяет условие: существуют $\tilde{Y}$ такое, что $p(Y) = 0$ для всех $Y \geqslant \tilde{Y}$. В приводимых ниже доказательствах существования и свойств равновесия Курно акцент делается на свойствах равновесия и рационального поведения, которые можно рассматривать как аналоги выявленных предпочтений.

[79] Условия данной теоремы гарантируют нам существование равновесия Нэша-Курно в чистых стратегиях. Если мы откажемся от предположений 3)-4), то, применяя теорему Гликсберга:

> «Пусть $\langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle$ — игра m лиц в нормальной форме. Если для каждого i X_i — компактное выпуклое подмножество метрического пространства, а u_i — непрерывная функция, тогда в этой игре существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях» —

(См. Glicksberg, I.L. (1952), "A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **38**,170-174, Рус. пер: И. Л. Гликсберг, «Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия в смысле Нэша», в сб. «Бесконечные антагонистические игры», под ред. Н. Н. Воробьева, Гос. изд. физ.-мат. лит-ры., М. 1963, стр. 493-503), можно доказать существование равновесия в смешанных стратегиях. При этом поменяется только вторая этап доказательства теоремы.

Доказательство.

(1) Поскольку выпуск y_j^* максимизирует прибыль j-ого производителя в предположении, что суммарный объем производства остальных равен Y_{-j}^*, то должно выполнятся неравенство

$$p(Y^*)\,y_j^* - c_j(y_j^*) \geqslant p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\,\bar{y}_j - c_j(\bar{y}_j).$$

С другой стороны, $\bar{y}_j$ дает j-му производителю максимум прибыли в предположении, что цена неизменна и равна $p(\bar{Y})$, поэтому

$$p(\bar{Y})\,\bar{y}_j - c_j(\bar{y}_j) \geqslant p(\bar{Y})\,y_j^* - c_j(y_j^*).$$

Если сложить эти два неравенства, то получается

$$p(Y^*)\,y_j^* + p(\bar{Y})\,\bar{y}_j \geqslant p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\,\bar{y}_j + p(\bar{Y})\,y_j^*. \qquad (*)$$

Предположим, что существует такая фирма j, которая в равновесии Курно производила бы больше, чем в конкурентном равновесии:

$$y_j^* > \bar{y}_j.$$

При убывающей функции спроса из этого неравенства следует, что

$$p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j) > p(Y^*).$$

Поскольку $\bar{y}_j \geqslant 0$, то из этого следует, что

$$p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\,\bar{y}_j \geqslant p(Y^*)\,\bar{y}_j.$$

Сложив это неравенство с неравенством (*), получим

$$p(Y^*)\,y_j^* + p(\bar{Y})\,\bar{y}_j \geqslant p(Y^*)\,\bar{y}_j + p(\bar{Y})\,y_j^*$$

или

$$[p(Y^*) - p(\bar{Y})]\,(y_j^* - \bar{y}_j) \geqslant 0.$$

Поскольку мы предположили, что $y_j^* > \bar{y}_j$, то

$$p(Y^*) \geqslant p(\bar{Y}).$$

В силу убывания функции спроса это означает, что

$$Y^* \leqslant \bar{Y}.$$

С другой стороны, пусть наше предположение неверно, и для всех фирм выполнено $y_j^* \leqslant \bar{y}_j$. Суммируя по j, получаем, что $Y^* \leqslant \bar{Y}$.

(2) Докажем, использовав дополнительные условия, что неравенство здесь строгое. Предположим, что это не так, и суммарные выпуски совпадают, т.е. $Y^* = \bar{Y}$.

Может быть только два случая: либо $y_j^* = \bar{y}_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$, либо $\bar{y}_j < y_j^*$ для некоторого j. И в том и в другом случае существует производитель j, для которого $y_j^* > 0$ и $\bar{y}_j \leqslant y_j^*$.

Для этого производителя дифференциальная характеристика равновесия Курно имеет вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\,y_j^* = c_j'(y_j^*).$$

Из выпуклости функции издержек следует, что

$$c_j'(\bar{y}_j) \leqslant c_j'(y_j^*).$$

Таким образом

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\,y_j^* \geqslant c_j'(\bar{y}_j) = p(\bar{Y}).$$

С учетом того, что $Y^* = \bar{Y}$, имеем $p(Y^*) = p(\bar{Y})$, откуда

$$p'(Y^*)\,y_j^* \geqslant 0,$$

что противоречит убыванию функции спроса. Таким образом $Y^* < \bar{Y}$.

■

Симметричность равновесия, положительность выпусков и единственность

В частном случае, когда издержки у всех производителей одинаковы, т.е. $c_j(y) = c(y)$, можно доказать, что в равновесии выпуски всех производителей одинаковы (равновесие будет симметричным), и положительны. Кроме того, в предположении одинаковости издержек несложно доказать единственность равновесия.

Теорема 26.
Предположим, что равновесие Курно $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ существует и выполнены следующие условия:
1) издержки у всех производителей одинаковы, $c_j(y) = c(y), j = 1, \ldots, n$, причем $c(y)$ — выпуклая функция;
2) обратная функция спроса, $p(y)$, и функция издержек, $c(y)$, дифференцируемы;
3) $p(0) > c'(0)$;
4) $p(y)$ убывает.
Тогда верно следующее:
(i) Равновесие симметрично:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n}\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

и каждая фирма выпускает в равновесии положительное количество продукции, т.е.

$$y_j^* > 0, \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

(ii) Если, кроме того, функция $p(y)y$ вогнута, то равновесие единственно.

Доказательство.

(i) Покажем, что если функции издержек одинаковы, то каждый производитель в равновесии Курно выпускает одинаковое количество продукции. Действительно, предположим, что существуют производители j и k, такие что $y_j^* > y_k^*$. Тогда из условий первого порядка следует, что

$$p'(Y^*)\,(y_k^* - y_j^*) \leqslant c'(y_k^*) - c'(y_j^*).$$

Но левая часть данного соотношения положительна, а правая — неположительна. Таким образом, выпуски всех производителей совпадают:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n}\,\forall j.$$

Суммарный выпуск отрасли, Y^*, не может быть равным нулю. В противном случае из условия первого порядка любого из участников следует, что

$$p(0) - c'(0) \leqslant 0,$$

а это противоречит условию теоремы. Таким образом, $y_j^* > 0, \forall\, j$.

(ii) Дифференциальную характеристику равновесия Курно можно в данном случае переписать в виде

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\,\frac{Y^*}{n} - c'(\frac{Y^*}{n}) = 0,$$

или

$$\frac{n-1}{n}p(Y^*) + \frac{1}{n}[p(Y^*) + p'(Y^*)Y^*] - c'(\frac{Y^*}{n}) = 0.$$

Из вогнутости функции $p(y)y$ следует, что ее производная $p(y) + p'(y)y$ не возрастает. Аналогичным образом, из выпуклости функции $c(y)$ следует неубывание предельных издержек. Учитывая убывание обратной функции спроса $p(y)$, получаем, что выражение в левой части дифференциальной характеристики убывает. Отсюда следует единственность объема Y^*, удовлетворяющего данному уравнению. ■

Нижеприведенный пример показывает, что в случае, если функции издержек олигополистов не совпадают, то нельзя гарантировать симметричность равновесия и положительность выпусков; объемы выпуска в модели Курно у некоторых участников могут быть и нулевыми.

Пример 12.

Пусть в дуопольной отрасли $p(y) = 4 - 4y$, $c_1(y_1) = 2{y_1}^2$, $c_2(y_2) = 2{y_2}^2 + 3y_1$. Легко проверить, что равновесием Курно в этом случае будет точка $y_1 = 1/3$, $y_2 = 0$. ⇦

Еще один пример показывает, что условие дифференцируемости функции спроса важно для симметричности и единственности равновесия Курно.

Пример 13.

Пусть в дуопольной отрасли

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{7-y}{6}, & y \leqslant 1, \\ 7 - 6y, & y \geqslant 1 \end{cases}$$

и $c_j(y) = y^2/4$, $j = 1, 2$. В такой отрасли помимо симметричного равновесия, $(1/2,\ 1/2)$, существует бесконечно много асимметричных равновесий, в которых суммарное производство равно 1, например, $(1/3,\ 2/3)$.[80] ⇦

Поведение равновесия в модели Курно при росте количества фирм

Тот, кто изучал начальный курс микроэкономики, мог встретить неформальное утверждение о том, что если в отрасли достаточно много примерно одинаковых предприятий, так что доля отдельного предприятия в общем выпуске отрасли мала, то каждое предприятие можно рассматривать как не обладающего рыночной властью (принимающего цены как данные[81]), и ситуация в отрасли может быть довольно точно описана моделью совершенной конкуренции. Смысл утверждения состоит в том, что с ростом количества участников олигополии отрасль в некотором смысле все более приближается к конкурентной. Докажем вари-

---

[80] Заметим, что если выполнены условия теоремы существования (Теорема 24), то при одинаковости функций издержек *всегда* существует симметричное равновесие. В силу симметричности задач олигополистов мы имеем одинаковые отображения отклика $R(y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, y_n)$. Предположим, что $y_k = y_s$, где $k, s \neq i$ и рассмотрим отображение $R(y, ..., y, y, y)$. Оно по теореме Какутани (с помощью которой доказывается теорема Нэша) имеет неподвижную точку, что и доказывает существование симметричного равновесия.

[81] англ. *price-taker*

ант этого утверждения в частном случае, когда в модели Курно издержки у всех производителей одинаковы, т.е. $c_j(y) = c(y)$.

Теорема 27.
Предположим, что равновесие Курно, $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$, и равновесие при совершенной конкуренции, $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$, существуют при любом $n \geqslant 2$, и выполнены следующие условия:
1) $c_j(y) = c(y),\ j = 1, \ldots, n$, причем $c(y)$ — выпуклая функция;
2) обратная функция спроса $p(y)$ строго убывает, а функция $p(y)\,y$ вогнута[82];
3) обратная функция спроса, $p(y)$, и функция издержек, $c(y)$, непрерывно дифференцируемы при всех неотрицательных y,
4) $c'(0) > 0$, $p(0) > c'(0)$ и существует величина Y° такая, что $p(Y^\circ) = c'(0)$.
Тогда
(i) суммарный выпуск в равновесии Курно с n участниками, Y_n^*, растет с ростом n и меньше величины Y°;
(ii) выпуск отдельного участника, Y_n^*/n, падает с ростом n, причем $lim_{\,n\to\infty} Y_n^*/n = 0$;
(iii) прибыль отдельного участника, $p(Y_n^*)\dfrac{Y_n^*}{n} - c(\dfrac{Y_n^*}{n})$, падает с ростом n;
(iv) $\lim_{n\to\infty} Y_n^* = \lim_{n\to\infty} \bar{Y}_n = Y^\circ$,
где $\bar{Y}_n$ — суммарный выпуск тех же предприятий в условиях совершенной конкуренции.

Доказательство.
Как доказано выше, при сделанных предположениях каждый из участников в равновесии Курно будет выпускать положительное и одинаковое количество продукции:
$$y_j^* = \frac{Y^*}{n}\ \forall j,$$
и дифференциальную характеристику равновесия Курно можно в данном случае переписать в виде

[82] Эта величина равна суммарной выручке предприятий отрасли от продажи продукции в объеме y.

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\,\frac{Y^*}{n} = c'(\frac{Y^*}{n}).$$

Решение этого уравнение будет единственным (по Теореме 26) равновесием Курно.

(i) Учитывая это соотношение, запишем дифференциальные характеристики равновесий Курно в ситуации с $n+1$ и n олигополистами:
$$p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)\,\frac{Y_{n+1}^*}{n+1} = c'(\frac{Y_{n+1}^*}{n+1}).$$
и
$$p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\,\frac{Y_n^*}{n} = c'(\frac{Y_n^*}{n}).$$

Используя эти соотношения, мы можем показать, что суммарное выпуск в олигополистической отрасли возрастает с ростом числа олигополистов.

Предположим, обратное: существует такое n, что $Y_{n+1}^* \leqslant Y_n^*$. При этом из убывания обратной функции спроса следует, что
$$np(Y_{n+1}^*) \geqslant np(Y_n^*) \quad \text{и} \quad 0 > p'(Y_n^*)\,\frac{Y_n^*}{n}.$$

Из вогнутости функции $p(y)\,y$ следует, что ее производная не возрастает, т.е.
$$p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)\,Y_{n+1}^* \geqslant p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\,Y_n^*.$$
Сложив три последние неравенства, получим
$$np(Y_{n+1}^*) + p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)\,Y_{n+1}^* >$$
$$np(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\,\frac{Y_n^*}{n} + p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\,Y_n^*.$$
или
$$(n+1)[p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)\,\frac{Y_{n+1}^*}{n+1}] > (n+1)[p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\,\frac{Y_n^*}{n}].$$

Выражения в квадратных скобках представляют собой левые части условий первого порядка для Y_{n+1}^* и Y_n^* соответственно, поэтому
$$c'(\frac{Y_{n+1}^*}{n+1}) > c'(\frac{Y_n^*}{n}).$$

Из выпуклости функции издержек следует, что предельные издержки растут, поэтому данное неравенство может быть выполнено только если
$$\frac{Y_{n+1}^*}{n+1} > \frac{Y_n^*}{n},$$

но это противоречит исходному предположению о том, что $Y^*_{n+1} \leqslant Y^*_n$. Таким образом, мы доказали, что последовательность объемов производства Y^*_n возрастает по n.[83]

Чтобы доказать, что $Y^*_n < Y^\circ$ достаточно доказать, что $\bar{Y}_n \leqslant Y^\circ$, поскольку, согласно Теореме 25, $Y^*_n < \bar{Y}_n$.

Воспользовавшись дифференциальной характеристикой конкурентного равновесия, возрастанием предельных издержек и определением величины Y°, запишем

$$p(\bar{Y}_n) = c'(\frac{\bar{Y}_n}{n}) \geqslant c'(0) = p(Y^\circ).$$

Поскольку, по предположению, обратная функция спроса убывает, это означает, что $\bar{Y}_n \leqslant Y^\circ$.

(ii) Мы хотим доказать, что Y^*_n/n является убывающей последовательностью.

Поскольку $p(y)\,y$ — вогнутая функция, то она лежит под своей касательной. Поэтому

$$p(Y^*_{n+1})Y^*_{n+1} \leqslant p(Y^*_n)Y^*_n + [p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)Y^*_n](Y^*_{n+1} - Y^*_n)$$

или

$$[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)]Y^*_{n+1} \leqslant p'(Y^*_n)Y^*_n(Y^*_{n+1} - Y^*_n).$$

Поскольку суммарный выпуск положителен, то это неравенство можно переписать в виде

$$\frac{n+1}{n}[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)] \leqslant (n+1)\frac{Y^*_{n+1} - Y^*_n}{Y^*_{n+1}}p'(Y^*_n)\frac{Y^*_n}{n}. \qquad (*)$$

Пусть доказываемое неверно и для какого-то n выполнено

$$\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} \geqslant \frac{Y^*_n}{n},$$

т.е.

$$(n+1)\frac{Y^*_{n+1} - Y^*_n}{Y^*_{n+1}} \geqslant 1.$$

Из (*) и последнего неравенства следует в силу того, что $p'(Y^*_n) < 0$, что

$$\frac{n+1}{n}[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)] \leqslant p'(Y^*_n)\frac{Y^*_n}{n},$$

поскольку $p'(Y^*_n) < 0$.

Так как $Y^*_{n+1} > Y^*_n$, то из убывания обратной функции спроса при $n \geqslant 2$ следует, что

[83] Величина Y^*_1 представляет собой монопольный выпуск, т.е. $Y^*_1 = y^M$. Из доказанного следует, что $Y^*_n > y^M$ при всех $n \geqslant 1$.

$$[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)]\Big(n - \frac{n+1}{n}\Big) < 0.$$

Из вогнутости функции $p(y)\,y$ следует, что ее производная не возрастает, т.е. при $Y^*_{n+1} > Y^*_n$ выполнено

$$p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\,Y^*_{n+1} \leqslant p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,Y^*_n.$$

Складывая три последние неравенства, получим, что

$$np(Y^*_{n+1}) + p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\,Y^*_{n+1} < np(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,\frac{Y^*_n}{n} + p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,Y^*_n.$$

Приводя подобные и разделив на $n+1$, получим

$$p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} < p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,\frac{Y^*_n}{n}.$$

Учитывая дифференциальные характеристики равновесия Курно, это означает, что

$$c'\left(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1}\right) < c'\left(\frac{Y^*_n}{n}\right).$$

Из выпуклости функции издержек получаем требуемое

$$\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} < \frac{Y^*_n}{n}.$$

Далее, убывание выпуска отдельного участника до нуля, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y^*_n}{n} = 0,$$

следует из того, что суммарный выпуск Y^*_n ограничен сверху величиной Y°.

(iii) Так как спрос убывает, то при $Y^*_{n+1} > Y^*_n$

$$p(Y^*_{n+1})\,Y^*_{n+1} < p(Y^*_n)\,Y^*_{n+1}.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$p(Y^*_{n+1})\,\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} < p(Y^*_n)\,\frac{Y^*_n}{n} + p(Y^*_n)\left(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} - \frac{Y^*_n}{n}\right).$$

С другой стороны, функция издержек, как выпуклая функция, должна лежать выше своей касательной, поэтому

$$c(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1}) \geqslant c(\frac{Y^*_n}{n}) + c'(\frac{Y^*_n}{n})\left(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} - \frac{Y^*_n}{n}\right).$$

Комбинируя два неравенства, получим, что

$$\Pi_{n+1} < \Pi_n - \left(c'(\frac{Y^*_n}{n}) - p(Y^*_n)\right)\left(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} - \frac{Y^*_n}{n}\right),$$

где мы обозначили через Π_n прибыль отдельного участника в отрасли с n фирмами в точке равновесия Курно:

$$\Pi_n = p(Y^*_n)\,\frac{Y^*_n}{n} - c(\frac{Y^*_n}{n}).$$

Из условий первого порядка

$$c'\left(\frac{Y_n^*}{n}\right) - p(Y_n^*) = p'(Y_n^*)\,\frac{Y_n^*}{n} < 0.$$

Поскольку $\frac{Y_{n+1}^*}{n+1} < \frac{Y_n^*}{n}$, то $\Pi_{n+1} < \Pi_n$.

(iv) Запишем еще раз дифференциальную характеристику равновесия Курно:

$$p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\,\frac{Y_n^*}{n} = c'\left(\frac{Y_n^*}{n}\right).$$

Здесь Y_n^* лежит в интервале $[0,\ Y^\circ]$. Так как производная обратной функции спроса непрерывна, то первый сомножитель во втором слагаемом — величина ограниченная, на этом интервале она достигает своего максимального значения. Делая оценки, мы можем первый сомножитель заменить его максимальным значением. Второй сомножитель представляет собой величину, которая убывает до нуля при $n \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} p'(Y_n^*)\,\frac{Y_n^*}{n} = 0.$$[84]

Так как $Y_n^*/\ n$ стремится к нулю, то в силу непрерывной дифференцируемости функции издержек

$$c'\left(\frac{Y_n^*}{n}\right) \to c'(0).$$

Таким образом,

$$p(Y_n^*) \to c'(0)$$

Вспоминая, что $c'(0) = p(Y^\circ)$, получим из непрерывности и убывания обратной функции спроса, что

$$Y_n^* \to Y^\circ.$$

Поскольку конкурентный объем производства, $\bar{Y}_n$, лежит между Y_n^* и Y°, то он стремится к тому же пределу:

$$\bar{Y}_n \to Y^\circ.$$

■

Уменьшение монопольной власти при росте числа конкурентов — это довольно реалистическая, согласующаяся с нашим представлением о монопольной власти картина. Когда производителей много, то каждый из них оказывает малое влияние на рынок, на цену, по которой может продаваться продукция, и поэтому сама модель Курно как модель, описывающая феномен несовершенной конкуренции, оказывается привлекательной.

[84] Т.о. мы видим, что при большом количестве олигополистов, $p(Y_n^*) \approx c'(Y_n^*/n)$, т.е. цена, по которой они продают продукцию, близка к предельным издержкам.

Следующий пример иллюстрирует приведенные выше утверждения в случае линейной функции спроса и постоянных предельных издержек.

Пример 14.

Пусть обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек имеют вид $c_j(y_j) = cy_j$ $(j = 1,..,n)$, так что каждая фирма максимизирует

$$\Pi_j = (a - bY)\,y_j - cy_j.$$

Условия первого порядка максимума прибыли имеет вид

$$a - bY^* - b\,y_j = c.$$

Просуммировав по j, получим

$$na - nbY^* - bY^* = nc.$$

Таким образом, равновесный объем выпуска равен

$$Y^* = \frac{n\,(a-c)}{(n+1)\,b}.$$

В частности, при дуополии

$$Y^* = \frac{2(a-c)}{3b}.$$

Равновесная цена равна

$$p^* = a - b\frac{n\,(a-c)}{(n+1)\,b} = \frac{a+n\,c}{n+1} = c + \frac{b}{n+1}\frac{a-c}{b}$$

Выпуск в случае совершенной конкуренции был бы равен

$$\bar{Y} = \frac{a-c}{b}.$$

То есть, как и следует из теории, $Y^* \leqslant \bar{Y}$. При увеличении количества фирм в олигополии суммарный объем производства все больше сближается с объемом при совершенной конкуренции:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,(a-c)}{(n+1)\,b} = \frac{a-c}{b},$$

а цена стремится к предельным издержкам:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a+n\,c}{n+1} = c. \qquad ⇦$$

Равновесие Курно и благосостояние

Рассмотрим олигопольную отрасль, характеристики которой удовлетворяют условиям Теоремы 26, в том числе, все фирмы имеют одинаковые функции издержек, $c(\cdot)$. Как было доказано в

Теореме 26, в такой отрасли существует симметричное равновесие Курно, причем объем производства положителен:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n} > 0 \ \forall j.$$

Проанализируем это равновесие с точки зрения благосостояния общества.

Предположим, что спрос на продукцию олигополистов в модели Курно получается как результат выбора репрезентативного потребителя с квазилинейной функцией полезности:

$$u(x, z) = v(x) + z.$$

Напомним, что в этом случае для положительных x выполнено соотношение (при отсутствии ограничений на знак z или достаточно больших доходах потребителя)

$$p(x) = v'(x).$$

Индикатор благосостояния имеет вид

$$W(Y) = v(Y) - n\,c(\frac{Y}{n}),$$

а ее производная равна

$$W'(Y) = v'(Y) - c'(\frac{Y}{n}) = p(Y) - c'(\frac{Y}{n}).$$

В равновесии Курно

$$p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} + p(Y^*) \ - c'(\frac{Y^*}{n}) = 0,$$

откуда видна его неоптимальность с точки зрения благосостояния:

$$W'(Y^*) = -p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} > 0.$$

Отсюда следует, что если немного увеличить суммарный выпуск по сравнению с Y^*, то благосостояние общества возрастет.

Рассмотрим функцию

$$\breve{W}(Y, n) = \frac{1}{n}\,(p(Y)Y - n\,c(\frac{Y}{n})) + \frac{n-1}{n}(v(Y) - n\,c(\frac{Y}{n})).$$

Ее можно проинтерпретировать, как взвешенное среднее совокупной прибыли и индикатора благосостояния.[85] Покажем, что равновесный объем продаж олигополистического рынка в модели Курно максимизирует данную функцию. Производная этой функции равна

[85] Эта интерпретация предложена в статье Bergstrom, T.C., and H. Varian (1985) "Two Remarks on Cournot Equilibria," *Economic Letters*, **19**, 5-8. К сожалению, данная интерпретация не распространяется на случай неодинаковых функций издержек.

$$\breve{W}'(Y, n) = \frac{1}{n}\,(p'(Y)Y + p(Y) - c'(\frac{Y}{n})) + \frac{n-1}{n}(v'(Y) \ - c'(\frac{Y}{n})) =$$

$$= \frac{1}{n}\,(p'(Y)Y + p(Y) - c'(\frac{Y}{n})) + \frac{n-1}{n}(p(Y) - c'(\frac{Y}{n})) =$$

$$= p'(Y)\frac{Y}{n} + p(Y) \ - c'(\frac{Y}{n}).$$

Как мы видели, в равновесии Курно ($Y = Y^*$) данная величина равна нулю. Если предположить, как и ранее, вогнутость функции $p(Y)Y$, убывание функции спроса и выпуклость издержек, то производная функции $\breve{W}(Y, n)$ убывает по Y, поэтому $\breve{W}(Y, n)$ строго вогнута по Y, откуда следует, что в точке Y^* достигается ее (единственный) максимум.

При $n \to \infty$ доля первого слагаемого в функции $\breve{W}$ стремиться к нулю, а доля второго слагаемого — к единице, так что функция $\breve{W}$ все больше сближается с индикатором благосостояния. Этим определяется тот факт, что при большом количестве фирм равновесие Курно становится похожим на конкурентное равновесие, в котором, как мы знаем, при некоторых условиях индикатор благосостояния достигает максимума.

Модель Курно и количество фирм в отрасли

Выше, рассматривая поведение выпуска как олигополистического рынка в целом, так и отдельных олигополистов, мы не касались вопроса положительности прибыли, и по этой причине наш анализ поведения этих характеристик нельзя считать вполне удовлетворительным. Возможно, он приемлем для краткосрочной перспективы, но в долгосрочной перспективе анализ должен быть пересмотрен. Любой олигополист сталкивающийся с отрицательной прибылью на некотором рынке при оптимальном поведении вероятнее всего будет рассматривать вопрос об уходе с этого рынка. Аналогично, любой потенциальный производитель решающий вопрос о входе в олигополистическую отрасль, оценивает возможность получения им положительной (неотрицательной) прибыли в случае его входа в отрасль. Как нетрудно догадаться, эти вопросы имеют одну и ту же природу и в простейшей модели, рассматриваемой нами далее, тесно связаны с величиной постоянных (фиксированных) издержек и количеством фирм уже вошедших и действующих в отрасли.

Рассмотрим олигопольную отрасль, в которой у всех олигополистов одинаковые функции издержек. Мы будем предполагать, что выполнены все условия Теоремы 27. Удобно представить издержки каждой фирмы как сумму постоянных издержек, $f > 0$, и переменных издержек, $\tilde{c}(y)$, где $\tilde{c}(0) = 0$:

$$c(y) = f + \tilde{c}(y).$$

Пусть $y^{м}$ максимизирует прибыль монополиста. Мы должны предположить, что постоянные издержки таковы, что монополист действуя на этом рынке, получит неотрицательную прибыль

$$\Pi(y^{м}) \geqslant 0.$$

Другими словами, постоянные издержки должны быть не слишком высоки: они не должны превышать прибыль монополиста без учета постоянных издержек:

$$f \leqslant \tilde{\Pi}(y^{м}),$$

где $\tilde{\Pi}(y) = \Pi(y) - f$. (Если это условие не выполнено, то рынок не может существовать, то есть не найдется производителей, желающих производить продукцию на этом рынке.)

Через Π_n будем, как и ранее, обозначать прибыль, получаемую отдельной фирмой в отрасли, состоящей из n фирм, а через $\tilde{\Pi}_n$ — прибыль без учета постоянных издержек. При этом $\tilde{\Pi}_1$ — прибыль монополии без учета постоянных издержек.

Как мы доказали ранее, Π_n (а, следовательно, и $\tilde{\Pi}_n$) представляет собой убывающую последовательность. При сделанных нами ранее предположениях прибыль $\tilde{\Pi}_n$ положительна (в том числе, $\tilde{\Pi}_1 > 0$) и при увеличении n стремится к 0 ($\tilde{\Pi}_n \to 0$). Читателю предлагается установить этот факт самостоятельно.

Из убывания и стремления к нулю очевидно, что при $0 < f \leqslant \tilde{\Pi}_1$ существует единственное целое количество фирм в отрасли $n(f)$ такое, что

$$\tilde{\Pi}_{n(f)} \geqslant f > \tilde{\Pi}_{n(f)+1}$$

или

$$\Pi_{n(f)} \geqslant 0 > \Pi_{n(f)+1}.$$

Отметим, что это число единственное в силу строгого убывания прибыли при росте числа олигополистов. Таким образом, для каждого f из промежутка $(0, \tilde{\Pi}_1]$ определена функция $n(f)$. Эта функция сопоставляет каждому значению постоянных издержек максимально возможное число фирм, при котором каждая из них получает неотрицательную прибыль.

Докажем, что эта функция не возрастает по f и не ограничена сверху. Пусть $f' > f''$. Тогда по определению функции $n(f)$ мы имеем, что $\tilde{\Pi}_{n(f')} \geqslant f' > f'' > \tilde{\Pi}_{n(f'')+1}$, т.е. $\tilde{\Pi}_{n(f')} > \tilde{\Pi}_{n(f'')+1}$ из убывания прибыли по n мы имеем, что $n(f'') + 1 > n(f')$ или $n(f'') \geqslant n(f')$. Неограниченность сверху следует из того факта, что $n(\tilde{\Pi}_N) = N$. Сопоставляя эти два свойства функции $n(\cdot)$, получим, что

$$\lim_{f \to 0} n(f) = \infty.$$

Таким образом, чем меньше постоянные издержки, тем больше фирм может войти в отрасль, и в пределе функционирование отрасли все более приближается к ситуации совершенной конкуренции (в силу Теоремы 27).

Мы представили количество олигополистов на рынке как функцию от постоянных издержек. Естественно также рассмотреть вопрос об оптимальном с точки зрения общества числе олигополистов.[86] Это число должно максимизировать совокупный излишек

$$W(n) = \int_0^{Y_n^*} p(x)dx - nc\left(\frac{Y_n^*}{n}\right).$$

Пусть $\hat{n}$ — оптимальное с точки зрения благосостояния количество фирм в олигополистической отрасли.

Следующие рассуждения показывают, что $n(f) > \hat{n} - 1$. По определению $\hat{n}$ мы имеем, что $W(\hat{n}) \geqslant W(\hat{n} - 1)$, или

$$\int_0^{Y_{\hat{n}}^*} p(x)dx - \hat{n}c\left(\frac{Y_{\hat{n}}^*}{\hat{n}}\right) \geqslant \int_0^{Y_{\hat{n}-1}^*} p(x)dx - (\hat{n}-1)c\left(\frac{Y_{\hat{n}-1}^*}{\hat{n}-1}\right)$$

или

$$-c\left(\frac{Y_{\hat{n}-1}^*}{\hat{n}-1}\right) \geqslant -\int_{Y_{\hat{n}-1}^*}^{Y_{\hat{n}}^*} p(x)dx - \hat{n}\left[c\left(\frac{Y_{\hat{n}-1}^*}{\hat{n}-1}\right) - c\left(\frac{Y_{\hat{n}}^*}{\hat{n}}\right)\right].$$

Прибавив к обеим частям $p(Y_{\hat{n}-1}^*)\dfrac{Y_{\hat{n}-1}^*}{\hat{n}-1}$, получим

$$\Pi_{\hat{n}-1} \geqslant p(Y_{\hat{n}-1}^*)\frac{Y_{\hat{n}-1}^*}{\hat{n}-1} - \int_{Y_{\hat{n}-1}^*}^{Y_{\hat{n}}^*} p(x)dx - \hat{n}\left[c\left(\frac{Y_{\hat{n}-1}^*}{\hat{n}-1}\right) - c\left(\frac{Y_{\hat{n}}^*}{\hat{n}}\right)\right).$$

Так как обратная функция спроса убывает, то

$$\int_{Y_{\hat{n}-1}^*}^{Y_{\hat{n}}^*} p(x)dx < \int_{Y_{\hat{n}-1}^*}^{Y_{\hat{n}}^*} p(Y_{\hat{n}-1}^*)dx = p(Y_{\hat{n}-1}^*)(Y_{\hat{n}}^* - Y_{\hat{n}-1}^*)$$

[86] Следующий далее анализ основывается на статье Mankiw, N.G., M.D. Whinston (1986) "Free Entry and Social Inefficiency," *Rand Journal of Economics*, **17**, 48-58.

Таким образом, имеем

$$\Pi_{\hat n-1} > p(Y^*_{\hat n-1})\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1} - Y^*_{\hat n} + Y^*_{\hat n-1}\right) - \hat n\left[c\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1}\right) - c\left(\frac{Y^*_{\hat n}}{\hat n}\right)\right] =$$

$$= \hat n\, p(Y^*_{\hat n-1})\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1} - \frac{Y^*_{\hat n}}{\hat n}\right) - \hat n\left[c\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1}\right) - c\left(\frac{Y^*_{\hat n}}{\hat n}\right)\right].$$

В силу выпуклости функции издержек $c(\cdot)$ имеем, что

$$c\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1}\right) - c\left(\frac{Y^*_{\hat n}}{\hat n}\right) \leqslant c'\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1}\right)\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1} - \frac{Y^*_{\hat n}}{\hat n}\right).$$

Воспользовавшись этим неравенством, получим

$$\Pi_{\hat n-1} > \hat n\, p(Y^*_{\hat n-1})\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1} - \frac{Y^*_{\hat n}}{\hat n}\right) - \hat n\, c'\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1}\right)\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1} - \frac{Y^*_{\hat n}}{\hat n}\right) =$$

$$= \hat n\left(p(Y^*_{\hat n-1}) - c'\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1}\right)\right)\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1} - \frac{Y^*_{\hat n}}{\hat n}\right).$$

Из условий первого порядка

$$\Pi_{\hat n-1} > -\hat n\, p'(Y^*_{\hat n-1})\,\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1}\left(\frac{Y^*_{\hat n-1}}{\hat n-1} - \frac{Y^*_{\hat n}}{\hat n}\right) > 0.$$

Таким образом мы получили, что

$$\Pi_{\hat n-1} > 0.$$

Пусть, как и выше, $n(f)$ — количество фирм в отрасли при постоянных издержках f. По определению $0 > \Pi_{n(f)+1}$.

Таким образом, $\Pi_{\hat n-1} > \Pi_{n(f)+1}$. В силу строгого убывания прибыли по числу фирм, имеем

$$\hat n - 1 < n(f) + 1$$

или

$$n(f) \geqslant \hat n - 1.$$

Это означает, что число фирм в отрасли, $n(f)$, не может быть меньше оптимального числа фирм, $\hat n$, более чем на 1 фирму. Приведенный ниже пример иллюстрирует случай, когда оптимальное с точки зрения общественного благосостояния количество фирм в отрасли больше, чем при свободном входе для модели Курно.

Пример 15 (продолжение Примера 14).

Для рассмотренного случая, как не трудно получить, прибыль каждого олигополиста равна

$$\Pi_j(n) = \frac{(a-c)^2}{b}\cdot\frac{1}{(n+1)^2} - F.$$

Индикатор благосостояния в зависимости от n равен

$$W(n) = \frac{(a-c)^2}{2b} - \frac{1}{2(n+1)^2}\,\frac{(a-c)^2}{b} - nF.$$

Легко проверить, что для данного примера $n(F) = \left[\frac{a-c}{\sqrt{bF}}\right] - 1$, где $[\cdot]$ – оператор взятия целой части. В случае если $a = 28$, $b = 10$, $c = 10$, $F = 10$ легко проверить что $n(F) = 0$. Для этих значений параметров значение индикатора благосостояния при n принимающих значения от 0 до 2 равны соответственно $W(0) = 0$, $W(1) = \frac{172}{80}$, $W(2) = -\frac{56}{10}$. Откуда следует, что $\hat n = 1$ – точка локального максимума. Непосредственным рассмотрением графика функции $W(n)$ убеждаемся, что $\hat n = 1$ – будет глобальным максимумом этой функции (после $n = 2$ эта функция начинает убывать).

⇦

Задачи

1. Покажите, что в случае внутреннего равновесия

а) индекс Лернера для отдельного олигополиста,

$$\frac{p - c'_j}{p},$$

прямо пропорционален его доле (δ_j) в суммарном выпуске и обратно пропорционален эластичности спроса;

б) средневзвешенный (с весами δ_j) индекс Лернера прямо пропорционален индексу Герфиндаля и обратно пропорционален эластичности спроса.

Индекс концентрации Герфиндаля определяется как

$$H = \sum \delta_j^2.$$

в) Докажите, что при данном количестве фирм в отрасли индекс Герфиндаля минимален в симметричном равновесии.

г) Рассмотрите симметричные равновесия в «симметричной» отрасли с постоянной эластичностью спроса. Объясните, почему средний индекс Лернера обратно пропорционален количеству олигополистов.

2. Докажите, что в равновесии Курно прибыль любой фирмы ниже, чем в случае, когда эта фирма является монополистом на том же рынке. (Имеется в виду нетривиальное равновесие Курно, когда хотя бы одна другая фирма имеет ненулевой объем производства.)

3. Докажите существование равновесия в модели Курно, используя приведенные в тексте указания.

4. Докажите, что если функция спроса убывает и вогнута, а функция издержек выпукла, обе они дважды непрерывно дифференцируемы, то выполняется следующее условие (условие Хана)

$$p'(Y) + p''(Y)\,y_j < 0 \text{ и } p'(Y) - c_j''(y_j) < 0\ \forall\, j, Y, y_j.$$

5. Докажите, что если обратная функция спроса убывает и вогнута, то отображение отклика каждого производителя не возрастает, т.е. если $Y^1_{-j} < Y^2_{-j}$, то для любых $y_j^1 \in R_j(Y^1_{-j})$ и $y_j^2 \in R_j(Y^2_{-j})$ выполнено $y_j^1 \geqslant y_j^2$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что

$$\Pi_j(Y^1_{-j}, y_j^1) \geqslant \Pi_j(Y^1_{-j}, y_j^2) \text{ и } \Pi_j(Y^2_{-j}, y_j^2) \geqslant \Pi_j(Y^2_{-j}, y_j^1).$$

Предположите противное ($y_j^1 < y_j^2$) и используйте определение вогнутости функции.

6. Предположим, что обратная функция спроса $p(y)$ и функция издержек $c_j(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию:

$$p'(Y) + p''(Y)\,y_j < 0 \text{ и } p'(Y) - c_j''(y_j) < 0\ \forall\, j, Y, y_j. \qquad (*)$$

Докажите что при этих предположениях существует единственное равновесие Курно, а если, кроме того, функции издержек всех производителей одинаковы, это равновесие симметрично, т.е. $y_j^* = y_i^*\ \forall\, j, i$

Указание: Рассмотрите функции двух переменных

$$T_j(Y, y_j) = p(Y) + p'(Y)\,y_j$$

Заметим, что если $(y_1^*,\ldots, y_n^*)$ — равновесие Курно, то

$$T_j(Y^*, y_j^*) \leqslant 0,$$

причем

$$T_j(Y^*, y_j^*) = 0, \text{ если } y_j^* > 0,$$

где $Y^* = \sum_j y_j^*$.

(1) Покажите, что в условиях (*) функции $T_j(Y^*, y_j^*)$ монотонно убывают по обеим переменным. Обозначим это предположение (**).

(2) Пусть существуют два равновесия Курно, такие что для суммарных объемов производства выполнено $Y^1 \geqslant Y^2$. Докажите от противного, используя (**), что $y_j^1 \leqslant y_j^2\ \forall j$. Таким образом, суммарный объем производства в двух равновесиях Курно должен совпадать. Рассмотрите случай $Y^1 = Y^2$ и докажите, что $y_j^1 = y_j^2\ \forall j$.

(3) Докажите симметричность равновесия.

7. Пусть так же, как и в предыдущей задаче, выполнено предположение (**). Рассмотрите внутренние равновесия Курно при n и n+1 участниках. Покажите, что $Y^*_{n+1} > Y^*_n$ и $y^*_{j,n+1} < y^*_{j,n}$.

8. Предположим, что предельные издержки у всех производителей постоянны и выполнено предположение (**).

Покажите, что если предельные издержки одного из производителей сокращаются при неизменных предельных издержках других производителей, то их выпуск в равновесии Курно сокращается, а совокупный выпуск возрастает.

9. Предположим, что выполнено условие (*), функции издержек олигополистов одинаковы и средние издержки не убывают. Тогда благосостояние (измеряемое величиной совокупного излишка) возрастает при росте числа фирм в отрасли.

10. Покажите, что если в дуополии Курно предельные издержки производителей удовлетворяют соотношению

$$c_1'(y) > c_2'(y),$$

то в равновесии первый производит меньше, чем второй.

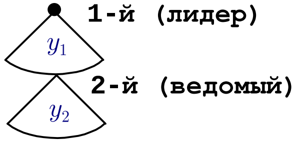
11. Пусть издержки олигополистов в модели Курно постоянны $c_j(y_j) = C_j$, а обратная функция спроса равна

$$p(y) = exp(-y).$$

Показать, что у игроков есть доминирующие стратегии, и найти их. Как будет изменяться суммарный выпуск отрасли с увеличением числа продавцов?

12. Докажите, что если постоянные издержки олигополистов равны 0, а переменные издержки одинаковы, то прибыль олигополистов положительна и при росте числа олигополистов стремится к 0.

2. Модель дуополии Штакельберга



$$\begin{pmatrix} \Pi_1 = y_1 p(y_1 + y_2) - c_1(y_1) \\ \Pi_2 = y_2 p(y_1 + y_2) - c_2(y_2) \end{pmatrix}$$

Рисунок 58. Дуополия Штакельберга

В модели дуополии, предложенной Генрихом фон Штакельбергом,[87] первый участник выбирает производимое количество, y_1, и является **лидером**. Под этим мы подразумеваем то, что второй участник (**ведомый**) рассматривает объем производства, выбранный первым участником, как данный. Другими словами, второй участник сталкивается с остаточным спросом, который получается вычитанием из исходного спроса величины y_1. Ориентируясь на этот остаточный спрос, второй участник выбирает свой объем производства, y_2 (или цену, что в данном случае одно и то же). Лидер «просчитывает» действия ведомого, определяет, какая цена устанавливается на рынке при каждом y_1, и исходя из этого максимизирует свою прибыль. В остальном модель повторяет модель Курно.

Эта модель приложима, например, к ситуации, когда в новой отрасли лидирующая фирма выбирает размер строящегося завода (мощность) и решает «работать на полную мощность». Считается, что она хорошо описывает рыночную ситуацию в случае, когда фирма-лидер, занимает значительную долю рынка. Так или иначе, ситуации, представленные в модели не столь и редки на реальных рынках. С точки зрения теории игр модель Штакельберга представляет собой динамическую игру с совершенной информацией, в которой лидер делает ход первым. Дерево игры изображено на Рис. 58.

Выпуски $(y_1^S,\ y_2^S)$, соответствующие совершенному в подыграх равновесию этой модели принято называть **равновесием Штакельберга**.

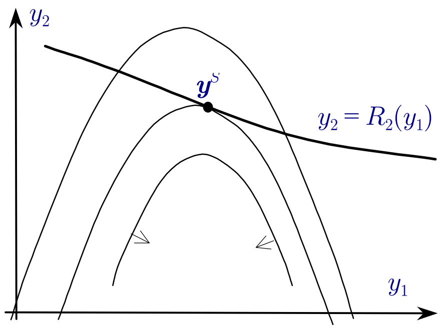


Рисунок 59

[87] Von Stackelberg, H. *Marktform und Gleichgewicht*. Wien: Springer, 1934.

Вектор выпусков не есть собственно совершенное в подыграх равновесие. По определению совершенное в подыграх равновесие — это набор стратегий, $(y_1^S,\ r_2^S(\cdot))$, где $r_2^S(\cdot)$ — равновесная стратегия ведомого игрока. (Стратегия ведомого игрока должна быть функцией $r_2(y_1)$, которая сопоставляет каждому ходу лидера некоторый отклик.)

Определение 15.

Вектор выпусков $(y_1^S,\ y_2^S)$, называется равновесием Штакельберга, если существует функция (представляющая равновесную стратегию ведомого)

$$r_2^S(\cdot)\colon\ \mathbb{R}_+ \mapsto\ \mathbb{R}_+,$$

такая, что выполнены два условия:

1) Выпуск $y_2 = r_2^S(y_1)$ максимизирует прибыль ведомого на $[0, +\infty)$ при любом выпуске лидера, $y_1 \geqslant 0$.

2) Выпуск y_1^S является решением следующей задачи максимизации прибыли лидера:

$$\Pi_1 = y_1 p(y_1 + r_2^S(y_1))\, y_1 - c_1(y_1) \to \max_{y_1 \geqslant 0}.$$

Равновесие Штакельберга находят с помощью обратной индукции. Лидер, назначая выпуск, рассчитывает отклик ведомого, $R_2(y_1)$. Отклик будет таким же, как в модели Курно. Вообще говоря, отклик может быть неоднозначным. Тогда различные функции $r_2(y_1)$, удовлетворяющие условию:

$$r_2(y_1) \in R_2(y_1)\ \forall y_1$$

могут задавать различные равновесия.

Мы будем далее предполагать, если не оговорено противное, что оптимальный отклик однозначен, т.е. $R_2(y_1)$ — функция[88]. Задача лидера в этом случае имеет вид:

$$\Pi_1 = y_1 p(y_1 + R_2(y_1))\, y_1 - c_1(y_1) \to \max_{y_1 \geqslant 0}.$$

Если решением этой задачи является y_1^S, и $y_2^S = R_2(y_1^S)$, то $(y_1^S,\ y_2^S)$ — равновесие Штакельберга.

Дуополию Штакельберга можно представить графически (см. Рис. 59). Разницу между равновесиями в моделях Курно и Штакельберга иллюстрирует Рисунок 60. Лидер выбирает точку на кривой отклика, которая бы максимизировала его прибыль. В

[88] Однозначность отклика можно, например, гарантировать, если выполнено условие Хана (см. сноску 78).

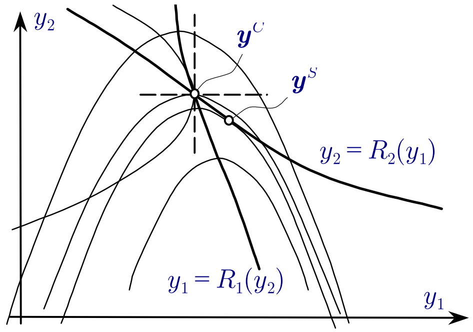


Рисунок 60

равновесии кривая равной прибыли лидера касается кривой отклика.

Существование равновесия Штакельберга

Докажем теперь теорему существования равновесия в модели Штакельберга.

Теорема 28.
Предположим, что в модели Штакельберга выполнены следующие условия:
1) функции издержек $c_j(y)$ дифференцируемы,
2) обратная функция спроса $p(y)$ непрерывна и убывает,
3) существуют $\tilde{y}_j > 0$ $j = 1, 2$ такие, что $p(y_j) < c_j'(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$.
Тогда равновесие Штакельберга (y_1^S, y_2^S) существует, причем $0 \leqslant y_j^S < \tilde{y}_j$.

Доказательство.
Доказательство этой теоремы во многом повторяет доказательство существования равновесия при монополии.

1) Докажем, что при любых ожиданиях относительно выпуска лидера ведомому не выгодно выбирать объем производства, превышающий объем $\tilde{y}_2$, в том смысле, что $\Pi_2(y_1, y_2) < \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2)\ \forall y_1$ при $y_2 > \tilde{y}_2$. Рассмотрим разность прибылей:

$$\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) = p(y_1 + y_2)\, y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\, \tilde{y}_2 - (c_2(y_2) - c_2(\tilde{y}_2)).$$

Эту разность можно преобразовать следующим образом:

$$\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) =$$
$$= p(y_1 + y_2)\, y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\, \tilde{y}_2 - \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} p(y_1 + t)dt + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(y_1 + t) - c_2'(t)]dt.$$

Поскольку $p(y)$ убывает, то $p(y_1 + y_2) < p(y_1 + t)$ при $t < y_2$ и $p(y_1 + t) \leqslant p(t)$ при $y_1 \geqslant 0$, поэтому

$$\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) <$$
$$< p(y_1 + y_2)\, y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\, \tilde{y}_2 - p(y_1 + y_2)(y_2 - \tilde{y}_2) + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(t) - c_2'(t)]dt =$$
$$= (p(y_1 + y_2) - p(y_1 + \tilde{y}_2))\, \tilde{y}_2 + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(t) - c_2'(t)]dt < 0.$$

Таким образом, прибыль ведомого при $y_2 = \tilde{y}_2$ выше, чем при выпуске любого большего количества. Тем самым, исходная задача выбора ведомого (при любом наперед заданном $y_1 \geqslant 0$) эквивалентна задаче выбора на отрезке $[0, \tilde{y}_2]$. Другими словами, отображение отклика исходной задачи совпадает с отображением отклика в задаче максимизации прибыли ведомого на отрезке $[0, \tilde{y}_2]$. Обозначим множество решений модифицированной задачи при данном y_1 через $\tilde{R}_2(y_1)$. Тем самым определено отображение отклика $\tilde{R}_2\colon \mathbb{R}_+ \mapsto [0, \tilde{y}_2]$. Мы доказали, что $\tilde{R}_2(y_1) = R_2(y_1)\ \forall y_1$.

По Теореме 30 из Приложения (стр. 112) для любого y множество решений $\tilde{R}_2(y)$ непусто и компактно, и, кроме того, отображение $\tilde{R}_2(\cdot)$ полунепрерывно сверху. (Читателю предоставляется проверить самостоятельно, что эта теорема применима в данном случае.) В силу совпадения $\tilde{R}_2(\cdot)$ и $R_2(\cdot)$ теми же свойствами будет обладать и $R_2(\cdot)$.

2) Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$\Pi_1(y_1, y_2) = y_1 p(y_1 + y_2)\, y_1 - c_1(y_1) \to max_{\,y_1, y_2 \geqslant 0}. \qquad (\bullet)$$
$$y_2 \in R_2(y_1).$$

Докажем, что решение этой задачи существует.

Пользуясь теми же рассуждениями, что и для функции прибыли ведомого, можно показать, что при любом наперед заданном $y_2 \geqslant 0$ прибыль лидера в точке $y_1 = \tilde{y}_1$ больше, чем во всех точках $y_1 > \tilde{y}_1$. Таким образом, множество решений задачи ($\bullet$) не изменится, если в нее дополнительно включить ограничение $y_1 \leqslant \tilde{y}_1$.

Таким образом, нам требуется, чтобы существовало решение задачи максимизации прибыли лидера по y_1 и y_2 на множестве

$$\mathcal{R} = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in [0, \tilde{y}_1],\ y_2 \in R_2(y_1) \subset [0, \tilde{y}_2]\}.$$

Из доказанных свойств отображения $R_2(\cdot)$ следует, что множество $\mathcal{R}$ непусто, замкнуто и ограничено. Существование решения такой задачи следует из теоремы Вейерштрасса.

3) Пусть (y_1^S, y_2^S) — некоторое решение задачи (•). Теперь выбрав любую функцию $r_2^S(y_1)$, график которой проходит через точку (y_1^S, y_2^S), и такую что

$$r_2^S(y_1) \in R_2(y_1)\ \forall y_1,$$

увидим, что выпуск y_1^S является решением задачи лидера

$$\Pi_1 = y_1 p(y_1 + r_2^S(y_1))\, y_1 - c_1(y_1) \to max_{y_1 \geqslant 0}.$$

Действительно, этот выпуск максимизирует цели лидера на всем допустимом множестве задачи (•), а значит — и на множестве, суженном дополнительным ограничением $y_2 \in r_2^S(y_1)$. Тем самым пара $y_1^S, r_2^S(\cdot)$ удовлетворяет определению равновесия Штакельберга. ■

Равновесие Штакельберга и равновесие Курно

Представляется интересным сравнить объемы производства в модели Курно и в модели Штакельберга. Результат сравнения для ведомого однозначен: в модели Штакельберга он производит меньше. Покажем это.

Пусть y_1^C и y_2^C — объемы производства в модели Курно.

Лидер в модели Штакельберга в предположении однозначности отклика ведомого всегда может обеспечить себе такую же прибыль, как в модели Курно, назначив $y_1 = y_1^C$, поэтому

$$p(y_1^C + y_2^C)\, y_1^C - c_1(y_1^C) \leqslant p(y_1^S + y_2^S)\, y_1^S - c_1(y_1^S).$$[89]

Поскольку y_1^C максимизирует прибыль лидера при $y_2 = y_2^C$, то

$$p(y_1^S + y_2^C)\, y_1^S - c_1(y_1^S) \leqslant p(y_1^C + y_2^C)\, y_1^C - c_1(y_1^C).$$

Если $y_1^S > 0$, то из этих двух неравенств следует, что

$$p(y_1^S + y_2^C) \leqslant p(y_1^S + y_2^S).$$

Из убывания спроса имеем, что

$$y_2^C \geqslant y_2^S.$$

Результат сравнения между объемами производства лидера в двух ситуациях зависит от наклона кривой отклика. В случае, если $R_2(\cdot)$ убывает (на достаточно большом интервале, который должен заведомо включать, как y_2^C так и y_2^S), имеем

$$y_1^C \leqslant y_1^S.$$

Если же $R_2(\cdot)$ возрастает, то, наоборот,

$$y_1^C \geqslant y_1^S.$$

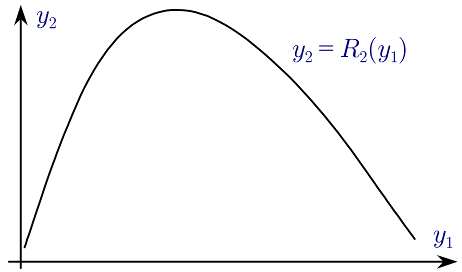


Рисунок 61

Функция $R_2(\cdot)$ убывает, например, в случае линейного спроса и постоянных предельных издержек. Пример возрастающей функции отклика построить достаточно трудно. На Рис. 61 показана кривая отклика, соответствующая обратной функции спроса $p(y) = 1/y^2$ при постоянных предельных издержках. При малых объемах производства лидера она возрастает, а при больших — убывает. Для более общего случая рассмотрим теорему.

Теорема 29.
Предположим, что выполнены следующие условия:
1) обратная функция спроса, $p(y)$, и функция издержек, $c_2(y)$, дважды дифференцируемы,
2) обратная функция спроса имеет отрицательную производную: $p'(y) < 0$, $\forall y \geqslant 0$,
3) $p'(y_1 + y_2) - c_2''(y_2) < 0$ при любых y_1 и y_2,
4) отклик $R_2(y_1)$ является дифференцируемой функцией.[90]
Тогда в тех точках y_1, где $R_2(y_1) > 0$, наклон функции отклика $R_2(y_1)$, удовлетворяет условию

$$-1 < R_2'(y_1)\,,$$

[89] Данное неравенство получено как сравнение прибылей лидера при выборе им объемов выпуска y_1^S и y_1^C. Отметим, что при этом оптимальным откликом ведомого на y_1^S будет y_2^S, а на y_1^C – y_2^C.

[90] Однозначность и дифференцируемость отклика рассмотрены в Приложении.

то есть суммарный выпуск $R_2(y_1)+y_1$, возрастает.
Дополнительное условие[91]

$$p'(y_1+y_2)+p''(y_1+y_2)\,y_2<0 \quad \forall y_1,\, y_1$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы $R_2'(y_1)<0$.

Доказательство.

При принятых предположениях докажем, что суммарный выпуск дуополии, $y_1+R_2(y_1)$, возрастает по y_1. Функция $R_2(y_1)$ при всех y_1 таких, что $R_2(y_1)>0$ удовлетворяет условию первого порядка — равенству

$$p(y_1+R_2(y_1))+p'(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)=c_2'(R_2(y_1)).$$

Дифференцируя это соотношение по y_1, получим

$$p'(y_1+R_2(y_1))\cdot(1+R_2'(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))R_2(y_1)\cdot(1+R_2'(y_1))+$$
$$+\,p'(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2'(y_1)=c_2''(R_2(y_1))\cdot R_2'(y_1).$$

Отсюда

$$(1+R_2'(y_1))\cdot[2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))]=$$
$$=p'(y_1+R_2(y_1))-c_2''(R_2(y_1)).$$

По условию второго порядка

$$2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))\leqslant 0.$$

С другой стороны, по предположению

$$p'(y_1+R_2(y_1))-c_2''(R_2(y_1))<0.$$

Это гарантирует, что

$$2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))\neq 0$$

Получаем, что

$$1+R_2'(y_1)=$$
$$=\frac{p'(y_1+R_2(y_1))-c_2''(R_2(y_1))}{2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))}, \qquad (*)$$

откуда $1+R_2'(y_1)>0$ или $R'_2(y_1)>-1$.

Докажем теперь неубывание функции отклика $R_2(y_1)$. Условие (*) можно переписать в виде

$$R_2'(y_1)=-\frac{p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)}{2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))}.$$

В этой дроби знаменатель отрицателен, поэтому условие $R_2'(y_1)<0$ эквивалентно отрицательности числителя, что и требовалось. ■

[91] Это условие, в частности, следует из строгой выпуклости функции потребительского излишка. Напомним, что это одно упоминавшихся ранее условий Хана.

Пользуясь полученным ранее результатом, получим, что если $R_2(\cdot)$ убывает, то

$$y_1^C+y_2^C\leqslant y_1^S+y_2^S,$$

а если возрастает, то

$$y_1^C+y_2^C\geqslant y_1^S+y_2^S.$$

В первом случае равновесная цена в равновесии Штакельберга не

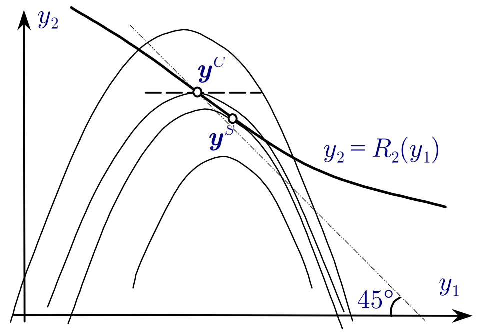


Рисунок 62

превышает равновесную цену в равновесии Курно, во втором — наоборот.

Иллюстрация полученных соотношений для случая убывающей кривой отклика представлена на Рис. 62. Из рисунка видно, что поскольку точка равновесия в модели Штакельберга лежит ниже кривой равной прибыли, проходящей через точка равновесия в модели Курно, то объем y_2^C должен быть выше y_2^S. Из-за убывания функции отклика объем y_1^C оказывается ниже y_1^S. Штрих-пунктирная линия, проходящая под углом 45° показывает расположение точек, в которых суммарный выпуск одинаков. Поскольку кривая отклика более пологая, то $y_1^C+y_2^C$ оказывается меньше $y_1^S+y_2^S$.

Можно сравнить также прибыли участников в двух ситуациях. Как уже упоминалось ранее, по очевидным причинам прибыль лидера в модели Штакельберга выше. Читателю предлагается доказать самостоятельно простой факт, что прибыль ведомого в модели Штакельберга выше в случае возрастающей функции отклика, и ниже в случае убывающей функции отклика.

Пример 16.

Пусть обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек дуополистов имеют вид $c_j(y_j) = cy_j$ $(j = 1{,}2)$. Функция отклика второго равна

$$R_2(y_1) = \frac{a-c-by_1}{2b}.$$

Подставив ее в прибыль лидера, получим

$$\Pi_1 = \frac{a-c}{2}y_1 - \frac{b}{2}(y_1)^2.$$

Максимум достигается при

$$y_1^S = \frac{a-c}{2b}.$$

Кроме того, в равновесии

$$y_2^S = \frac{a-c}{4b}.$$

Суммарный выпуск равен

$$y_1^S + y_2^S = \frac{3}{4}\frac{a-c}{b}$$

Это больше, чем выпуск в модели Курно, но меньше, чем выпуск при совершенной конкуренции, то есть имеется неоптимальность. ⇦

Приложение

Рассмотрим параметрическую задачу условной максимизации:

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \max{}_y$$
$$\boldsymbol{y} \in \beta(\boldsymbol{x}), \qquad \text{(P)}$$

где $\boldsymbol{x} \in S \subset \mathbb{R}^m$, $\beta(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $m(\boldsymbol{x})$ значение целевой функции в максимуме:

$$m(\boldsymbol{x}) = \max\{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \in \beta(\boldsymbol{x})\},$$

а через $r(\boldsymbol{x})$ — множество оптимальных решений при параметрах x:

$$r(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \beta(\boldsymbol{x}) \mid f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = m(\boldsymbol{x})\}.$$

Относительно решений этой задачи верна следующая теорема:[92]

[92] См. В. Гильденбранд, «Ядро и равновесие в большой экономике». — М.: Наука, 1986, с. 31.

Теорема 30.

Пусть отображение $\beta(\boldsymbol{x})$ компактнозначно и непрерывно, а $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — непрерывная функция. Тогда
а) функция $m(\boldsymbol{x})$ непрерывна;
б) для любого $\boldsymbol{x} \in S$ множество $r(\boldsymbol{x})$ не пусто и компактно, причем $r(\cdot)$ полунепрерывно сверху.

Условия существования и дифференцируемости функции отклика могут быть получены на основе следующей теоремы.

Теорема 31.

Рассмотрим задачу (P) с постоянным отображением $\beta(x) = \beta$. Предположим, что существует пара $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, такая что $\bar{\boldsymbol{y}} \in r(\bar{\boldsymbol{x}})$ и $\bar{\boldsymbol{y}} \in int(\beta)$. Предположим, кроме того, что функция $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ дважды непрерывно дифференцируема и строго вогнута по $\boldsymbol{y}$ в некоторой окрестности точки $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, и $|\nabla^2_{yy} f(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})| \neq 0$. Тогда решение задачи (P) существует и единственно при любых $\boldsymbol{x}$ из некоторой окрестности точки $\bar{\boldsymbol{x}}$, причем функция $r(\boldsymbol{x})$ непрерывно дифференцируема в этой окрестности.

Доказательство.

Поскольку $\bar{\boldsymbol{y}}$ является внутренним решением задачи (P) при $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}$. Это означает, что пара $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ удовлетворяет условиям первого порядка:

$$\nabla_{\boldsymbol{y}} f(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = 0.$$

Условия теоремы гарантируют выполнение всех предположений теоремы о неявной функции относительно соотношения

$$\nabla_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

и поэтому существует удовлетворяющая этому соотношению функция $\boldsymbol{y} = \bar{r}(\boldsymbol{x})$, определенная в некоторой окрестности точки $\bar{\boldsymbol{x}}$ и непрерывно дифференцируемая в этой окрестности. Из непрерывности $\bar{r}(\boldsymbol{x})$ следует, что существует окрестность точки $\bar{\boldsymbol{x}}$, в которой $\bar{r}(\boldsymbol{x}) \in \beta$.

Поскольку $\bar{r}(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет условиям первого порядка и функция $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ строго вогнута по $\boldsymbol{y}$, то $\bar{r}(\boldsymbol{x})$ является единственным решением задачи (P) при данном $\boldsymbol{x}$. ■

Задачи

1. Две фирмы, конкурируя на рынке, выбирают объемы производства. Известно, что для этих фирм равновесный объем производства в модели Курно совпадает с равновесным объемом производства в модели Штакельберга. Каков наклон кривых отклика в этой общей точке равновесия? Пояснить графически с использованием кривых отклика и кривых равной прибыли.

2. Рассмотрим отрасль с двумя фирмами. Пусть обратная функция спроса имеет вид

$$p(Y) = \frac{1}{Y},$$

и обе фирмы имеют постоянные предельные издержки c_j ($0 < c_j < 1$). При каких условиях равновесие в модели Штакельберга совпадает с равновесием в модели Курно? Изобразите эту ситуацию на диаграмме (в том числе поведение функций отклика).

3. Двое олигополистов имеют постоянные одинаковые предельные издержки равные 2. Предполагается, что они конкурируют как в модели Штакельберга. Спрос в отрасли задан обратной функцией спроса $P(Y) = 16 - 0.5Y$. Сколько суммарной прибыли они бы выиграли, если бы сумели объединиться в картель?

4. Рассмотрим дуополию, в которой у 1-й фирмы предельные издержки нулевые, а функция издержек 2-й фирмы равна

$$c_2(y) = \alpha y^2,$$

где $\alpha > 0$ — параметр. Обратная функция спроса в отрасли равна

$$P(Y) = 1 - Y.$$

Покажите, что при $\alpha \to \infty$ равновесие Курно сходится к равновесию Штакельберга в том смысле, что

$$\frac{y_1^S(\alpha)}{y_1^C(\alpha)} \to 1, \qquad \frac{y_2^S(\alpha)}{y_2^C(\alpha)} \to 1.$$

5. Докажите Теорему 28 (стр. 109), воспользовавшись указаниями, приведенными в тексте.

6. Докажите, что прибыль ведомого в модели Штакельберга при прочих равных условиях выше, чем в модели Курно, в слу-

чае возрастающей функции отклика и ниже в случае убывающей функции отклика.

7. Два олигополиста продают свою продукцию на рынках близких благ, выбирая объемы производства. Их обратные функции спроса равны $p_1 = 2 - y_1 + y_2$ и $p_2 = 3 - y_2 + y_1$, а предельные издержки равны 1 и 2 соответственно. Найти равновесие при одновременном и при последовательном выборе объемов производства.

3. Картель и сговор

В этом параграфе мы сравним результаты некооперативного поведения фирм в отрасли в соответствии с моделью Курно с результатами кооперативного поведения. Как известно, если количество фирм в отрасли мало, то они могут заключить между собой соглашение с целью ослабления конкуренции и увеличения прибыли. Мы начнем с анализа, который показывает, что у фирм, конкурирующих по Курно, есть потенциал для взаимовыгодного соглашения, а затем перейдем рассмотрению двух вариантов таких соглашений.

Неоптимальность равновесия Курно с точки зрения олигополистов

В равновесии Курно объем производства с точки зрения олигополистов неоптимален. Другими словами, если любая из фирм (немного) снизит свой выпуск, то общая прибыль вырастет. Этого уже достаточно, чтобы показать неоптимальность, ведь прирост прибыли можно перераспределить между олигополистами так, чтобы в конечном счете ни у кого из них прибыль бы не уменьшилась. Можно, однако, доказать более сильный факт: если по крайней мере два олигополиста уменьшат свой объем производства (на достаточно малую величину), то прибыль у всех олигополистов вырастет. Т.е. в данном случае не нужно никакого перераспределения прибыли, чтобы улучшить положение всех производителей.

Предположим, что объемы производства изменились на $dy_j \leqslant 0$, причем хотя бы для двух участников неравенство здесь строгое. Как при этом изменится прибыль j-го участника? Напомним, что прибыль j-го участника равна

$$\Pi_j(y_j) = p(\sum_{i=1}^{n} y_i) \cdot y_j - c_j(y_j).$$

Беря полный дифференциал в точке равновесия Курно, получим

$$d\Pi_j = p'(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) \cdot y_j^* \cdot (\sum_{i=1}^{n} dy_i) + p(\sum_{i=1}^{n} y_i) \cdot dy_j - c_j'(y_j^*) \cdot dy_j =$$
$$= p'(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) \cdot y_j^* \cdot (\sum_{i \neq j} dy_i) + \Big(p'(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) \cdot y_j^* + p(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) - c_j'(y_j^*)\Big) \cdot dy_j.$$

Из условия первого порядка следует, что второе слагаемое равно нулю. Поскольку по крайней мере два олигополиста уменьшили свой объем производства, то $\sum_{i \neq j} dy_i < 0$. При естественных предположениях, что функция спроса строго убывает и у всех монополистов объемы производства в равновесии Курно положительны, получим, что $d\Pi_j > 0$.[93]

Проиллюстрировать ситуацию и показать, что олигополия Курно выпускает больше оптимального количества продукции (с точки зрения ее участников) для случая дуополии можно графически (Рис. 64). Поскольку, как и в любой точке любой кривой отклика, в точке равновесия Курно касательные к кривым равной прибыли перпендикулярны друг другу, то возможен сдвиг, который увеличивает прибыль обоих олигополистов (на рисунке показан стрелкой).

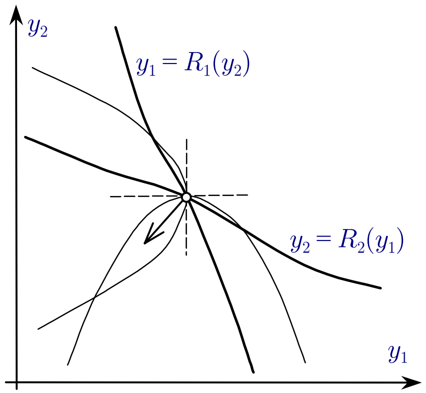


Рисунок 64

[93] Заметим, что поскольку дифференциалы прибыли всех участников отрицательны, то прибыль возрастает при достаточно небольшом (конечном) сокращении выпусков. Поэтому приведенное доказательство утверждения можно легко обобщить на случай конечных сокращений выпусков.

Сговор

Рассматривая возможности соглашений между олигополистами относительно объемов выпуска (квот на производство продукции) будем различать два случая — картель и сговор.

Если допустимо перераспределение прибыли между олигополистами, то им выгодно выбирать объемы производства, максимизирующие суммарную прибыль. Мы будем называть такое объединение **картелем**. [94]

Напротив, если такое перераспределение по каким-то причинам неосуществимо, то будем называть такой тип соглашений **сговором** о квотах выпуска.

Сначала мы рассмотрим модель сговора. Определим возможную точку сговора как точку $\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n \geqslant 0$, которая удовлетворяет двум условиям:

1) Каждый участник в точке сговора получает прибыль не меньшую, чем его прибыль в равновесии Курно:

$$\Pi_j(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) \geqslant \Pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*), \ \forall j.$$

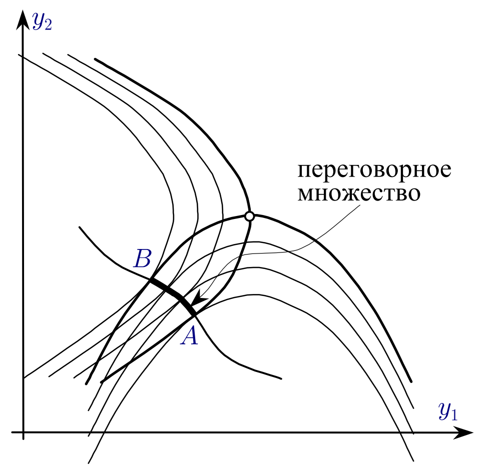


Рисунок 63

[94] В терминах кооперативной теории игр картель является точкой ядра в игре с трансферабельностью выигрышей. Имеется в виду ядро только с точки зрения целевых функций олигополистов.

2) точка сговора является эффективной (лежит на границе Парето[95] игры без перераспределения прибыли), то есть не существует другой точки $y_1, \ldots, y_n \geqslant 0$, дающей всем не меньшую прибыль, а по крайней мере одной из фирм — большую.

Как правило, таких точек может быть много (см. отрезок AB на Рис. 63). Назовем соответствующее множество **переговорным множеством**. Какая именно точка будет выбрана, зависит от процедуры переговоров и переговорной силы участников. Процедуру переговоров (торг) можно представлять как некоторую некооперативную игру, но эта игра остается за рамками модели.

Заметим также, что поскольку, вообще говоря, равновесий Курно может быть несколько, то переговорное множество зависит от того, какое из равновесий Курно участники считают за исходную точку (точку угрозы).

Как правило, сговор состоит в том, что участники договариваются о квотах выпуска для того, чтобы уменьшить суммарный выпуск и поднять рыночную цену. На Рис. 63 видно, что суммарный выпуск во всех точках переговорного множества ниже, чем в равновесии Курно: если через точку равновесия Курно провести прямую $y_1 + y_2 = y_1^* + y_2^*$, то переговорное множество будет лежать ниже этой прямой. Следующее утверждение формализует эту идею.

Теорема 32.
Пусть при сговоре все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $\check{y}_j > 0 \ \forall j$, и обратная функция спроса убывает. Тогда суммарный выпуск при сговоре не превышает суммарный выпуск в соответствующем равновесии Курно:

$$\check{Y} \leqslant Y^*,$$

а равновесная цена при сговоре не меньше цены в соответствующем равновесии Курно:

$$p(\check{Y}) \geqslant p(Y^*).$$

Доказательство.
По определению сговора, прибыль каждого участника не ниже, чем в равновесии Курно:

$$p(\check{Y})\,\check{y}_j - c_j(\check{y}_j) \geqslant p(Y^*)\,y_j^* - c_j(y_j^*)$$

[95] Имеется в виду Парето-граница олигополии, но не экономики в целом.

С другой стороны, при выборе $y_j = y_j^*$ участник j должен получить не меньшую прибыль, чем при выборе $y_j = \check{y}_j$, если суммарный выпуск остальных такой же, как в равновесии Курно (Y_{-j}^*):

$$p(Y^*)\,y_j^* - c_j(y_j^*) \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y})\,\check{y}_j - c_j(\check{y}_j).$$

Суммируя эти неравенства, получим

$$p(\check{Y})\,\check{y}_j \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y})\,\check{y}_j.$$

Мы предположили, что $\check{y}_j > 0$, поэтому

$$p(\check{Y}) \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y}).$$

Из убывания функции спроса $\check{Y}_{-j} \leqslant Y_{-j}^*$. Это неравенство верно для всех j. Суммируя эти неравенства и деля на $n-1$, получаем

$$\check{Y} \leqslant Y^*.$$

■

Дифференциальная характеристика точки сговора может быть получена из задачи поиска Парето-оптимума без перераспределения прибыли.[96] Точка $\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n \geqslant 0$ Парето-оптимальна, если для любого j она является решением задачи

$$\Pi_j(y_1, \ldots, y_n) \to \max$$
$$\Pi_i(y_1, \ldots, y_n) \geqslant \Pi_i(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n),\ i \neq j.$$
$$y_1, \ldots, y_n \geqslant 0.$$

По теореме Куна-Таккера[97] для внутреннего решения $\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n > 0$ существуют множители Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, причем $\lambda_j = 1$, такие что выполнены условия первого порядка:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) = 0 \ \forall k.$$

В случае двух фирм эта дифференциальная характеристика означает, что кривые равной прибыли касаются друг друга (см. Рис. 63). Дифференциальную характеристику можно переписать в виде:

$$p'(\check{Y}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \check{y}_i + \lambda_k [p(\check{Y}) - c_k'(\check{y}_k)] = 0 \ \ \forall k.$$

[96] Условие, что каждый участник получает прибыль не меньшую, чем в равновесии Курно здесь не учитывается.

[97] Если функции прибыли вогнуты, и выпуск $\check{y}_j > 0$ то возможно уменьшить его, увеличив тем самым прибыль прочих участников. Это означает, что выполнено условие Слейтера и теорема Куна-Таккера применима.

Поскольку $\lambda_j = 1$, то из убывания функции спроса следует, что первое слагаемое не равно нулю, и что все множители Лагранжа положительны.

Пользуясь этими соотношениями, докажем, что сговор неустойчив, если нет каких-то механизмов, принуждающих к выполнению соглашений. Конкретнее, подразумевается, что если в точке сговора любая фирма немного увеличит свой выпуск, то ее прибыль возрастет.

Теорема 33.
Пусть
1) при сговоре все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $\check{y}_j > 0\ \forall j$,
2) обратная функция спроса убывает и дифференцируема, причем $p'(\check{Y}) < 0$;
3) функции издержек дифференцируемы,
4) функции прибыли вогнуты.
Тогда в точке сговора

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) > 0\ \forall k.$$

Доказательство.

Пользуясь дифференциальной характеристикой внутренней точки сговора и положительностью всех множителей Лагранжа, получим

$$\lambda_k \frac{\partial \Pi_k}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) = -\sum_{i \neq k} \lambda_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) = -p'(\check{Y}) \cdot \sum_{i \neq k} \lambda_i \check{y}_i > 0\ \forall k.$$

■

Картель

Рассмотрим теперь модель картеля. Поскольку фирмы могут перераспределять прибыль и целевые функции олигополистов квазилинейны по деньгам, то максимум суммарной прибыли есть Парето-оптимум олигополии. Фактически, картель действует как монополия, однако, следует несколько изменить модель, по сравнению со случаем обычной монополии, поскольку у каждой из входящих в картель фирм своя функция издержек. Суммарная прибыль равна

$$\sum_{j=1}^{n} \Pi_j = p(Y)\, Y - \sum_{j=1}^{n} c_j(y_j),$$

где $Y = y_1 + \ldots + y_n$ — суммарный объем производства. Продифференцировав по выпускам всех фирм, получим дифференциальную характеристику равновесия картеля:

$$p(Y^{\kappa}) + p'(Y^{\kappa})Y^{\kappa} \leqslant c'_j(y_j^{\kappa}),$$
$$p(Y^{\kappa}) + p'(Y^{\kappa})Y^{\kappa} = c'_j(y_j^{\kappa}), \text{ если } y_j^{\kappa} > 0.$$

Как видим, картель так распределит объемы производства между предприятиями при положительных объемах выпуска, чтобы предельные издержки были равными.[98] Так, если $c'_j(y_j) = c_j$, то совокупный выпуск отрасли совпадает с равновесием при монополии, когда предельные издержки монополиста равны

$$c = \min_j c_j.$$

Пример 17.

Пусть как и в Примере 14 обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек имеют вид $c_j(y_j) = cy_j$. Объем производства картеля определяется соотношением

$$p(Y^{\kappa}) + p'(Y^{\kappa})Y^{\kappa} = a - bY^{\kappa} - bY^{\kappa} = c = c'_j(y_j^{\kappa}).$$

Таким образом, он равен

$$Y^{\kappa} = \frac{a-c}{2b},$$

а прибыль картеля равна

$$(a - bY^{\kappa})Y^{\kappa} - c\,Y^{\kappa} = \frac{(a-c)^2}{4b}.$$

В равновесии Курно, как мы показали в Примере 14, суммарный объем производства равен

$$Y^* = \frac{n\,(a-c)}{(n+1)\,b}$$

а суммарная прибыль, как несложно рассчитать, равна

$$\frac{n\,(a-c)^2}{(n+1)^2\,b},$$

откуда ясна неоптимальность равновесия Курно с точки зрения производителей. Они могли бы получать больше прибыли, если бы производили меньше. ⇦

Используя ту же логику доказательства, как в Теоремах 26 и 27, можно показать, что олигополисты будут производить меньше, если объединятся в картель, чем если они будут конкурировать по Курно (здесь, как и ранее, мы предполагаем равенство функций издержек у всех олигополистов). Доказательство соот-

---

[98] Отметим, что это также означает такое распределение выпуска среди участников картеля, которое минимизирует суммарные издержки.

ветствующей теоремы оставляется читателю в качестве упражнения. Аналогичное утверждение верно и без требования равенства функций издержек, но с сильными предположениями о функции выручки.[99]

Теорема 34.
Пусть
1) равновесия в модели Курно и модели картеля существуют и все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $y_j^{\kappa} > 0\ \forall j$,
2) обратная функция спроса убывает и дифференцируема,
функция выручки $p(y)y$ вогнута,
3) функции издержек $c_j(\cdot)$ дифференцируемы и выпуклы,
Тогда в точке картеля суммарный выпуск меньше, чем в равновесии Курно:
$$Y^* > Y^{\kappa}.$$

В общем случае ничего определенного относительно соотношения между объемом выпуска картеля и выпуском в равновесии Курно сказать нельзя. Ниже приводится пример, когда картель выпускает больший объем продукции, чем в одном из (трех) равновесий Курно.

Пример 18.
Пусть в отрасли функция обратного спроса равна
$$p(y) = 9 - y$$
и есть два производителя с одинаковыми функциями издержек
$$c(y) = \begin{cases} 6y - \frac{3}{4}y^2, & y \leqslant 4, \\ 12, & y \geqslant 4. \end{cases}$$
В этой отрасли есть 3 равновесия Курно: $(2, 2)$, $(0, 9/2)$ и $(9/2, 0)$. Максимум прибыли картеля достигается в точках $(0, 9/2)$ и $(9/2, 0)$. Видно, что в симметричном равновесии $(2, 2)$ выпуск меньше, чем у картеля. ⇦

[99] См. Elmar Wolfstetter, "Oligopoly and industrial organization," *Humboldt-Discussion Paper*, August 1995.

Заметим, что хотя в данном примере функция издержек недифференцируема, ее легко модифицировать, сгладив в окрестности точки $y = 4$. По-видимому, основная причина полученного результата состоит в том, что в этом примере имеет место возрастающая отдача.

Ясно, что так же как и рассмотренный ранее сговор, картель является неустойчивым, если нет способа гарантировать выполнение соглашения между фирмами.

Теорема 35.
Пусть
1) в картеле все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $y_j^{\kappa} > 0\ \forall j$,
2) обратная функция спроса убывает и дифференцируема,
3) функции издержек дифференцируемы.
Тогда в точке картеля
$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial y_j}(y_1^{\kappa}, \ldots, y_n^{\kappa}) > 0\ \forall j,$$
т.е. каждая фирма может повысить свою прибыль, увеличив свой выпуск.

Доказательство.
Производная функции прибыли j-го участника по своему выпуску равна
$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial y_j} = p(Y) + p'(Y)\,y_j - c'_j(y_j).$$
Учитывая дифференциальную характеристику точки $(y_1^{\kappa}, \ldots, y_n^{\kappa})$,
$$p(Y^{\kappa}) + p'(Y^{\kappa})Y^{\kappa} = c_j'(y_j^{\kappa}),$$
имеем
$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial y_j}(y_1^{\kappa}, \ldots, y_n^{\kappa}) = -p'(Y^{\kappa})(Y^{\kappa} - y_j^{\kappa}) > 0.$$
Таким образом, если достигнуто соглашение о квотах выпуска ($y_j = y_j^{\kappa}$), максимизирующих суммарную прибыль, то каждой фирме выгодно (по крайней мере локально) производить больше своей квоты. ■

Задачи

1. Докажите, что если во внутреннем равновесии Курно один из олигополистов немного уменьшит объем производства, то суммарная прибыль возрастет.

2. Сформулируйте и докажите теорему о существовании равновесия в случае картеля. (Подсказка: воспользуйтесь аналогичной теоремой в главе о монополии. Пусть существуют $\tilde{y}_j > 0$ $j = 1, \ldots, n$ такие, что $p(y_j) < c_j'(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$. Докажите, что при любых выбранных выпусках всех производителей, кроме j-го, картелю не выгодно j-му производителю назначать выпуск больше $\tilde{y}_j$, поскольку суммарная прибыль тогда будет строго меньше, чем при выпуске $y_j = \tilde{y}_j$. При этом удобно рассматривать выбор суммарного объема производства, Y, при фиксированном Y_{-j}, при ограничении $Y \geqslant Y_{-j}$.)

3. Докажите аналог Теоремы 27 для модели картеля с одинаковыми функциями издержек.

4. Покажите, что если в дуополии предельные издержки производителей удовлетворяют соотношению

$$c_1'(y) > c_2'(y),$$

то при объединении в картель первый производит меньше, чем второй.

5. Рассмотрите дуопольную отрасль. Пусть обратная функция спроса имеет вид

$$p(Y) = \frac{4}{1+Y},$$

а функции издержек у обоих производителей линейны:

$$c_j(y_j) = y_j.$$

Показать, что в равновесии Курно участники будут выпускать в сумме больше, чем при объединении в картель, и получать меньшую общую прибыль.

6. Двое олигополистов имеют постоянные одинаковые предельные издержки, равные 1, и конкурируют как в модели Курно. Спрос в отрасли задается обратной функцией спроса $p(Y) = 5 - 2Y$. Сколько суммарной прибыли они бы выиграли, если бы сумели объединиться в картель?

7. Пусть на олигополистическом рынке функционируют три олигополиста с функциями издержек $c_1(y_1) = \frac{y_1^2}{2}$, $c_2(y_2) = \frac{y_2^2}{4}$ и $c_3(y_3) = \frac{y_3^2}{6}$. Обратная функция спроса на продукцию олигополистов имеет вид $p(Y) = 1 - Y$. Найдите равновесие Курно и покажите, что это равновесие не оптимально, подобрав такие изменения выпусков олигополистов, чтобы прибыль каждого выросла. Покажите, что картельное соглашение между этими участниками неустойчиво, то есть каждый участник нарушив его получит большую прибыль.

8. Докажите Теорему 34.

4. Модель Бертрана

Модель Курно часто критиковали за то, что ее посылки (решение об объемах производства, а не о ценах) плохо согласуются с каждодневными наблюдениями.

Некоторые ранние критики этой модели говорили, что эту реалистичную картину убывания олигополистической власти (или рыночной власти) олигополистов модель Курно дает по ложным причинам, т.к. естественным состоянием олигополистической отрасли является состояние **ценовой конкуренции**. На реальных олигополистических рынках производители в основном конкурируют, используя в качестве инструментов цены, по которым они продают свою продукцию. Исходя из этого, естественной альтернативой модели Курно для описания конкуренции на олигополистическом рынке должна быть модель описывающая состояние и динамику рынка в терминах ценовой конкуренции. Такая модель была предложена Жозе́фом Бертраном, в ней производители принимают (одновременно) решения о ценах продаж.[100]

В **модели Бертрана** предполагается, что олигополисты производят однородную продукцию с постоянными предельными издержками, одинаковыми для всех производителей. Стратегиями

---

[100] Bertrand, J. (1883). “Theorie mathematique de la richesse sociale”. *Journal de Savants*, **67**, 499-508.

участников являются назначаемые цены p_j. Поскольку при ценах ниже предельных издержек любой производитель несет убытки при любом положительном объеме продаж, естественно предполагать, что выбираемые им цены p_j удовлетворяют ограничению $p_j \geqslant c$.

Когда речь идет о ценовой конкуренции, то удобно бывает рассматривать функцию спроса на продукцию отдельной фирмы, которая в данном случае зависит как от собственной цены, p_j, так и от цен, назначенных другими, p_{-j}:

$$y_j = D_j(p_j, p_{-j}), p_j \geqslant c.$$

При этом предполагается (что представляется естественным при анализе рынков однородной продукции), что:

1) Если цена, назначенная фирмой, выше цены любого другого участника, то фирма столкнется с нулевым спросом и не сможет продать свою продукцию: $y_j = 0$ (происходит полное переключение спроса).

2) Группа из k фирм, назначившая минимальную цену (p_{min}), обслужит весь спрос и разделит рынок поровну[101]

$$y_j = \frac{D(p_{min})}{k},$$

где $D(\cdot)$ — функция спроса. В том числе, если такая фирма одна, то $y_j = D(p_{min})$.

3) Предельные издержки всех олигополистов одинаковы и не зависят от объема производства:

$$c_j'(y) = c, \forall j, \forall y \geqslant 0.$$

Как и ранее, считаем фиксированные издержки уже сделанными и невозвратимыми (это отражено дифференцируемостью c в нуле).

Используя вышеприведенные предположения, получим характеристики равновесия для олигополистического рынка, соответствующие модели (гипотезам) Бертрана.

[101] Нижеприведенный результат, остается справедлив при любой схеме разделения рынка с одним лишь ограничением: спрос на продукцию каждой из этих фирм не равен нулю.

Теорема 36.

Состояние, в котором хотя бы два олигополиста установят цены на уровне предельных издержек ($p_j = c$),[102] является равновесием Нэша в модели Бертрана.

Если функция спроса $D(p)$ не возрастает, непрерывна в окрестности c, и $D(c) > 0$, тогда других равновесий нет.

Доказательство.

Проверим, что описанное выше состояние является равновесием. Рассмотрим решение какого-либо олигополиста.

Докажем, что равновесие не может установиться ни в какой другой точке. Предположим, что в равновесии у всех производителей $p_j > c$. Рассмотрим, хотя бы одного из тех олигополистов, кто обслуживал не весь рынок (а такие найдутся). Найдется $\hat{p} \in [c,\ p_{min}]$, такое, что если он понизит цену до этой величины, то есть оставляя цену выше предельных издержек c, но ниже p_{min}, то он сразу же получит весь объем спроса, скачкообразно увеличив объем. У него прибыль в результате вырастет (объем окажется положителен при некоторой цене $\hat{p} \geqslant c$, при наших предположениях). Таким образом это не равновесие. Следовательно, в равновесии хотя бы один из олигополистов установит цену, равную предельным издержкам.

Докажем теперь, что в равновесии по крайней мере два олигополиста установят цену на уровне предельных издержек. Пусть это не так. Тогда тот, кто установил $p_j = c$, может увеличить свою прибыль, немного повысив цену, так, чтобы ему все еще доставался весь спрос. Итак, иных равновесий, кроме названных в начале параграфа, быть не может. ■

Мы видим, что в равновесии Бертрана цена, по которой продается продукция, равна предельным издержкам, что соответствует ситуации конкурентного равновесия. Как следует из этого, присутствие по крайней мере двух производителей достаточно для того, чтобы отрасль функционировала в режиме совершенной конкуренции и равновесие было Парето-оптимальным. Таким образом, если верить модели, монопольная власть – редкий феномен и встречается только в ситуации, когда есть всего один производитель продукции. По-видимому, этот вывод не согласу-

[102] По существу, это конкурентное равновесие. Назначившие большую цену выпускают ноль.

ется с действительностью. Кроме того, крайне интенсивная ценовая конкуренция приводящая олигополистический рынок к ситуации равновесия эквивалентного равновесию совершенной конкуренции в целом -- также представляется не слишком реалистичной. Поэтому выводы, следующие из анализа вышеприведенной модели, получили название **парадокса Бертрана**.

В силу этого парадокса попытку Бертрана переосмыслить концепцию олигополистического равновесия трудно признать полностью удавшейся. Поэтому были предприняты серьезные попытки модифицировать модель Бертрана так, чтобы выводы из нее более соответствовали реальными наблюдениям, т.е. с тем, что монопольная власть на рынке не исчезала бы при наличии всего двух конкурентов в отрасли.

Заметим, что наиболее существенными недостатками модели Бертрана являются:

❁ В модели Бертрана предполагается, что производится и продается однородная продукция. Поэтому возникает жесткость олигополистической конкуренции.

❁ Вторoе специфическое свойство модели Бертрана — это предположение об отсутствии ограничений на объемы производства, или в более слабом виде: специфическое предположение о независимости предельных издержек любого производителя от объемов производства. Как только мы вводим предположение о зависимости предельных издержек от объемов производства, то мы не получаем изящный результат о том, что единственное состояние равновесия — это равновесие, при котором цены равны предельным издержкам.

❁ Модель Бертрана в классической постановке, имеет статический характер. Принятие во внимание некоторых стратегических соображений, связанных с конкуренцией в различные интервалы времени (точнее с нетривиальными последовательностями ходов конкурентов), приводит к ослаблению выводов о жесткости конкуренции в модели Бертрана.

Для преодоления этих недостатков рассмотрим ниже следующие модификации традиционной модели Бертрана:

1. Продуктовая дифференциация (ослабляющая ценовую конкуренцию).

2. Нелинейность издержек, делающая для олигополиста невыгодным производить продукцию в объеме спроса, с которым он сталкивается.

3. Динамические модели, принимающие во внимание многоходовые соображения производителей.

Продуктовая дифференциация и ценовая конкуренция

Мы рассмотрели модели олигополии, в которых фирмы производили один и тот же товар. Теперь рассмотрим более распространенный случай, когда продукция фирм не вполне взаимозаменяема, т.е. случай так называемых **дифференцированных благ**.[103] Это означает, что производители действуют на взаимосвязанных рынках близких продуктов, которые различаются хотя бы по упаковке и потребитель способен покупать их по разным ценам p_j. В этой модели следует ввести отдельную функцию спроса на продукцию каждой фирмы $y_j = D_j(p_j, \boldsymbol{p}_{-j})$, которая зависит от собственной цены p_j и от цен конкурентов $\boldsymbol{p}_{-j}$. Естественно предположить, что эластичность спроса по собственной цене отрицательна ($\varepsilon_{jj} < 0$), а по ценам конкурентов положительна ($\varepsilon_{ij} = \frac{dD_i}{dp_j}\frac{p_j}{y_i} > 0$ при $i \neq j$, т.е. блага взаимозаменяемые)[104]. Предположим по-прежнему, что каждый потребитель имеет функцию издержек вида $c(y) = c\,y$.

Доказательство *существования* равновесия в этой модели в целом сходно с доказательством существования равновесия в модели Курно и читателю предлагается сформулировать и доказать этот результат самостоятельно в Задаче 2 (стр. 127).

Отличие рассматриваемой модели от классической модели Бертрана заключается в том, что спрос переключается к понижающему цену конкуренту не с бесконечной эластичностью. Поскольку участники не учитывают, как их действия влияют на других, то их поведение соответствует модели простой монополии, и *дифференциальная характеристика* внутреннего равновесия имеет такой же вид:

$$D_j(p_j, \boldsymbol{p}_{-j}) + \frac{dD_j}{dp_j}(p_j, \boldsymbol{p}_{-j})\,p_j = \frac{dD_j}{dp_j}(p_j, \boldsymbol{p}_{-j})\,c$$

или

---

[103] Chemberlin, E.H. (1933) *The Theory of Monopolistic Competition*.

[104] Эта же модель подходит и когда фирмы производят не взаимозаменяемые (субституты), а взаимодополняющие (комплементы) блага.

$$\left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{jj}|}\right)p_j = c.$$

Из этих условий следует, что в рассматриваемой модели равновесные цены превышают предельные издержки, несмотря на то, что, как и в обычной модели Бертрана, предельные издержки предполагаются равными между собой и постоянными.

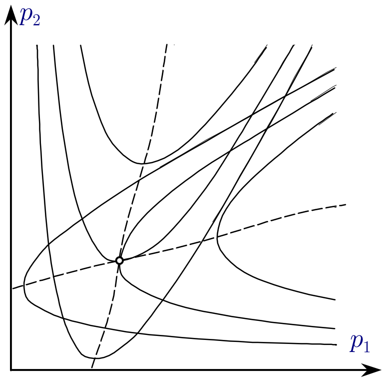


Рисунок 65

С другой стороны, при росте эластичности индивидуального спроса достающегося каждой фирме, равновесие в данной модели приближается к равновесию в модели Бертрана, и в пределе они совпадают. Таким образом, модель Бертрана можно рассматривать как крайний случай рассмотренной модели.

Дуополию такого вида можно изобразить на диаграмме, аналогичной Рис. 57 для дуополии Курно. Только по осям должны стоять не объемы производства, а цены, и кривые равной прибыли будут развернуты в противоположную сторону. Равновесием будет точка пересечения кривых отклика (см. Рис. 65). Вообще, аналогия с моделью Курно очень близкая, отличие в более сложной, чем в модели Курно, зависимости прибылей от действий конкурентов.

Если бы каждая фирма немного повысила свою цену, то общая прибыль возросла бы. Поэтому равновесие при монополистической конкуренции не оптимально с точки зрения олигополистов. Они могли бы объединиться в картель, и такой картель по сути являлся бы дискриминирующей монополией. В отличие от рассмотренного ранее случая перекрестные эластичности не равны нулю, поэтому максимум прибыли достигается при выполнении условий

$$D_j(\boldsymbol{p}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{dD_i}{dp_j}(\boldsymbol{p})\,(p_i - c) = 0.$$

или, в терминах эластичностей

$$p_j\left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{jj}|}\right) - \sum_{i\neq j}(p_i - c)\frac{\varepsilon_{ij}}{|\varepsilon_{jj}|}\frac{D_i(\boldsymbol{p})}{D_j(\boldsymbol{p})} = c.$$

Из сравнения дифференциальных характеристик очевидно (при естественных предположениях) несовпадение некооперативного равновесия и картельного решения. Установить, больше ли все цены картеля тех цен, которые установятся при некооперативном поведении — нетривиальная задача.

Пример 19.

В ситуации ценовой конкуренции двух производителей (например, Кока-колы и Пепси-колы) спрос на товар первого равен

$$y_1(p_1, p_2) = \frac{p_2^{\beta}}{p_1^{\alpha+1}},$$

спрос на товар второго

$$y_2(p_1, p_2) = \frac{p_1^{\beta}}{p_2^{\alpha+1}},$$

затраты обоих линейны $c_j(y_j) = cy_j$ ($\alpha, \beta, c > 0$, $\beta < \alpha$). Эти функции спроса характеризуются постоянными эластичностями:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -(\alpha + 1).$$

Подставив эти эластичности в условия первого порядка равновесия, получим решение

$$p_1 = p_2 = \frac{(\alpha+1)\,c}{\alpha}.$$

Видим, что в данном примере предприятия имеют доминирующие стратегии — назначить цену на уровне $(\alpha+1)\,c/\alpha$ вне зависимости от выбора конкурента. При этом равновесные объемы производства будут равны

$$y_1 = y_2 = \left(\frac{(\alpha+1)\,c}{\alpha}\right)^{\alpha+1-\beta}.$$

Функции отклика, соответствующие доминирующим стратегиям, на рисунке будут выглядеть как прямые, параллельные осям.

Если предприятия объединятся в картель, то, учитывая, что $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \beta$, из дифференциальной характеристики равновесия картеля найдем, что этот картель установил бы более высокие цены

$$p_j = \frac{(\alpha+1-\beta)\,c}{\alpha-\beta},$$

при более низких объемах производства

$$y_1 = y_2 = \left(\frac{\alpha-\beta}{(\alpha+1-\beta)\,c}\right)^{\alpha+1-\beta}. \quad ⇦$$

Модель Бертрана при возрастающих предельных издержках

Рассмотрим теперь, что произойдет, если мы откажемся от предположения о постоянстве предельных издержек при анализе ценовой конкуренции. Будем исходить из стандартного предположения об убывающей отдаче от масштаба, то есть предполагать, что предельные издержки возрастают и положительны. Кроме того, для упрощения будем предполагать, что предельные издержки возрастают неограниченно. Аналог равновесия Бертрана для случая растущих предельных издержек был бы таков: продукция продавалась бы всеми фирмами по одной и той же цене, и цена равнялась бы предельным издержкам. Мы покажем здесь однако, что при сделанных предположениях о функциях издержек описанное состояние не может соответствовать равновесию в модели ценовой конкуренции.

Обсуждение гипотез модели

Согласно предположениям Бертрана, если некоторая фирма устанавливает самую низкую цену, то все желают купить у нее. Эффективный спрос, с которым она сталкивается, совпадает с совокупным спросом. В модели Бертрана, если фирма установит цену ниже, чем цены конкурентов, и выше, чем предельные издержки, то в ее интересах и возможностях *полностью* удовлетворить спрос при данной цене. В случае же растущих предельных издержек фирма с минимальной ценой не обязательно удовлетворяет весь рыночный спрос.

Как известно, если фирма j с возрастающими предельными издержками сталкивается с фиксированной ценой p_j ($p_j \geqslant c_j'(0)$) за производимую ею продукцию, то ей выгодно выбрать такой объем производства y_j, чтобы предельные издержки были равны цене:

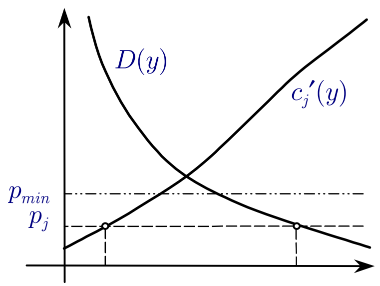


Рисунок 66

$$c_j'(y_j) = p_j.$$

Таким образом, если фирма установит цену ниже, чем цены конкурентов, то ей может оказаться невыгодным производить продукцию в количестве, равном емкости рынка при данной цене. Такая ситуация изображена на Рис. 66, где через p_{min} обозначена минимальная из цен конкурентов. Если не предполагать, что олигополист, устанавливая цену, обязуется продать по данной цене любое количество блага, на которое будет предъявлен спрос, то помимо решения о выборе *цены* следует также рассмотреть вопрос о выборе производимого *количества* блага. В этом состоит принципиальное отличие от стандартной модели Бертрана, в которой выбор количества не рассматривается, поскольку в рамках этой модели всегда выгодно производить столько, сколько можно продать.

С точки зрения теории игр можно рассматривать модель Бертрана как редуцированную игру. Исходная игра при этом является динамической, и в ней олигополисты сначала выбирают цены, а затем количества, причем фирма с минимальной ценой осуществляет выбор первой, поскольку потребители в первую очередь обращаются к ней. В случае постоянных предельных издержек можно было ограничится анализом редуцированной игры, в рассматриваемом же случае приходится анализировать полную динамическую игру.

В рассматриваемой нами модели, если участник, назначивший наименьшую цену, сочтет невыгодным полностью удовлетворять весь предъявляемый при этой цене спрос, то на рынке останется неудовлетворенный (остаточный) спрос. Величина его зависит от того, какие потребители приобретут продукцию производителя, назначившего наименьшую цену, т.е. от выбранной этим производителем **схемы рационирования**.[105] Данную проблему можно назвать *проблемой рационирования*. Процесс рационирования может осуществляться разными способами. Очевидно, что равновесие, в общем случае, должно зависеть от схемы рационирования. В то же время, на прибыль олигополиста назначившего наименьшую цену, не влияет то, какую схему он будет использовать, хотя выбранная им схема определяет величину остаточного спроса и, тем самым, величину прибыли других олигополистов.

[105] Сам термин «рационирование» не очень удачен. Здесь скорее имеется в виду структура распределения проданного количества блага между потребителями — какое количество потребит в конечном итоге каждый потребитель.

В этом параграфе мы не рассматриваем подробно характеристики равновесия в данной ситуации. Наша цель здесь продемонстрировать, что вне зависимости от схемы рационирования ценообразование по предельным издержкам не может быть равновесием.

Для упрощения мы будем проводить анализ для случая двух фирм. При большем количестве фирм выводы не изменятся, но рассуждения станут более сложными. Предположим, что первая фирма установила более низкую цену ($p_1 < p_2$) и продала y_1 единиц блага. При этом вторая фирма сталкивается с неким остаточным спросом, который мы обозначим через D_2. Этот остаточный спрос зависит как от количества блага, проданного первой фирмой, так и от назначенных цен: $D_2 = D_2(p_2, y_1, p_1)$.

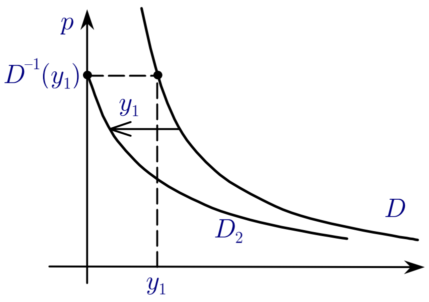


Рисунок 68

Конкретный вид функции D_2 определяется предполагаемой схемой рационирования.

Будем считать, что функция остаточного спроса $D_2(p_2, y_1, p_1)$ определена при всех неотрицательных значениях p_1, p_2 и y_1 (а не только при $p_1 < p_2$). Естественными требованиями к функции остаточного спроса являются ее невозрастание по p_2 [106] и условие

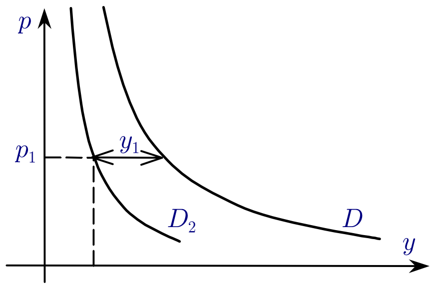


Рисунок 67

$$D_2(p, y_1, p) = D(p) - y_1.$$

Ниже приводится описание двух наиболее простых и естественных вариантов рационирования — пропорционального и эффективного рационирования.

[106] Это требование довольно естественно, если предположить невозрастание функции спроса $D(p)$ по p.

При **пропорциональном рационировании** остаточный спрос при каждой цене составляет одну и ту же долю исходного спроса:

$$D_2(p_2, y_1, p_1) = \frac{D(p_1) - y_1}{D(p_1)} D(p_2).$$

Такое рационирование может быть результатом того, что все потребители с одинаковой вероятностью попадают в число тех, кто смог купить товар у первой фирмы. При этом дополнительно предполагается, либо что предпочтения у всех одинаковые, либо что благо неделимое, и все потребители потребляют не более единицы. Потребителей должно быть «достаточно много».[107] Кроме того, следует учитывать, что такая схема рационирования возможна только в том случае, если потребители по каким-либо причинам не перепродают друг другу товары (отсутствует арбитраж)[108].

Рис. 67 иллюстрирует случай такого «справедливого» рационирования. График остаточного спроса получается из графика исходного спроса пропорциональным сжатием по горизонтали в направлении оси.

При **эффективном рационировании** продукцию по более низким ценам покупают те, кто более высоко ее ценит. В этом случае остаточный спрос получается параллельным сдвигом кривой спроса на величину y_1. Эту схему легко проиллюстрировать в ситуации, когда каждый потребитель хотел бы купить единицу блага. Тогда, если у нас есть 15 покупателей, а первая фирма производит только 5 единиц, то эти 5 единиц покупают те 5 из них, которые ценят данное благо выше, чем каждый из остальных десяти потребителей.

Хотя описанное ранее пропорциональное рационирование кажется на первый взгляд более правдоподобным, однако эффективное рационирование тоже можно обосновать. Этот способ рационирования хорошо отражает положение дел в ситуации, когда без издержек можно перепродать благо (возможен арбитраж). Тогда, если это благо случайно купил потребитель, который ценит его ниже p_2, он перепродаст ее тем, кому оно не досталась, но кто готов предложить за нее более высокую цену. Таким обра-

[107] Строго говоря, должен быть усредненным спросом бесконечного множества (континуума) потребителей.

[108] При наличие арбитража зависимость остаточного спроса от выпуска производителя в общем случае не может описываться вышеприведенной формулой.

зом, при наличии арбитража (без дополнительных затрат на сделки) любой другой способ рационирования должен в конечном итоге свестись к эффективному рационированию.

Как несложно понять, при таком способе рационирования

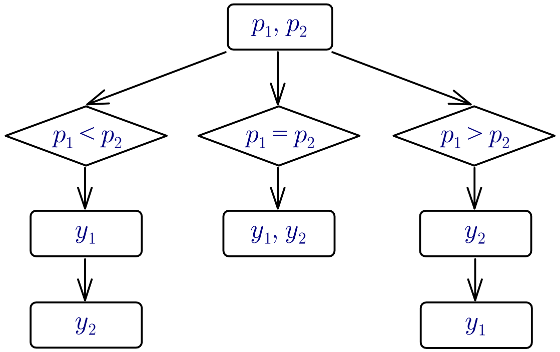


Рисунок 69

остаточный спрос с которым сталкивается вторая фирма, будет равен (при $D(p_2) \geqslant y_1$)

$$D_2(p_2, y_1, p_1) = D(p_2) - y_1$$

Из совокупного спроса $D(p_2)$ мы вычитаем то количество, которое продала первая фирма, и получаем остаточный спрос, с которым сталкивается вторая фирма. Эта формула подходит только если второй назначит такую цену, что $D(p_2) \geqslant y_1$. Если же $D(p_2) < y_1$, то величина остаточного спроса окажется равной нулю, поскольку по предположению те потребители, которые ценят товар выше $D^{-1}(y_1)$, уже приобрели товар. Таким образом, остаточная функция спроса имеет следующий вид:

$$D_2(p_2) = \begin{cases} D(p_2) - y_1, & \text{если } p_2 \leqslant D^{-1}(y_1), \\ 0, & \text{если } p_2 \geqslant D^{-1}(y_1). \end{cases}$$

Нахождение остаточного спроса при эффективном рационировании иллюстрирует Рис. 68. Остаточный спрос получается из общего спроса параллельным горизонтальным сдвигом на величину y_1.

С точки зрения благосостояния эффективное рационирование — это такое рационирование, при котором среди всех возможных вариантов рационирования (распределения между потребителями количества y_1) благосостояние совокупности потребителей максимально (отсюда сам термин).

Модель

В случае двух производителей, имеющих возрастающие предельные издержки, получаем модель, последовательность ходов в которой можно описать следующим образом:

1) Участники одновременно выбирают цены, p_1 и p_2.

2) Если один из участников, например первый, назначает более низкую цену ($p_1 < p_2$), то этот участник выбирает объем производства, y_1. Другой участник тогда сталкивается с остаточным спросом, соответствующим имеющейся схеме рационирования. Учитывая этот остаточный спрос, он выбирает объем производства y_2. Если же выбранные цены совпадают ($p_1 = p_2 = p$), то участники одновременно выбирают объемы производства, y_1 и y_2. При этом если суммарный объем производства оказался превышающим спрос при данной цене ($y_1 + y_2 > D(p)$), то спрос распределяется поровну между участниками.

Схема игры представлена на Рис. 69. Это не полное дерево игры, а только условное описание последовательности ходов.

Стратегией каждого участника является описание его действий в зависимости от предыстории игры. В данном случае стратегией j-го участника является набор

$$(p_j, \mathcal{Y}_j^{<}(p_j, p_{-j}), \mathcal{Y}_j^{=}(p_j, p_{-j}), \mathcal{Y}_j^{>}(p_j, p_{-j}, y_{-j})),$$

где первая компонента — выбранная цена, а остальные представляют собой функции (не обязательно оптимального) отклика на предшествующие действия свои и партнера. Здесь $\mathcal{Y}_j^{<}$ обозначает количество, которое выбирает первая фирма, если ее цена оказывается ниже цены конкурента, $\mathcal{Y}_j^{>}$ — если ниже, $\mathcal{Y}_j^{=}$ — в случае совпадения цен.

Как обычно, в качестве концепции решения мы рассматриваем совершенное в подыграх равновесие, то есть такую пару стратегий, которая порождает равновесие Нэша в каждой подыгре. Выигрыш участника определяется некоторой функцией Π_j, которая зависит от четырех аргументов — цен и объемов, выбранных участниками в ходе игры. Мы не будем приводить функцию $\Pi_j(p_1, p_2, y_1, y_2)$ в явном виде; ее несложно построить по описанию модели.

С целью упрощения анализа модели ее удобно редуцировать, заменив $\mathcal{Y}_j^{<}(\cdot)$, $\mathcal{Y}_j^{=}(\cdot)$ и $\mathcal{Y}_j^{>}(\cdot)$ на соответствующие функции оптимального отклика, которые можно обозначить через $R_j^{<}(\cdot)$, $R_j^{=}(\cdot)$ и $R_j^{>}(\cdot)$. Эти функции показывают объем производства, который производителю выгодно выбрать при данной предыстории игры.

Редуцированная модель будет статической игрой, в которой участники выбирают только цены p_1 и p_2.

Сравнение с равновесием Бертрана

Рассмотрим вектор цен и выпусков $(\bar{p},\ \bar{p},\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2)$, такой что предельные издержки у обоих олигополистов равны цене:

$$c_1'(\bar{y}_1) = \bar{p} \quad \text{и} \quad c_2'(\bar{y}_2) = \bar{p},$$

а суммарное производство полностью удовлетворяет спрос при этих ценах:

$$D(\bar{p}) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2.$$

Этот исход естественно считать аналогом равновесия Бертрана.

Мы хотим показать, что набор стратегий $(\bar{p},\ \bar{p})$ не может соответствовать равновесию в редуцированной модели. Причина этого заключается в том, что каждый производитель заинтересован увеличить цену, уменьшив объем продаж. Сокращение прибыли от уменьшения объема продаж в первом приближении перекрывается эффектом увеличения цены.

Графическая иллюстрация этих рассуждений приведена на Рис. 70. Прибыль второй фирмы равна площади между кривой ее предельных издержек и ценой (плюс постоянные издержки $c_2(0)$). Если вторая фирма немного повысит свою цену с $\bar{p}$ до p_2, то ее прибыль, с одной стороны, вырастет за счет этого на величину прямоугольника A, а, с другой стороны, упадет за счет сокращения объема продаж на величину треугольника B. При малом изменении цены первый эффект превышает второй, что и видно из графика.

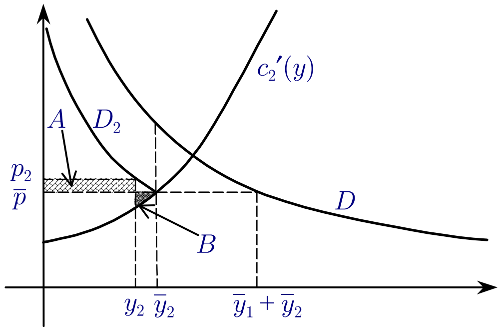


Рисунок 70

Теперь докажем более формально, что стратегии $(\bar{p}, \bar{p}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ не может соответствовать состоянию равновесия при ценовой конкуренции. Пусть второй производитель ожидает, что первый производитель назначил цену $\bar{p}$. Нам достаточно показать, что в этом случае второму выгодно назначить цену p_2 выше $\bar{p}$.

Обозначим тот объем производства, который второй олигополист выберет в том случае, если будут назначены цены $(\bar{p},\, p_2)$, где $p_2 \geqslant \bar{p}$, через $\bar{R}_2(p_2)$, т.е.

$$\bar{R}_2(p_2) = R_2^{>}(\bar{p},\, p_2,\, R_1^{<}(\bar{p},\, p_2)) \text{ при } p_2 > \bar{p}$$

и

$$\bar{R}_2(\bar{p}) = R_2^{=}(\bar{p},\, \bar{p}),$$

где $R_j^{<}(\cdot)$, $R_j^{=}(\cdot)$ и $R_j^{>}(\cdot)$ — введенные выше функции оптимального отклика. Мы не будем полностью анализировать, какой вид имеют функции отклика (читатель может проделать такой анализ самостоятельно). Нам потребуется только несколько фактов относительно этих функций. При данной цене p_j, если нет ограничений на сбыт продукции, j-му производителю выгодно выбрать такой объем производства y_j, чтобы предельные издержки были равны цене:

$$c_j'(y_j) = p_j.$$

Отсюда следует, что $R_1^{<}(\bar{p},\, p_2)) = \bar{y}_1$ и $R_2^{=}(\bar{p},\, \bar{p}) = \bar{R}_2(\bar{p}) = \bar{y}_2$.

Если первый производитель продает $\bar{y}_1$ по цене $\bar{p}$, то при $p_2 > \bar{p}$ второму производителю не удается продать столько, сколько он бы хотел, поэтому ему выгодно выбрать выпуск в точности на уровне остаточного спроса. (Докажите это.) Таким образом, при $p_2 > \bar{p}$

$$\bar{R}_2(p_2) = R_2^{>}(\bar{p},\, p_2,\, \bar{y}_1) = D_2(p_2,\, \bar{y}_1,\, \bar{p}).$$

Если выполнено естественное предположение о функции остаточного спроса:

$$D_2(\bar{p},\, \bar{y}_1,\, \bar{p}) = D(\bar{p}) - \bar{y}_1,$$

то $D_2(\bar{p},\, \bar{y}_1,\, \bar{p}) = \bar{y}_2 = \bar{R}_2(\bar{p})$.

Таким образом, при всех $p_2 \geqslant \bar{p}$ выполнено

$$\bar{R}_2(p_2) = D_2(p_2,\, \bar{y}_1,\, \bar{p}).$$

Если предполагать, что исходная функция остаточного спроса, $D_2(\cdot)$, дифференцируема по p_2 (по крайней мере, при $p_2 \geqslant \bar{p}$), то $\bar{R}_2(p_2)$ также дифференцируема.

При $y_2 = \bar{R}_2(p_2)$ прибыль второго производителя будет равна

$$\Pi_2(p_2) = \bar{R}_2(p_2)\, p_2 - c_2(\bar{R}_2(p_2)),\ \ p_2 \geqslant \bar{p}.$$

Для доказательства утверждения достаточно показать, что производная прибыли в точке $p_2 = \bar{p}$ положительна. Действительно, при $p_2 \geqslant \bar{p}$

$$\Pi_2'(p_2) = \bar{R}_2(p_2) + [p_2 - c_2'(\bar{R}_2(p_2))] \cdot \bar{R}_2'(p_2).$$

При $p_2 = \bar{p}$, учитывая, что $\bar{R}_2(\bar{p}) = \bar{y}_2$, получим

$$\Pi_2'(\bar{p}) = \bar{y}_2 + [\bar{p} - c_2'(\bar{y}_2)] \cdot \bar{R}_2'(\bar{p}).$$

Поскольку по определению $\bar{p} = c_2'(\bar{y}_2)$, то

$$\Pi_2'(\bar{p}) = \bar{y}_2.$$

Таким образом, при $\bar{y}_2 > 0$ выполнено $\Pi_2'(\bar{p}) > 0$.

Мы не задаемся здесь достаточно сложным вопросом об условиях существования равновесия. Однако ясно, что если в ценовой конкуренции и существует равновесие, то продажи не осуществляются по ценам, равным предельным издержкам. Таким образом, анализ показывает, что как только мы изменяем предположение об одинаковости и постоянстве предельных издержек, то получаем, что вывод модели Бертрана неверен.

Динамический вариант модели Бертрана (повторяющиеся взаимодействия)

Наиболее простой динамический вариант модели Бертрана — две фирмы с постоянными и одинаковыми предельными издержками c, участвующие в ценовой конкуренции в течение (бесконечного) числа периодов времени. Каждая фирма максимизирует приведенную прибыль,

$$\Pi_j = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot \Pi_{jt},$$

где Π_{jt} — прибыль фирмы i в период t, а δ – дисконтирующий множитель.

В этой динамической игре Бертрана стратегия фирмы j определяет цену p_{jt}, которую взимает фирма в период t как функцию от всей «предыстории» ценовой конкуренции $H_{t-1} = \{\bar{p}_{1\tau}, \bar{p}_{2\tau}\}_{\tau=1}^{t-1}$.

Общий интерес представляют стратегии следующего вида

$$\bar{p}_{jt} = \begin{cases} p^{м}, & \text{если } \bar{p}_{i\tau} = \bar{p}^{м} \text{ для всех } i, \tau, 1 \leqslant \tau \leqslant t-1 \\ c & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где $p^{м}$ — монопольная цена. Согласно этой стратегии каждая фирма в период 1 назначает монопольную цену за свою продукцию. Затем, в каждый последующий период она назначает цену $p^{м}$, если во все предыдущие периоды обе фирмы назначали цену $p^{м}$, и цену, равную ее предельным издержкам, в противном случае. Заметим, что если обе фирмы, используют указанные стратегии, то в результате они взимают в каждый период монопольно высокие цены $p^{м}$.

Можно рассматривать назначение монопольной цены как неявное соглашение между олигополистами. В этих терминах каждая из фирм придерживается соглашения, если в предшествующие периоды обе фирмы не нарушали его, и нарушает соглашение, если другая фирма (или она сама) в прошлом нарушила соглашение.

При некоторых предположениях о дисконтирующих множителях указанные стратегии составляют равновесие. Заметим, что этот результат верен только для бесконечной игры. В бесконечной игре единственным равновесием будет такой набор стратегий, согласно которому каждая фирма в каждом из периодов назначает цену на уровне предельных издержек. Таким образом, в конечной игре описанный Бертраном исход реализуется в каждом из периодов. Действительно, используя обратную индукцию, рассмотрим последний период. Поскольку выигрыши в нем не зависят от действий игроков в предыдущие периоды, то фактически соответствующая игра представляет собой обычную модель Бертрана. Продолжая эти рассуждения, мы получим равновесие Бертрана в каждом из периодов.

Теорема 37.
Пусть функция спроса является непрерывной и строго убывает Указанные выше стратегии составляют совершенное в подыграх равновесие рассматриваемой динамической модели Бертрана тогда и только тогда, когда $\delta \geqslant 1/2$.

Доказательство.
Докажем прежде всего, что указанные стратегии составляют равновесие Нэша. Для этого нужно доказать, что ни одному из игроков не выгодно отклоняться от своей стратегии, если другой игрок придерживается своей стратегии.

Если оба игрока будут придерживаться своих равновесных стратегий, то прибыль каждого из них за один период составит

$$\frac{1}{2}\Pi^{м} = \frac{1}{2}(p^{м} - c)D(p^{м})$$

Совокупная прибыль за все периоды будет в этом случае равна

$$\Pi_j = \frac{1}{2}\Pi^{м} \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} = \frac{1}{2}\frac{\Pi^{м}}{1-\delta}.$$

Предположим, что один из игроков в первом периоде назначил цену отличную от монопольной:

$$p < p^м.$$

(Если игрок в первом периоде назначит цену выше монопольной, то его общая прибыль будет равна нулю, поэтому ему не выгодно назначать такую цену.)

Этот игрок в первом периоде получит весь спрос целиком и его прибыль составит

$$(p - c)D(p).$$

Во все последующие периоды его прибыль будет нулевая, поскольку другой игрок, придерживаясь своей стратегии, будет наказывать его за отклонение от соглашения: будет держать цену на уровне предельных издержек. Отклонение от стратегии в первом периоде будет выгодным, если

$$(p - c)D(p) > \frac{1}{2}\frac{\Pi^м}{1 - \delta}.$$

При непрерывной кривой спроса игрок может сделать прибыль $(p - c)D(p)$ сколь угодно близкой к монопольной прибыли $\Pi^м = (p^м - c)D(p^м)$. Таким образом, чтобы рассматриваемый набор стратегий мог быть равновесным, требуется чтобы

$$1 \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \delta}$$

или

$$\delta \geqslant \frac{1}{2}.$$

Мы доказали, что в первом периоде при $\delta \geqslant 1/2$ игроку нет смысла отклоняться от своей стратегии.

Выгодно ли ему делать это в последующие периоды? Нет, поскольку ситуация будет той же — прибыли останутся теми же с точностью до возрастающего линейного преобразования (считая дисконтирование и прибыль в периоды до нарушения соглашения).

Таким образом, доказано, что рассматриваемый набор стратегий является равновесием Нэша. Нам осталось доказать, что он будет равновесием Нэша в каждой подыгре. Для этого достаточно понять, что с точностью до возрастающего линейного преобразования выигрышей каждая подыгра повторяет исходную игру. ■

Таким образом, доказано, что в рассмотренной бесконечной повторяющейся игре существует Парето-оптимальное (с точки

зрения олигополистов) равновесие. Фактически же это равновесие не будет единственным. Можно придумать бесконечно много различных пар стратегий, составляющих совершенное в подыграх равновесие, и среди этих равновесий есть не Парето-оптимальные.

Задачи

1. Найдите равновесие в модели Бертрана в случае неодинаковых (но постоянных) предельных издержек.

2. Сформулируйте и докажите существование равновесия в модели с дифференцированными продуктами. (Предположите, что для каждого из олигополистов вне зависимости от цен остальных олигополистов существует цена выше которой спрос равен нулю. Остальные условия сходны с условиями использованными при доказательстве существования в модели Курно. Воспользуйтесь теоремой Нэша.)

3. На рынке действуют две одинаковые фирмы. Спрос на продукцию j-й фирмы зависит от собственной цены p_j и цены конкурента p_{-j}:

$$y_j = \alpha^2 - \alpha p_j + (\alpha - 1)p_{-j} \quad (\alpha > 1).$$

Предельные издержки равны 1. Рассчитать равновесие при ценовой конкуренции фирм. Сравнить с картелем.

4. Пусть есть две фирмы, выпускающих два разных, но связанных в потреблении товара, выбирают цены $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$ которые влияют на объемы их спроса. Функции спроса заданы уравнениями:

$$y_1(p_1, p_2) = 6 - 2p_1 + p_2,$$
$$y_2(p_1, p_2) = 10 - 3p_2 + p_1.$$

Найти равновесные цены, если издержки у обеих фирм нулевые.

5. Модель олигополии с ценовым лидерством

В модели **олигополии с ценовым лидерством** лидер (фирма с номером 1) назначает цену p, а остальные ($j = 2, ..., n$) выбирают выпуск, считая цену фиксированной. С точки зрения теории игр, модель представляет собой динамическую игру с почти совершенной информацией, состоящую из двух этапов. В определенном смысле, модель олигополии с ценовым лидерством находится в том же отношении к модели Бертрана что и модель Штакельберга к модели Курно. Ее анализ фактически повторяет анализ модели Штакельберга и ниже будет приведен в упрощенном и схематичном виде.

Опишем способ нахождения равновесия с помощью обратной индукции. Сначала следует рассмотреть второй этап игры. На втором этапе участники, отличные от лидера, одновременно выбирают свои объемы производства. Таким образом формируются отклики $R_j(p)$, которые являются решением соответствующих задач:

$$py_j - c_j(y_j) \to \max_{y_j \geqslant 0}.$$

(Мы будем предполагать, что отклики однозначны, и $R_j(p)$ являются функциями, определенными при всех неотрицательных ценах.) Эти задачи, очевидно, совпадают с задачами фирм при совершенной конкуренции, а функции отклика $R_j(p)$ являются соответствующими функциями предложения. При соответствующих предположениях функции отклика удовлетворяют условиям первого порядка:

$$c_j'(R_j(p)) = p,$$

то есть функции $R_j(p)$ являются обратными к функциям предельных издержек $c_j'(y_j)$[109]. Обычно предполагают, что функции издержек характеризуются убывающей отдачей, так что функции предельных издержек возрастают и поэтому являются обратимыми.

В свою очередь, лидер выбирает цену, ориентируясь на функции отклика. Для каждого уровня цены, выбранной лидером, можно определить остаточный спрос:

$$D_1(p) = D(p) - \sum_{j=2}^{n} R_j(p).$$

Фактически, лидера можно рассматривать как монополиста, сталкивающегося с функцией спроса $D_1(p)$. Таким образом, лидер решает задачу

$$\Pi_1 = D_1(p)p - c_1(D_1(p)) \to \max_p.$$

На Рис. 71 дана иллюстрация равновесия олигополии с ценовым лидерством для случая $n = 4$.

[109] Предполагается, что уравнение имеет решение при всех $p \geqslant 0$.

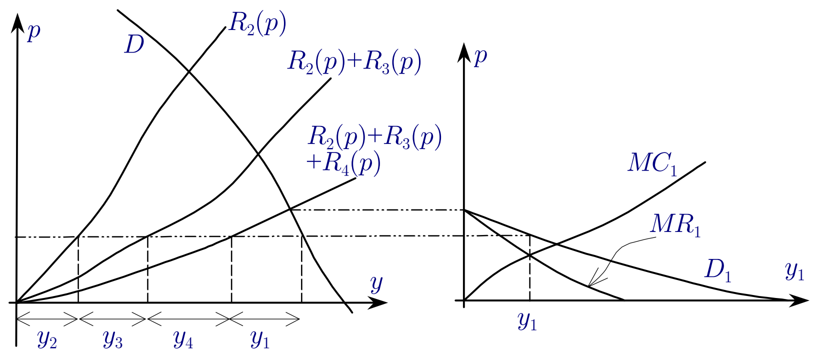


Рисунок 71

Задачи

1. Сформулируйте и докажите теорему существования равновесия в модели ценового лидерства. (*Подсказка*: В качестве образца возьмите доказательство существования равновесия в модели Штакельберга.)

2. Пусть в дуопольной отрасли, в которой фирмы конкурируют в соответствии с моделью ценового лидерства, функция издержек лидера и ведомого равны $c_1(y_1) = c\,y_1$ и $c_2(y_2) = y_2^2$ соответственно, а функция спроса равна $D(p) = a - b\,p$. Показать, что суммарный выпуск будет больше, чем в равновесии Курно, но меньше, чем Парето-оптимальный. Показать равновесие графически.

3. Двое олигополистов конкурируют по типу модели ценового лидерства. Лидер имеет нулевые предельные издержки, а ведомый имеет квадратичную функцию издержек: $c_2(y_2) = y_2^2/2$. Спрос в отрасли описывается функцией $D(p) = 8 - p$. Сколько суммарной прибыли выиграли бы олигополисты, если бы сумели объединиться в одну фирму (картель)?