1. Математическое приложение

Свойства однородных функций

Напомним, что функция $\varphi(\boldsymbol{x})$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется однородной степени α, если для любого положительного числа t выполнено

$$\varphi(t\boldsymbol{x}) = t^{\alpha}\varphi(\boldsymbol{x}).$$

<u>Теорема 1</u>. Дифференцируемая функция $\varphi(.)$ является однородной степени α тогда и только тогда, когда выполняется тождество (формула Эйлера)

$$\sum x_i \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \alpha\,\varphi(\boldsymbol{x}).$$

<u>Теорема 2</u>. Если дифференцируемая функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ однородна степени α, то ее производная $\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$ $\forall i$ однородна степени $\alpha - 1$.

Теорема Юнга

<u>Теорема 3</u>. (теорема Юнга)

Пусть функция f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема в точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j \partial x_i} \qquad i, j = 1, ..., n.$$

Теоремы о неподвижной точке

<u>Теорема 4</u>. (теорема Брауэра)

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое, компактное и выпуклое множество и функция f: $A \to A$ непрерывна на A. Тогда существует точка $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = f(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

<u>Теорема 5</u>. (теорема Какутани)

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое, компактное и выпуклое множество и f: $A \to A$ — полунепрерывное сверху отображение, такое что $f(\boldsymbol{x})$ — непустое выпуклое множество для любой точки $\boldsymbol{x} \in A$. Тогда существует точка $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$:

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in f(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

Теоремы отделимости

<u>Теорема 6</u>. (теорема Минковского)

Пусть имеются непустое замкнутое выпуклое множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ и точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ не принадлежащая C. Тогда найдется вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, и два различных числа b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 > b_2$, такие что выполнены неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant b_1$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leqslant b_2 \quad \forall \boldsymbol{y} \in C.$$

<u>Теорема 7</u>.

Пусть имеются два непустых выпуклых множества $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ не имеющие общих точек. Тогда найдется вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, и число $b \in \mathbb{R}$, такие что выполнены неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant b \quad \forall \boldsymbol{x} \in C_1.$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leqslant b \quad \forall \boldsymbol{y} \in C_2.$$

Теоремы Куна–Таккера

Пусть имеется задача максимизации с ограничениями

$$\begin{aligned} &\phi(\boldsymbol{x}) \to \max \\ &\psi_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 \quad j = 1, ..., m \\ &\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned} \tag{*}$$

Функцией Лагранжа (лагранжианом) этой задачи называют следующую функцию:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \phi(\boldsymbol{x}) + \sum_j \lambda_j \psi_j(\boldsymbol{x}),$$

где $\lambda_j \geqslant 0$ ($j = 1, ..., m$) — множители Лагранжа.

Говорят, что задача (*) удовлетворяет условию Слейтера, если существует точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$, такая что

$$\psi_j(\boldsymbol{x}) > 0 \quad j = 1, ..., m.$$

<u>Теорема 8</u>. (о седловой точке)

Пусть задача (*) с вогнутыми функциями $\phi(\boldsymbol{x})$ и $\psi_j(\boldsymbol{x})$ ($j = 1, ..., m$) удовлетворяет условию Слейтера. Тогда точка $\bar{\boldsymbol{x}}$ является решением задачи (*) тогда и только тогда, когда существует вектор множителей Лагранжа $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^m_+$, такой что $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ является седловой точкой функции Лагранжа данной задачи.

<u>Теорема 9</u>.

Пусть функции $\phi(\boldsymbol{x})$ и $\psi_j(\boldsymbol{x})$ ($j = 1, ..., m$) являются вогнутыми и дифференцируемыми и задача (*) удовлетворяет условию Слейтера. Тогда допустимая точка задачи (*) $\bar{\boldsymbol{x}}$ является оптимальной тогда и только тогда, существует вектор множителей Лагранжа $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^m_+$, такой что выполнены следующие условия Куна-Таккера (условия дополняющей нежесткости):

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \boldsymbol{x}} \leqslant 0,$$

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \boldsymbol{x}} \bar{\boldsymbol{x}} = 0,$$

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \bar{\boldsymbol{\lambda}} = 0.$$

Теорема об огибающей

В микроэкономическом анализе широко используется класс утверждений (называемых теоремами об огибающей) следующего типа:

Рассмотрим класс задач, зависящих от параметра a.

$$\begin{aligned} &\phi(x_1, ..., x_n, a) \to \max \\ &\psi_j(x_1, ..., x_n, a) = 0, j = 1, ..., m. \end{aligned} \qquad (**)$$

<u>Теорема 10</u>.

Пусть $\boldsymbol{x}(a)$ — решение задачи (**), $\boldsymbol{\lambda}(a)$ — множители Лагранжа, соответствующие решению, и $l(a) = \phi(\boldsymbol{x}(a), a)$.

Предположим, что в точке a_0 выполнены следующие свойства:

♣ функции $\phi(.)$ и $\psi_j(.)$ вогнуты и дифференцируемы,

♣ решение задачи существует и единственно и функция $\boldsymbol{x}(.)$ дифференцируема,

Тогда выполняется соотношение

$$\frac{dl}{da}(a_0) = \frac{\partial \phi}{\partial a}(\boldsymbol{x}(a_0), a_0) + \sum_j \lambda_j(a_0) \frac{\partial \psi_i}{\partial a}(\boldsymbol{x}(a_0), a_0).$$

Теоремы о непрерывности решений задачи оптимизации

<u>Теорема 11</u>.

Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ – множество решений задачи

$u(\boldsymbol{x}) \to \max_{\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x} \leqslant \beta(\boldsymbol{p})$,

$\boldsymbol{x} \in X$,

где $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n_+$, $X \subset \mathbb{R}^n$, X–замкнутое, выпуклое и ограниченное множество и $\boldsymbol{0} \in X$.
Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на X.

Если функция $\beta(\boldsymbol{p})$ непрерывна и положительна при $\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$, , то функция $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ непрерывно в окрестности точки $\bar{\boldsymbol{p}}$.

Теорема 12.

Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ – множество решений задачи

$u(\boldsymbol{x})\to\max_{\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x} \leqslant \beta(\boldsymbol{p})$,

$\boldsymbol{x} \in X$,

где $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n_{++}$, $X\subset\mathbb{R}^n$, X–замкнутое, выпуклое множество и $\mathbf{0}\in X$.

Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на X.

Если функция $\beta(\boldsymbol{p})$ непрерывна и положительна при $\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$, , то функция $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ непрерывно в окрестности точки $\bar{\boldsymbol{p}}$.

Теорема 13.

Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ – множество решений задачи

$u(\boldsymbol{x})\to\max_{\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x} \leqslant \beta(\boldsymbol{p})$,

$\boldsymbol{x} \in X$,

где $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n_{+}$, $X\subset\mathbb{R}^n$, X–замкнутое, выуклое и ограниченное множество и $\mathbf{0}\in X$.

Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на X.

Если функция $\beta(\boldsymbol{p})$ непрерывна и положительна при $\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$, , то выпуклозначное отображение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ полунепрерывно сверху в окрестности точки $\bar{\boldsymbol{p}}$.

Теорема 14.

Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ – множество решений задачи

$u(\boldsymbol{x})\to\max_{\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x} \leqslant \beta(\boldsymbol{p})$,

$\boldsymbol{x} \in X$,

где $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n_{++}$, $X\subset\mathbb{R}^n$, X–замкнутое, выпуклое и множество и $\mathbf{0}\in X$.

Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на X.

Если функция $\beta(\boldsymbol{p})$ непрерывна и положительна при $\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$, , то выпуклозначное отображение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ полунепрерывно сверху в окрестности точки $\bar{\boldsymbol{p}}$.

Все эти теоремы являются вариантами известного утверждения Бержа:

Теорема 15.

(Многозначное) отображение, которое ставит в соответствие параметру λ множество точек, которые являются решениями следующей экстремальной задачи:

$u(\boldsymbol{x}, \lambda)\to\max_{\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{x} \in X(\lambda)$

является полунепрерывным сверху в точке $\bar{\lambda}$, если отображение $X(\lambda)$, и функция $u(\boldsymbol{x}, \lambda)$ непрерывны в окрестности этой точки.

Напомним, что непрерывность многозначного отображения является следующим обобщением непрерывности функции: отображение $X(\lambda)$ является полунепрерывным сверху в точке $\bar{\lambda}$, для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что ε-окрестность множества $X(\bar{\lambda})$ содержит множества $X(\lambda)$ для всех λ из δ-окрестности $\bar{\lambda}$; отображение $X(\lambda)$ является полунепрерывным снизу в точке $\bar{\lambda}$, для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех λ из δ-окрестности $\bar{\lambda}$ ε-окрестность множеств $X(\lambda)$ содержит $X(\bar{\lambda})$. Отображение называется непрерывным, если оно непрерывно сверху и снизу одновременно.

Заметим, что поскольку постоянное отображение непрерывно, непрерывность (полунепрепрерывность сверху) функции (отображения) предложения гарантируется при существовании решения задачи потребителя (поскольку функция прибыли непрерывна как функция цен).