Квазилинейная экономика и частное равновесие

В этой главе мы рассмотрим теоретическое основание моделей **частного равновесия**, то есть таких моделей, в которых рассматривается равновесие на рынке одного товара в предположении, что цены всех остальных товаров остаются фиксированными.

Как известно, спрос и предложение каждого блага в моделях *общего равновесия* зависят, вообще говоря, от цен всех рассматриваемых благ. Такая зависимость не позволяет анализировать рынки благ по отдельности, поскольку изменения на одном рынке влияют на ситуацию на других рынках, приводя к сдвигу кривых спроса и предложения на этих рынках. Это, в свою очередь, приводит к сдвигам кривых спроса и предложения на данном рынке и т.д. Поэтому частный равновесный анализ оказывается корректным только в ситуациях, когда указанные зависимости отсутствуют или когда ими в первом приближении можно пренебречь. Это случай так называемых квазилинейных предпочтений. Если предпочтения потребителей квазилинейны, то функция спроса, соответствующая этим предпочтениям характеризуется отсутствием эффекта дохода. Если к тому же предпочтения и технологии сепарабельны, то рынки оказываются полностью независимыми и при изменениях на одном из них состояния прочих рынков остаются неизменными. В данном разделе нам предстоит проиллюстрировать сказанное.

Приведем соответствующие обозначения и определения. Рассмотрим экономику с $l+1$ благом, m потребителями и n производителями. Будем обозначать через $I = \{1, ..., m\}$ множество потребителей, а через $J = \{1, ..., n\}$ множество производителей.

Предположим, что предпочтения i-го потребителя описываются функцией полезности следующего вида: $u_i(x_{i1},..., x_{il}, z_i) = v_i(x_{i1},..., x_{il}) + z_i$. Эту функцию полезности принято называть **квазилинейной**. Последнее благо будем интерпретировать как деньги.[42] В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать что величина z_i может принимать и отрицательные значения.[43] Будем предполагать, что множество физически допустимых потребительских наборов потребителя i задано ограничениями $x_{ik} \geqslant 0$.

Каждый потребитель сталкивается с бюджетным ограничением, формируемым его начальными запасами и доходами, получаемыми от владения финансовыми активами. Пусть каждый потребитель обладает начальными запасами только $(l+1)$-го блага. Другими словами, начальный запас потребителя i имеет вид $(0, 0, ..., 0, \omega_i)$, причем $\omega_i \geqslant 0$. Предполагается также, что потребитель $i \in I$ получает доход от владения активами в виде долей от прибыли фирм. Числа $\gamma_{ij} \geqslant 0$, $i \in I$, $j \in J$ задают распределение прав на получение прибыли, т.е. γ_{ij} обозначает долю потребителя i в прибыли фирмы j.

Производители в модели представлены технологиями вида $(y_1,..., y_l, -r)$, где $y_k \geqslant 0$ для всех $k = 1, ..., l$ — объемы выпуск первых l благ, а $r \geqslant 0$ — затраты последнего $l+1$-го блага на производства первых l благ. Таким образом предполагается, что единственным затрачиваемым благом в каждом технологическом процессе является $(l+1)$-ое благо — деньги.[44] В анализе удобно описывать технологии с помощью **функции издержек** $c_j(y_1,..., y_l)$ (которая каждому вектору объемов первых l благ сопоставляет необходимые для производства этих объемов затраты $(l+1)$-го блага). Для того, чтобы формально установить связь функции издержек с технологическим множеством предприятия j (Z_j), рассмотрим следующую задачу:

$$
\begin{aligned}
& r \to \min_r \\
& (y_1,..., y_l, -r) \in Z_j.
\end{aligned}
$$

Функция $c_j(\boldsymbol{y})$ сопоставляет каждому вектору выпусков $\boldsymbol{y} = (y_1,..., y_l)$ значение этой задачи. В предположении замкнутости технологического множества оптимальное решение существует, если существует хотя бы одно допустимое решение[45]. В даль-

---

[42] Тем самым мы имеем в виду следующую интерпретацию: рассматриваемая нами экономика является малой частью некоторой большей экономики, в которой эти деньги можно потратить на покупку производящихся там товаров.

[43] Это предположение введено для упрощения анализа. В дальнейшем предлагаются условия, которые гарантируют неотрицательность значений z_i в рассматриваемых состояниях равновесия.

[44] Вообще говоря, мы можем предполагать, что некоторые из первых l благ затрачиваются в производстве, и для них может выполняться $y_j < 0$; это никак не изменит выводов.

[45] Подробное рассмотрение используемых далее элементов теорий потребителя и производителя читатели могут найти в следующих источ-

нейшем мы будем предполагать, что множество значений выпусков $\boldsymbol{y}$, при которых существует допустимое решение рассматриваемой задачи, совпадает с $\mathbb{R}^l_+$. Это означает, что функция издержек $c_j(\cdot)$ определена на множестве $\mathbb{R}^l_+$, т.е. все неотрицательные выпуски возможны. Заметим, что выпуклость множества Z_j гарантирует выпуклость функции $c_j(\cdot)$.

Заметим, что функция издержек однозначно описывает технологическое множество в том случае, когда набор $(\boldsymbol{y}, -r)$ удовлетворяет неравенствам

$$r \geqslant c_j(\boldsymbol{y}),$$
$$\boldsymbol{y} \geqslant 0,$$

тогда и только тогда, когда он принадлежит множеству допустимых технологий: $(\boldsymbol{y}, -r) \in Z_j$. Для этого можно дополнительно потребовать, чтобы технологическое множество Z_j удовлетворяло свойству свободы расходования (можно «выбрасывать» блага):

$$(\boldsymbol{y}, -r) \in Z_j \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{y}', -r') \in Z_j \ \forall\, (\boldsymbol{y}', -r') \leqslant (\boldsymbol{y}, -r).$$

Мы будем рассматривать два типа экономик. В одной из них (экономика $\mathcal{E}_1$) предполагается, что потребитель не сталкивается с ограничением типа $z_i \geqslant 0$ (может «брать в долг» неограниченную сумму денег). В другой это ограничение принимается (экономика $\mathcal{E}_2$).

Под допустимым состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}_1$ мы будем понимать такое состояние $\{(\boldsymbol{x}_1, z_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, z_m), (\boldsymbol{y}_1, r_1), \ldots, (\boldsymbol{y}_n, r_n)\}$, что выполнены неравенства:

$$\sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant \sum_{j\in J} y_{jk}, \quad k = 1, \ldots, l,$$
$$\sum_{i\in I} z_i + \sum_{j\in J} r_j \leqslant \sum_{i\in I} \omega_i,$$
$$r_j \geqslant c_j(\boldsymbol{y}_j), \quad j \in J,$$
$$\boldsymbol{x}_i \geqslant 0, \quad i \in I, \qquad \boldsymbol{y}_j \geqslant 0, \quad j \in J.$$

Соответственно, под допустимым состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}_2$ мы будем понимать такое состояние $\{(\boldsymbol{x}_1, z_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, z_m), (\boldsymbol{y}_1, r_1), \ldots, (\boldsymbol{y}_n, r_n)\}$, что выполнены все вышеприведенные условия, и, кроме того, $z_i \geqslant 0, i \in I$.

никах: Mas-Colell A., Whinston M., Green J. *Microeconomic Theory* Oxford University Press, 1995; Varian H. *Microeconomic Analysis*, 3rd ed., Norton, 1992; Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. *Лекции по микроэкономической теории*, Новосибирск, 1998.

1. Характеристика Парето-оптимальных состояний в квазилинейных экономиках

Квазилинейностью предпочтений потребителей объясняется ряд особых свойств рассматриваемой экономики. В частности, анализировать Парето-оптимальные состояния в квазилинейной экономике можно с помощью следующей задачи оптимизации:

$$\left\| \begin{array}{l} \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i) - \sum_{j\in J} c_j(y_j) \to \max \\ \sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant \sum_{j\in J} y_{jk}, \quad k = 1,\ldots,l, \\ x_i \geqslant 0, \quad i \in I, \\ y_j \geqslant 0, \quad j \in J. \end{array} \right. \qquad (\mathcal{W})$$

Другими словами, верна следующая теорема.

Теорема 8.

1) Пусть

$\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\}$ —

Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_1$. Тогда набор

$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$

является решением задачи ($\mathcal{W}$).

2) Обратно, пусть

$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$

является решением задачи ($\mathcal{W}$).

Тогда существуют такие $(\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_m, \hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_n)$, что

$\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\}$ —

Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_1$.

Доказательство.

1) Напомним, что каждое Парето-оптимальное состояние,

$$\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\}$$

при любом $i_0 \in I$ является решением следующей задачи математического программирования:

$$v_{i_0}(\boldsymbol{x}_{i_0}) + z_{i_0} \to \max$$
$$v_i(\boldsymbol{x}_i) + z_i \geqslant v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) + \hat{z}_i, \qquad i \neq i_0$$

$$\sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant \sum_{j\in J} y_{jk}, \quad k = 1, \ldots, l,$$

$$\sum_{i\in I} z_i + \sum_{j\in J} r_j \leqslant \sum_{i\in I} \omega_i,$$

$$r_j \geqslant c_j(\boldsymbol{y}_j), \quad j \in J,$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqslant 0, \quad i \in I, \qquad \boldsymbol{y}_j \geqslant 0, \quad j \in J.$$

Как несложно показать, в этой задачи первое, третье и четвертое неравенства можно заменить на равенства, не изменяя множество решений задачи. Выражая из этих равенств z_i и r_j и исключая их из оставшихся неравенств, видим, что данная задача сводится к задаче $(\mathcal{W})$.

2) Пусть теперь $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$ является решением задачи $(\mathcal{W})$. Мы можем взять $\hat{r}_j = c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)\ \forall j$. Рассмотрим произвольные $\hat{z}_j$, такие что их сумма равна

$$\sum_{i\in I} \hat{z}_i = \sum_{i\in I} \omega_i - \sum_{j\in J} \hat{r}_j. \qquad (\star)$$

Легко увидеть, что состояние

$$\hat{S} = \{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\}$$

является допустимым состоянием экономики $\mathcal{E}_1$. Докажем, что оно Парето-оптимально. Пусть это не так, и существует другое допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_1$,

$$\tilde{S} = \{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\},$$

такое что для всех потребителей $(i \in I)$

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) + \tilde{z}_i \geqslant v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) + \hat{z}_i,$$

и существует по крайней мере один потребитель i_0, для которого выполнено

$$v_{i_0}(\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \tilde{z}_{i_0} > v_{i_0}(\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \hat{z}_{i_0}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) + \sum_{i\in I} \tilde{z}_i > \sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) + \sum_{i\in I} \hat{z}_i. \qquad (\star\star)$$

Поскольку $\tilde{S}$ — допустимое состояние, то

$$\sum_{i\in I} \tilde{z}_i + \sum_{j\in J} \tilde{r}_j \leqslant \sum_{i\in I} \omega_i$$

и

$$\tilde{r}_j \geqslant c_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_j), \quad j \in J,$$

откуда

$$\sum_{i\in I} \tilde{z}_i \leqslant \sum_{i\in I} \omega_i - \sum_{j\in J} c_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_j). \qquad (\star\star\star)$$

Складывая $(\star)$, $(\star\star)$ и $(\star\star\star)$, получаем

$$\sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_j) > \sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j).$$

Поскольку $(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{y}}_n)$ является допустимым в задаче $(\mathcal{W})$, то это означает, что существование состояния $\tilde{S}$ противоречит оптимальности $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$ в задаче $(\mathcal{W})$. ■

В случае экономики $\mathcal{E}_2$ первая часть доказанной теоремы для экономики $\mathcal{E}_2$ в общем случае не верна (см. нижеприведенный пример). Вторая часть верна при дополнительном предположении о том, что совокупные начальные запасы достаточно велики.

Как видно из вышеприведенной теоремы, задача поиска Парето-оптимума для экономики $\mathcal{E}_1$ эквивалентна задаче $(\mathcal{W})$. В то же время множество допустимых состояний для экономики $\mathcal{E}_2$ является подмножеством множества допустимых состояний для экономики $\mathcal{E}_1$. Поэтому не исключена ситуация, в которой Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_2$ не является Парето-оптимумом экономики $\mathcal{E}_1$ и, следовательно, не будет решением задачи $(\mathcal{W})$.

Несложно придумать пример экономики $\mathcal{E}_2$ и Парето-оптимума этой экономики, так чтобы в этом Парето-оптимуме ограничение $z_i \geqslant 0$ оказалось существенным для одного из потребителей, и при снятии этого ограничения можно было бы увеличить полезность одного из потребителей, не уменьшая полезность остальных. Читатель может сконструировать такой пример самостоятельно.

Но даже если в Парето-оптимуме экономики $\mathcal{E}_2$ все ограничения $z_i \geqslant 0$ выполняются как строгие неравенства, снятие данных ограничений может позволить осуществить Парето-улучшение. Приведем пример.

Пример 1.

Рассмотрим экономику с одним потребителем $(m = 1)$, одним производителем $(n = 1)$ и двумя благами $(l + 1 = 2)$. Для упрощения обозначений индексы будем опускать. Предпочтения потребителя заданы функцией $v(x) = 5x^3 - 9x^2 + 6.9x$, а технологическое множество фирмы — функцией издержек $c(x) = x^4$. Обе функции являются возрастающими при $x \geqslant 0$, поэтому $y = x$, $r = c(x)$ и $z + r = \omega$, так что поиск Парето-оптимума сводится к максимизации функции

$$v(x) - c(x)$$

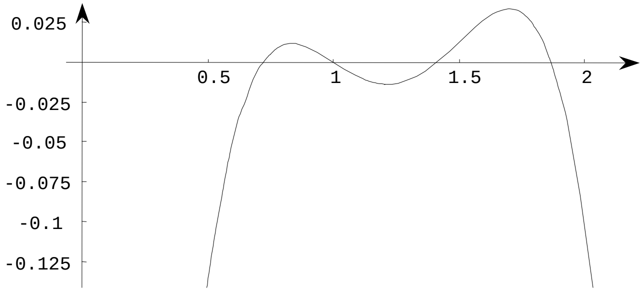

Рисунок 34

при ограничениях $x \geqslant 0$ и $c(x) \leqslant \omega$. Здесь ограничение $c(x) \leqslant \omega$ соответствует ограничению $z \geqslant 0$. Можно переписать последнее ограничение в виде $x \leqslant c^{-1}(\omega)$.

Пусть $\omega = 1$, при этом $c^{-1}(\omega) = 1$. Как видно на Рис. 34 функция $v(x) - c(x)$ имеет два локальных максимума: $x_1 \approx 0.83473$ и $x_2 \approx 1.6988$. Только второй из этих максимумов является глобальным. Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_2$ достигается при $x = x_1$, поскольку максимизация идет на отрезке $[0, 1]$. В то же время Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_1$ и, следовательно, решение задачи $(\mathcal{W})$ достигается при $x = x_2$. ⇦

В этом примере ключевым моментом является то, что функция $v(\cdot)$ не является вогнутой. Можно было построить подобный пример иначе: так, чтобы функция $v(\cdot)$ была вогнутой, но функция издержек не была выпуклой. Таким образом, для доказательства аналога первой части предыдущей теоремы в «выпуклой» экономике $\mathcal{E}_2$ следует потребовать, чтобы все функции $v_i(\cdot)$ были вогнутыми, а функции $c_j(\boldsymbol{y}_j)$ — выпуклыми. Аналогом этой теоремы для случая экономики $\mathcal{E}_2$ является следующая теорема.

Теорема 9.

1) Предположим, что функции $v_i(\cdot)$ вогнуты, а функции издержек $c_j(\cdot)$ выпуклы, и пусть

$$\hat{S} = \{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\} \text{ —}$$

Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_2$, причем $\hat{z}_i > 0 \; \forall i$. Тогда набор

$$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$$

является решением задачи $(\mathcal{W})$.

2) Обратно, пусть

$$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$$

является решением задачи $(\mathcal{W})$, причем

$$\sum_{i \in I} \omega_i - \sum_{j \in J} c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j) \geqslant 0.$$

Тогда существуют такие $(\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_m, \hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_n)$, что

$$\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\} \text{ —}$$

Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_2$.

Доказательство.

1) Доказательство опирается на следующее вспомогательное утверждение: если $\hat{S}$ — Парето-оптимум в экономике $\mathcal{E}_2$, удовлетворяющий условиям теоремы, то он также является Парето-оптимумом в соответствующей экономике $\mathcal{E}_1$. Если это утверждение верно, то доказываемое является тривиальным следствием предыдущей теоремы.

Докажем это вспомогательное утверждение от противного. Пусть в соответствующей экономике $\mathcal{E}_1$ существует допустимое состояние

$$\tilde{S} = \{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\},$$

которое доминирует по Парето состояние $\hat{S}$.

Рассмотрим выпуклую комбинацию этих двух состояний:

$$S(\alpha) = \alpha\hat{S} + (1 - \alpha)\tilde{S}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Существует достаточно малое $\alpha > 0$, такое что $S(\alpha)$ является допустимым в экономике $\mathcal{E}_2$. Однако при $\alpha > 0$ состояние $S(\alpha)$ представляет собой Парето-улучшение в экономике $\mathcal{E}_2$ по сравнению с $\hat{S}$, что противоречит предположению теоремы.

Подробное изложение доказательства оставляется в качестве упражнения.

2) Доказательство оставляется в качестве упражнения. ■

Приведенные выше результаты позволяют нам в случае квазилинейной экономики использовать задачу $(\mathcal{W})$ для анализа Парето-оптимальных состояний. Так как в достаточно широком классе случаев решения задачи $(\mathcal{W})$ описывают Парето-границу, то целевую функцию задачи $(\mathcal{W})$ можно использовать для решения вопроса о принадлежности некоторого допустимого состояния к Парето-границе. В связи с этим, естественно рассматривать функцию

$$W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\boldsymbol{y}_j)$$

в качестве индикатора благосостояния.Основанием для этого является следующая теорема.

Пусть

$\tilde{S} = \{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\}$,

$\check{S} = \{(\check{\boldsymbol{x}}_1, \check{z}_1), \ldots, (\check{\boldsymbol{x}}_m, \check{z}_m), (\check{\boldsymbol{y}}_1, \check{r}_1), \ldots, (\check{\boldsymbol{y}}_n, \check{r}_n)\}$ —

допустимые состояния экономики $\mathcal{E}_1$ ($\mathcal{E}_2$). Тогда выполнено следующая теорема.

Теорема 10.

1) Если каждый из потребителей в состоянии $\tilde{S}$ имеет не меньшую полезность, чем в состоянии $\check{S}$, т.е.

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) + \tilde{z}_i \geqslant v_i(\check{\boldsymbol{x}}_i) + \check{z}_i \ \forall i,$$

и

$$\sum_{i\in I} \check{z}_i + \sum_{j\in J} c_j(\check{\boldsymbol{y}}_j) = \sum_{i\in I} \omega_i, \text{[46]}$$

то

$$W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \geqslant W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}}),$$

причем если существует потребитель i_0, такой что

$$v_{i_0}(\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \tilde{z}_{i_0} > v_{i_0}(\check{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \check{z}_{i_0}$$

(т.е. состояние $\tilde{S}$ доминирует $\check{S}$ по Парето), то

$$W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) > W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}}).$$

2) Для экономики $\mathcal{E}_1$ выполнено и обратное: если $W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) > W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}})$, и

$$\sum_{i\in I} \tilde{z}_i + \sum_{j\in J} c_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_j) = \sum_{i\in I} \omega_i,$$

то существуют $\tilde{z}_i$ и $\tilde{r}_j$ такие, что состояние экономики

$$\{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\},$$

является допустимым, причем

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) + \tilde{z}_i > v_i(\check{\boldsymbol{x}}_i) + \check{z}_i \ \forall i.$$

[46] Это условие будет, например, выполнено в равновесии, таком что $\check{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя, а $\check{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи производителя при неотрицательности цен.

Доказательство.

Доказательство оставляется в качестве упражнения. ■

Первая часть данного утверждения говорит о том, что любое Парето-улучшение сопровождается ростом индикатора $W(\cdot)$. Смысл второй части приведенного утверждения состоит в том, что если $W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) > W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}})$, то можно в состоянии $\tilde{S}$ произвести такие трансферты (перераспределить деньги), что новое состояние будет строго доминировать состояние $\check{S}$ по Парето. Заметим, что некоторые z_i при этом могут быть отрицательны.

В Парето-оптимуме квазилинейной экономики индикатор благосостояния достигает максимума. Пусть $\hat{W}$ — это максимальное значение. Сравнение уровней благосостояния в анализируемом состоянии и в идеальной ситуации позволяют количественно оценить потери благосостояния. Разность между $\hat{W}$ и уровнем индикатора $W(S)$ в некотором состоянии S называется **чистыми потерями благосостояния**:

$$DL = \hat{W} - W(S).$$

Заметим, что на основе Теоремы 8 можно получить полное описание границы Парето экономики $\mathcal{E}_1$:

Теорема 11.

Состояние $\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\}$ является Парето-оптимальным состоянием в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_1$ тогда и только тогда, когда

$$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$$

является решением задачи ($\mathcal{W}$),

$$\hat{r}_j = c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)$$

и

$$\sum_{i\in I} \hat{z}_i = \sum_{i\in I} \omega_i - c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j).$$

Доказательство.

Доказательство оставляется в качестве упражнения. ■

В ситуации, когда функции $v_i(\cdot)$ строго вогнуты, а функции $c_j(\cdot)$ выпуклы, решение задачи ($\mathcal{W}$) единственно, поэтому два Парето-оптимальных состояния в экономике $\mathcal{E}_1$ (в экономике $\mathcal{E}_2$, если $\tilde{z}_i$ и $\check{z}_i$ положительны)

$$\{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), ..., (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), ..., (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\},$$

$$\{(\check{\boldsymbol{x}}_1, \check{z}_1), ..., (\check{\boldsymbol{x}}_m, \check{z}_m), (\check{\boldsymbol{y}}_1, \check{r}_1), ..., (\check{\boldsymbol{y}}_n, \check{r}_n)\}, \text{ —}$$

могут различаться лишь объемами потребления $(l+1)$-го блага. Другими словами, $\tilde{\boldsymbol{x}}_i = \check{\boldsymbol{x}}_i\ \forall\, i \in I$ и $\tilde{\boldsymbol{y}}_j = \check{\boldsymbol{y}}_j\ \forall\, j \in J$.

Поэтому, как несложно заметить в случае экономики $\mathcal{E}_1$ граница Парето представляет собой гиперплоскость вида (читателю предлагается доказать этот результат самостоятельно)

$$\sum_{i \in I} u_i = const.$$

В экономике $\mathcal{E}_2$ граница Парето может «загибаться» из-за того, что некоторые из ограничений $z_i \geqslant 0$ являются существенными, что иллюстрирует следующий пример.

Пример 2.

На Рис. 36. изображена Парето-граница в экономике типа $\mathcal{E}_2$ со следующими параметрами: 2 блага ($l+1=2$), 2 потребителя, с функциями полезности

$$u_1 = 2\sqrt{x_1} + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = 4\sqrt{x_2} + z_2,$$

и один производитель с функцией издержек

$$c(y) = y.$$

Начальные запасы 2-го блага равны 10.

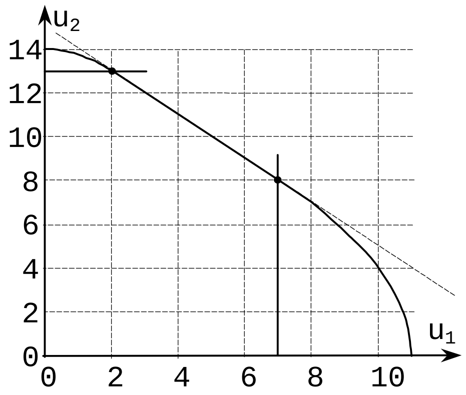

Рисунок 36. Парето-граница в экономике типа $\mathcal{E}_2$

Несложно проверить, что решение задачи ($\mathcal{W}$) дает $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Однако это решение описывает точки границы Парето только при $u_1 \in [2, 7]$. Парето-граница при этом имеет вид

$$u_2 = 15 - u_1.$$

При $u_1 \in [0, 2]$ Парето-граница имеет вид

$$u_2 = 14 - \frac{u_1^2}{4}.$$

При $u_1 \in [7, 11]$ Парето-граница имеет вид

$$u_2 = 4\sqrt{11 - u_1}.$$

⇦

В случае двух благ можно привести графическую иллюстрацию Парето границы экономики типа $\mathcal{E}_2$ на основе диаграммы Эджворта (см. Рис. 35). Жирная линия представляет собой границу Парето.

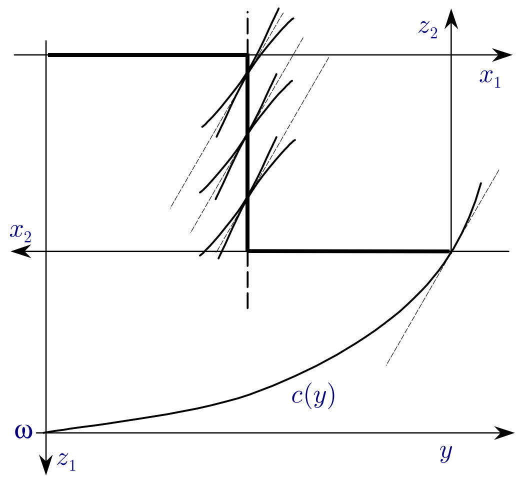

Рисунок 35

2. Характеристика поведения потребителей в квазилинейных экономиках

В дальнейшем сравниваются потребительские наборы, которые оказываются рыночными равновесиями при различных организациях рынков (совершенная конкуренция, монополия, олигополия и т.д.). При этом всюду предполагается, что потребители рассматривают рыночные цены как данные. Другими словами, определяя предпочитаемый потребительский набор $(\boldsymbol{x}_i, z_i)$ при рыночных ценах благ $(p, 1)$, потребитель в экономике $\mathcal{E}_1$ решает следующую задачу:

$$\begin{aligned} & v_i(x_{i1},\ldots, x_{il}) + z_i \to \max \\ & \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i + z_i \leqslant \beta_i(\boldsymbol{p}) \qquad\qquad (\,\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})\,) \\ & x_{ik} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Соответствующая задача в экономике $\mathcal{E}_2$ включает дополнительное ограничение $z_i \geqslant 0$. (Будем обозначать эту задачу через $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$)

Здесь через $\beta_i(\boldsymbol{p})$ обозначен доход потребителя при данных ценах:

$$\beta_i(\boldsymbol{p}) = \omega_i + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\pi_j(\boldsymbol{p}),$$

где $\pi_j(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j)$ — прибыль производителя j при ценах $(\boldsymbol{p}, 1)$.

Имеют место следующие результаты, характеризующие оптимальный выбор потребителя.

Теорема 12.

Предположим, что $(\boldsymbol{x}_i, z_i)$ — решение задачи потребителя $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$. Тогда $\boldsymbol{x}_i$ является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} & v_i(x_{i1},\ldots, x_{il}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \to \max \\ & x_{ik} \geqslant 0. \qquad\qquad (☺) \end{aligned}$$

И обратно, пусть $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ – решение задачи (☺), тогда существует такое $\bar{z}_i$, что $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{z}_i)$ – решение задачи $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$.

Доказательство.

Доказательство оставляется в качестве упражнения. ■

Это означает, что спрос потребителя на первые l благ не зависит от его дохода. Аналог этого результата верен и в случае задачи $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$, когда допустимые потребительские наборы удовлетворяют дополнительному условию $z_i \geqslant 0$, что показывает следующая теорема.

Теорема 13.

Предположим, что $v_i(\cdot)$ — вогнутая функция, а $(\boldsymbol{x}_i, z_i)$, — решение задачи потребителя $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$ (соответствующей

экономике $\mathcal{E}_2$), такое что $z_i > 0$. Тогда $\boldsymbol{x}_i$ является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} & v_i(x_{i1},\ldots, x_{il}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \to \max \\ & x_{ik} \geqslant 0\ \forall k \qquad\qquad (☹) \end{aligned}$$

И обратно, пусть $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ – решение задачи (☹) и $\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \beta_i(\boldsymbol{p})$, тогда существует такое $\bar{z}_i \geqslant 0$, что $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{z}_i)$ — решение задачи $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$.

Доказательство.

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

■

Предположим дополнительно, что $v_i(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда для решения задачи оптимального выбора потребителя $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$ (или $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$ при $z_i > 0$) должно выполняться следующее условие

$$\nabla v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) \leqslant \boldsymbol{p},$$

причем если $\bar{x}_{ik} > 0$, то

$$\frac{\partial v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = p_k.$$

Таким образом, если решение задачи потребителя внутреннее $(\bar{\boldsymbol{x}}_i > \mathbb{0})$ и, кроме того, $z_i > 0$ в случае задачи $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$), то

$$\nabla v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) = \boldsymbol{p}.$$

Другими словами, градиент функции $v_i(\cdot)$, вычисленный для набора благ, совпадающего с рыночным спросом потребителя, равен вектору рыночных цен этих благ. Таким образом, градиент функции $v_i(\cdot)$ представляет собой обратную функцию спроса $\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{x}_i)$ i-го потребителя — вектор цен первых l благ, при котором потребитель предъявляет спрос именно на этот набор благ.

В классе квазилинейных экономик важную роль играет случай когда предпочтения всех потребителей, помимо свойства квазилинейности обладают свойством сепарабельности, т.е. функции полезности таких потребителей представимы в виде

$$u_i(x_{i1},\ldots, x_{il}, z_i) = v_i(x_{i1},\ldots, x_{il}) + z_i = \sum_k v_{ik}(x_{ik}) + z_i.$$

Если функция полезности i-го потребителя имеет такой вид, то задачу потребителя $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$ можно разложить на l задач — по одной на каждое благо кроме $(l+1)$-го:

$$\begin{aligned} & v_i(x_{i1},\ldots, x_{il}) - p_k x_{ik} \to \max \\ & x_{ik} \geqslant 0\ \ \forall k \qquad\qquad (\mathcal{C}_{1k}(p_k)) \end{aligned}$$

Теорема 14.
Если $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$, то $\bar{x}_{ik}$ — решение задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$. Обратно, если $\bar{x}_{ik}$ — решение задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ при $k = 1, ..., l$, то $\bar{\boldsymbol{x}}_i = (\bar{x}_{i1}, ..., \bar{x}_{il})$ — решение задачи $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$ при $\boldsymbol{p} = (p_1, ..., p_l)$.

Доказательство.
Доказательство оставляется в качестве упражнения. ■

Из данной теоремы следует, что функция спроса на k-е благо зависит только от цены на это благо, т.е. имеет вид $x_{ik}(p_k)$.

В этом случае (при условии дифференцируемости) необходимое условие оптимальности потребительского набора $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{z}_i)$ (как в случае экономики $\mathcal{E}_1$, так и в случае $\mathcal{E}_2$ при $z_i > 0$) имеет вид:

$$\frac{\partial v_{ik}(\bar{x}_{ik})}{\partial x_{ik}} \leqslant p_k,$$

причем если $\bar{x}_{ik} > 0$, то

$$\frac{\partial v_{ik}(\bar{x}_{ik})}{\partial x_{ik}} = p_k.$$

Это условие является также и достаточным, если $v_{ik}(\cdot)$ — вогнутые функции.

Из Теоремы 14 следует, что, вместо исходной задачи мы можем использовать для анализа спроса на k-е благо задачу $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$. Мы будем предполагать, что функция $v_{ik}(x_{ik})$ дважды дифференцируема, имеет положительную производную и строго вогнута. Строгая вогнутость гарантирует, в числе прочего, что если решение задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ существует, то оно единственно. Очевидно, что это решение есть значение функции спроса рассматриваемого потребителя на k-е благо при данном p_k, $x_{ik}(p_k)$.

Рассмотрим условия существования решения задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$. (Заметим, что из Теоремы 14 следует, что решение исходной задачи $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$ в случае сепарабельной функции полезности существует тогда и только тогда, когда существуют решения задач $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ при любом $k = 1, ..., l$.)

Введем обозначения [47]

$$\bar{p} = \sup{}_{x_{ik}>0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$$

и

$$\underline{p} = \inf{}_{x_{ik}>0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}.$$

Легко видеть, что при любом p_k, таком что $\underline{p} < p_k < \bar{p}$, решение задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ существует. Действительно в силу непрерывности функции $\partial v_{ik}(x_{ik})/\partial x_{ik}$, существует x_{ik}, такое что

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_k} = p_k.$$

Это x_{ik} должно быть решением задачи потребителя при ценах p_k.

Кроме того, при ценах $p_k \leqslant \underline{p}$ задача $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ не имеет решения. Покажем это. Пусть при $p_k \leqslant \underline{p}$ существует решение $x_{ik}(p_k) \geqslant 0$. Тогда должно выполняться необходимое условие оптимума (условие первого порядка)

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}} \leqslant p_k.$$

Откуда в силу того, что $p_k \leqslant \underline{p}$ имеем

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}} \leqslant \inf{}_{x_{ik}>0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$$

Рассмотрим теперь значение функции $\frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$ в точке $x_{ik}(p_k) + \varepsilon$. В силу убывания функции $\frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$ имеем

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k) + \varepsilon)}{\partial x_{ik}} < \frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Откуда получаем

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k) + \varepsilon)}{\partial x_{ik}} < \frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}} \leqslant \inf{}_{x_{ik}>0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}} = \underline{p}.$$

Так как $x_{ik}(p_k) + \varepsilon > 0$, мы получили противоречие с определением инфимума. Тем самым предположив существование решения задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ при $p_k \leqslant \underline{p}$ мы пришли к противоречию, а значит полностью обосновали что при $p_k \leqslant \underline{p}$ задача $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ не имеет решения.

Покажем теперь, что $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$. Рассмотрим для этого два случая: $\bar{p} = \infty$ и $\bar{p} < \infty$.

Пусть $\bar{p} = \infty$. При $p_k > \underline{p}$, по доказанному ранее решение $x_{ik}(p_k)$ задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ существует, причем оно будет внутренним ($x_{ik}(p_k) > 0$), так как любое значение $p_k > \underline{p}$ по непрерывности функции

[47] $\bar{p}$ — это так называемая цена «удушения» спроса.

$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$ может быть реализовано при соответствующем подборе x_{ik}. Это означает что условие первого порядка в этой задаче выполнено как равенство $\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_k} = p_k$ при $p_k > \underline{p}$, и определяет функцию спроса $x_{ik}(p_k)$ при $p_k > \underline{p}$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{p_k^n\}$, такую что

$$\lim_{n\to\infty} p_k^n = \infty.$$

Выделим из последовательности $\{p_k^n\}$ возрастающую подпоследовательность $\{p_k^{n_s}\}$. На основании подпоследовательности цен $\{p_k^{n_s}\}$ построим соответствующую ей последовательность объемов спроса $\{x_{ik}^{n_s}\}$ по правилу $\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}^{n_s})}{\partial x_{ik}} = p_k^{n_s}$. Так как $\lim_{s\to\infty} p_k^{n_s} = \infty$, то в силу строгой вогнутости функции полезности имеем, что последовательность объемов спроса $\{x_{ik}^{n_s}\}$ убывает, причем $x_{ik}^{n_s+1} < x_{ik}^{n_s}$. Как мы отметили выше при $p_k > \underline{p}$ решение задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ является внутренним и, таким образом, $x_{ik}^{n_s} > 0\ \forall\ n_s$, но каждая убывающая и ограниченная снизу последовательность имеет предел. Пусть $\tilde{x}_{ik}$ — предел этой последовательности объемов спроса и $\tilde{x}_{ik} > 0$. Тогда, как нетрудно заметить, подпоследовательность $\{p_k^{n_s}\}$ имеет (в силу непрерывности $\frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$) конечный предел $\frac{\partial v_{ik}(\tilde{x}_{ik})}{\partial x_{ik}}$, что противоречит ее построению. Получив противоречие, мы доказали, тем самым, что $\tilde{x}_{ik} = 0$ и тем самым, что $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$.

Пусть теперь $\bar{p} < \infty$. Тогда в силу убывания функции $\partial v_{ik}(x_{ik})/\partial x_{ik}$ имеет место равенство

$$\bar{p} = \lim_{x_{ik}\to 0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}} = \max_{x_{ik}\geqslant 0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}.$$

Тогда при любой цене $p_k \geqslant \bar{p}$ выполнено

$$\frac{\partial v_{ik}(0)}{\partial x_{ik}} \leqslant p_k.$$

Отсюда следует, что при $p_k \geqslant \bar{p}$ спрос на данное благо равен нулю, т.е. $x_{ik}(p_k) = 0$, поскольку в силу вогнутости целевой функции это необходимое условие оптимальности является также и достаточным. Отметим, что так как функция полезности в задаче $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ является *строго* вогнутой, то $x_{ik}(p_k) = 0$ — *единственное* решение этой задачи. Тем самым мы доказали, что в общем случае $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$.

Потребительский излишек: определение, связь с прямой и обратной функциями спроса

Пользуясь выведенными выше характеристиками потребительского выбора, проанализируем связь индикатора благосостояния $W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ с площадью под кривой спроса.

Величина $CS_i = v_i(x_{i1},\dots, x_{il}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i - v_i(0,\dots, 0)$ называется **потребительским излишком**.[48] В дальнейшем без потери общности будем предполагать, что $v_i(0,\dots, 0) = 0$.

Мы рассмотрим случай квазилинейных сепарабельных функций полезности, т.е. $v_i(x_{i1},\dots, x_{il}) = \sum_{k=1}^{l} v_{ik}(x_{ik})$. Потребительский излишек при этом получается суммированием потребительских излишков, получаемых потребителем на рынках отдельных благ:

$$CS_i = \sum_{k=1}^{l}(v_{ik}(x_{ik}) - p_k x_{ik}) = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik},$$

где $CS_{ik} = v_{ik}(x_{ik}) - p_k x_{ik}$.

В этом случае геометрически излишек потребителя на рынке k-го блага равен площади фигуры, лежащей под графиком функции обратного спроса выше цены этого блага (см. Рис. 37).

Поясним это. Рассмотрим потребительский излишек как функцию цен:

$$CS_i(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{l}[v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k)] = \\ = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik}(p_k).$$

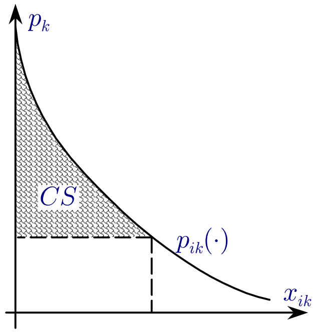

Рисунок 37. Излишек потребителя

Функции $CS_{ik}(p_k) = v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k)$ определены при всех ценах $p_k \geqslant \underline{p}$ и, кроме того, не могут быть отрицательными.[49]

Как было доказано, $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$, откуда $v_{ik}(x_{ik}(p_k)) \to 0$ при $p_k \to \infty$. Поскольку $p_k x_{ik}(p_k) \leqslant v_{ik}(x_{ik}(p_k))$, то при росте цены блага расходы на его при-

---

[48] В случае произвольной функции полезности рассмотрение потребительского излишка и связанных с ним понятий компенсирующей и эквивалентной вариации можно найти, например в источниках, указанных в сноске 45.

[49] Так как $x_{ik} = 0$ является допустимым в задаче $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$, то $CS_{ik}(p_k) = v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k) \geqslant v_{ik}(0) - p_k \cdot 0 = 0$, и, тем самым, $CS_{ik}(p_k) \geqslant 0$.

обретение стремятся к нулю, т.е. $p_k x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$.

Функция $CS_i(\boldsymbol{p})$ является дифференцируемой, если функция полезности дважды дифференцируема. Дифференцируя ее, получаем (с учетом условий первого порядка для задачи потребителя), что при $x_k(p_k) > 0$

$$x_k(p_k) = -\frac{\partial CS_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = -\frac{\partial CS_{ik}(p_k)}{\partial p_k}.$$

(Читателю предоставляется проверить этот факт самостоятельно).

Если $x_k(t) > 0$ при всех $t \geqslant p_k$, то проинтегрировав обе части этого дифференциального уравнения, получим

$$-\int_{p_k}^{\infty} \frac{\partial CS_{ik}(t)}{\partial t} dt = \int_{p_k}^{\infty} x_{ik}(t) dt.$$

Откуда

$$CS_{ik}(p) - \lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t) = \int_p^{\infty} x_{ik}(t) dt,$$

что позволяет выразить излишек потребителя i от потребления блага k в виде

$$CS_{ik}(p) = \int_p^{\infty} x_{ik}(t) dt + \lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t).$$ [50]

Поскольку второе слагаемое в этом соотношении равно нулю:

$$\lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t) = 0,$$

то

$$CS_{ik}(p) = \int_p^{\infty} x_{ik}(t) dt.$$

В силу того, что функция $p_{ik}(\cdot)$ является обратной к функции $x_{ik}(\cdot)$, имеет место соотношение[51]

$$CS_{ik}(p) = \int_0^{x_{ik}(p)} p_{ik}(q) dq - p x_{ik}(p),$$

В итоге, общий потребительский излишек получаем суммированием этих интегралов по всем рынкам:

$$CS_i(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik}(p) = \sum_{k=1}^{l} \int_{p_k}^{\infty} x_{ik}(t) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \int_0^{x_{ik}(p)} p_{ik}(t) dt - p \sum_{k=1}^{l} x_{ik}(p).$$

[50] Заметим, что если существует цена $\bar{p}_k$, такая что $x_k(t) > 0$ при всех $t < \bar{p}_k$ и $x_k(t) = 0$ при всех $t \geqslant \bar{p}_k$, то при $p_k \leqslant \bar{p}_k$

$$-\int_{p_k}^{\bar{p}_k} \frac{\partial CS_{ik}(t)}{\partial t} dt = \int_{p_k}^{\bar{p}_k} x_{ik}(t) dt.$$

[51] Равенство доказывается интегрированием по частям и заменой переменных.

3. Характеристика поведения производителей в квазилинейных экономиках

Напомним, что в рассматриваемом случае технологию каждого производителя представляет функция издержек. Если технологическое множество выпукло, то функция издержек является выпуклой. В этом параграфе мы приведем постановки задачи потребителя при различных предположениях о типе конкуренции с которым сталкивается производитель.

Предположим, что j-й производитель сталкивается с функцией обратного спроса на производимые им блага вида

$$\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{p}_j(\boldsymbol{y}_j).$$

Здесь мы отходим от предположения о совершенстве конкуренции — производители не рассматривают цены как данные.

В предположении (обычном для неоклассической парадигмы), что производитель выбирает объемы производства соответствующих благ, максимизирующие прибыль, задача j-го производителя имеет вид:

$$\pi_j = \boldsymbol{p}_j(\boldsymbol{y}_j)\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j) \to \max_{\boldsymbol{y}_j \geqslant 0}.$$

Если функции $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}_j)$ и $c_j(\boldsymbol{y}_j)$ дифференцируемы, то необходимое условие оптимальности выпуска $\boldsymbol{y}_j$ производителя j имеет вид

$$\nabla p_{jk}(\boldsymbol{y}_j)\boldsymbol{y}_j + p_{jk}(\boldsymbol{y}_j) - c'_{jk}(\boldsymbol{y}_j) \leqslant 0,$$

причем если $y_{jk} > 0$, то

$$\nabla p_{jk}(\boldsymbol{y}_j)\boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{p}_k(\boldsymbol{y}_j) - c'_{jk}(\boldsymbol{y}_j) = 0, .$$

В случае, если функции полезности сепарабельны, спрос на каждое благо зависит только от его цены. В этом случае цена любого блага зависит только от продаваемого количества блага:

$$p_{jk} = p_{jk}(y_{jk}).$$

Предположим также, что функция издержек производителя также сепарабельна, т.е.

$$c_j(\boldsymbol{y}_j) = \sum_{k=1}^{l} c_{jk}(y_{jk}).$$

В этом случае прибыль имеет вид

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{l} [p_{jk}(y_{jk}) y_{jk} - c_{jk}(y_{jk})].$$

Задача максимизации прибыли распадается, таким образом на l задач. Условия первого порядка приобретают более простой вид:

$$p'_{jk}(y_{jk})y_{jk} + p_{jk}(y_{jk}) \leqslant c'_{jk}(y_{jk}),$$

причем при $y_{jk} > 0$

$$p'_{jk}(y_{jk})y_{jk} + p_{jk}(y_{jk}) = c'_{jk}(y_{jk}).$$

И наконец, если цена спроса не зависит от продаваемого объема блага,

$$p_{jk}(y_{jk}) = const,$$

(производители принимают цены как данные, в отрасли складывается ситуация совершенной конкуренции), то $p'_{jk}(y_{jk}) = 0$ и условия первого порядка приобретают вид

$$p_{jk} \leqslant c'_{jk}(y_{jk}),$$

причем при $y_{jk} > 0$

$$p_{jk} = c'_{jk}(y_{jk}).$$

Последнее соотношение задает функцию предложения k-го блага j-м предприятием. Это функция зависит только от цены k-го блага.

Излишек производителя

Предположим, что производитель рассматривает цену как данную, или, другими словами, цена спроса не зависит от продаваемого объема, и цены у всех производителей одинаковы и равны $\boldsymbol{p}$. В качестве излишка производителя при ценах $\boldsymbol{p}$ будем рассматривать его прибыль при этих ценах, т.е.

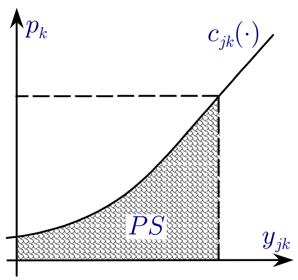

Рисунок 38. Излишек производителя

$$PS_j = \pi_j = \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j).$$

В случае, если функция издержек сепарабельна, излишек производителя можно представить как сумму излишков по l рынкам:

$$PS_j = \sum_{k=1}^{l}[p_k y_{jk} - c_{jk}(y_{jk})] = \sum_{k=1}^{l} PS_{jk}.$$

Можно представить излишек производителя на k-м рынке в виде интеграла:

$$PS_{jk} = \int_0^{y_{jk}} [p_k - c'_{jk}(t)]dt - c_{jk}(0).$$

Он равен (с точностью до константы $c_{jk}(0)$) площади фигуры, образуемой прямой, проходящей через точку $(0,\ p_{jk})$ параллельно

оси абсцисс, и кривой предельных издержек $c'_{jk}(y_{jk})$ (кривой предложения). В случае, когда $c_{jk}(0) = 0$ получаем, что излишек производителя равен

$$PS_{jk} = \int_0^{y_{jk}} [p_k - c'_{jk}(t)]dt.$$

4. Связь излишков потребителя и производителя с индикатором благосостояния

Предположим, что $\{(\boldsymbol{x}_1, z_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, z_m), (\boldsymbol{y}_1, r_1), \ldots, (\boldsymbol{y}_n, r_n)\}$ — допустимое состояние экономики, причем $(\boldsymbol{x}_i, z_i)$ — решение задачи $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$ i-го потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}\sum_{j\in J}\boldsymbol{y}_j$$

Тогда

$$W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\boldsymbol{y}_j) =$$

$$= \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i + \sum_{j\in J}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j)) = CS + PS,$$

где

$$CS = \sum_{i\in I} CS_i$$

— суммарный потребительский излишек,

$$PS = \sum_{j\in J}\pi_j(\boldsymbol{p}) = \sum_{j\in J} PS_j(\boldsymbol{p})$$

— суммарный излишек производителей.

Другими словами, индикатор благосостояния $W(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, соответствующий любому равновесию, равен сумме излишков потребителей и производителей.

Заметим, что если $\boldsymbol{p}$ — равновесный вектор, предпочтения локально ненасыщаемы, то условия

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}\sum_{j\in J}\boldsymbol{y}_j$$

выполнены. Заметим также, что в этом случае состояние экономики Парето-оптимально, и поэтому $W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ достигает максимума на множестве допустимых состояний.

В сепарабельной экономике излишки потребителей и производителей представляют собой суммы соответствующих излишков на l рынках:

$$CS = \sum_{k=1}^{l} CS_k, \qquad PS = \sum_{k=1}^{l} PS_k.$$

5. Представление суммарного спроса посредством модели репрезентативного потребителя

Очень часто при изучении моделей частного равновесия бывает удобно использовать предположение о том, что суммарный спрос порождается решением задачи *одного* потребителя. В том случае, когда такой потребитель существует, его называют **репрезентативным потребителем**.

Покажем, что в экономике $\mathcal{E}_1$ репрезентативный потребитель всегда существует.

Пусть $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$ — вектор спроса i-го потребителя на первые l благ при ценах $\boldsymbol{p}$. Тогда суммарный спрос всех потребителей равен

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

В этих обозначениях репрезентативный потребитель будет порождать своими предпочтениями суммарный спрос $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$.

Покажем что репрезентативный потребитель в этих условиях существует, причем его предпочтения на множестве потребительских наборов $(\boldsymbol{x}, z)$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$, могут быть представлены квазилинейной функцией полезности вида:

$$u(\boldsymbol{x}, z) = v(\boldsymbol{x}) + z.$$

Рассмотрим следующую задачу (задачу максимизации суммы полезностей от потребления 1-го блага при фиксированном количестве $\bar{x}$ этого блага):

$$\sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max{}_{x_1,\dots x_m}$$
$$\sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i \leqslant \bar{\boldsymbol{x}}. \qquad (❄)$$
$$\boldsymbol{x}_i \geqslant 0$$

Тогда в качестве $v(\boldsymbol{x})$ мы можем взять значение этой задачи при $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$. Покажем, что $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$ является решением задачи репрезентативного потребителя с функцией полезности, $u(\boldsymbol{x}, z) = v(\boldsymbol{x}) + z$, при любом векторе цен $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{0}$.

Предположим противное. Как мы видели, задачу представительного потребителя в случае квазилинейных предпочтений можно записать в эквивалентной форме:

$$v(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x} \to \max{}_{x\geqslant 0}.$$

Пусть существует $\tilde{\boldsymbol{x}} \geqslant \boldsymbol{0}$, такой что

$$v(\tilde{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} > v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}).$$

При этом, так как $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$, и $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$ допустимы в задаче (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$, то должно быть выполнено

$$v(\tilde{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} > \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I} x_i(\boldsymbol{p}).$$

Заметим, что $v(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i)$, где $(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{x}}_m)$ — решение задачи (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}$. Таким образом имеем

$$\sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \tilde{\boldsymbol{x}}_i \geqslant \sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) - \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} > \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Но это означает, что по крайней мере для одного из потребителей выполнено

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) - \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i > v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}),$$

что противоречит оптимальности набора $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$.

Докажем, что

$$v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})) = \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})),$$

другими словами, индикатор благосостояния в экономике с одним представительным потребителем упорядочивает интересующие нас состояния экономики так же, как и индикатор благосостояния первоначальной экономики.

Предположим противное. Случай $v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})) < \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}))$ невозможен, т.к. $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$ допустимы в задаче (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$. Поэтому предположим, что существует $\boldsymbol{p}$ такое, что

$$v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})) > \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})).$$

Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{x}}_m)$ — решение задачи (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$. По определению $v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})) = \sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$. Значит,

$$\sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) > \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})).$$

С другой стороны,

$$\sum_{i\in I} \hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Умножим на $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Складывая два неравенства, получаем

$$\sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \hat{\boldsymbol{x}}_i > \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Получили требуемое противоречие.

Задачи

1. Докажите вторую часть Теоремы 9.

2. а) Постройте контрпример с вогнутыми функциями $v_i(\cdot)$ и выпуклыми функциями $c_j(\cdot)$, который бы показывал, что условие $\hat{z}_i > 0 \ \forall i$ существенно в первой части Теоремы 9.

б) Постройте контрпример, который бы показывал, что условие выпуклости функции издержек существенно в первой части Теоремы 9.

3. Докажите Теорему 10.

4. Покажите, что в случае квазилинейной экономики $\mathcal{E}_1$ Парето-граница представляет собой гиперплоскость вида

$$\sum_{i\in I} u_i = const$$

5. Докажите Теоремы 12, 13 и 14.

6. Докажите, что при $x_k(p_k) > 0$ выполнено

$$x_k(p_k) = -\frac{\partial CS_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = -\frac{\partial CS_{ik}(p_k)}{\partial p_k}.$$

7. Пусть $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — допустимое состояние квазилинейной экономики, и $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{0}$ — некоторый вектор цен, причем $\boldsymbol{x}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$, и

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}\sum_{j\in J} \boldsymbol{y}_j$$

Докажите, что

$$\sum_{i\in I} u_i(\boldsymbol{x}_i, z_i) = W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_i$$

8. В экономике два блага ($l + 1 = 2$) и два потребителя, имеющие функции полезности $u_1 = \sqrt{x_1} + z_1$ и $u_2 = 2\sqrt{x_2} + z_2$. Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.

9. Пусть предпочтения потребителей представляются квазилинейными сепарабельными функциями полезности. Тогда без потери общности можно считать, что в экономике два блага ($l + 1 = 2$). Пусть $x_i(p)$ — спрос на первое благо i-го потребителя при ценах p,

$$D(p) = \sum_{i\in I} x_i(p) \text{ —}$$

суммарный спрос потребителей на первое благо, и $p(x) = D^{-1}(x)$ — обратная функция спроса. Предположим, что функция $p(x)$ является непрерывной и убывающей при $x \geqslant 0$. Докажите, что если

$$v(x) = \int_0^x p(q)dq,$$

то $v(x) + z$ является функцией полезности репрезентативного потребителя.

10. В ситуации предыдущей задачи функция спроса на благо имеет вид

$$D(p) = \frac{1}{4p^2}.$$

Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.