1. Теория поведения потребителя

Как известно, в основе модели потребителя лежит гипотеза о рациональном поведении, которая сводится к выполнению двух основных принципов:

❖ Потребитель упорядочивает потребительские наборы (среди которых он осуществляет выбор) на основе предпочтений, удовлетворяющих некоторым естественным условиям.

❖ Потребитель выбирает наилучший набор (в соответствие с этим упорядочением) среди доступных ему потребительских наборов.

Таким образом, чтобы можно было анализировать и предсказывать поведение потребителя, необходимо описать для каждой ситуации выбора способ упорядочивания потребительских наборов и ограничения, которым должны удовлетворять допустимые выборы.

Так специфицированная модель позволяет изучать

♦ каким соотношениям удовлетворяет оптимальный выбор потребителя;

♦ как изменяется выбор потребителя при изменении множества доступных ему потребительских наборов (так называемая сравнительная статика).

1.1. Отношения предпочтения

В отличие от обыденного понимания, понятие блага (товара) в микроэкономике имеет довольно широкий характер: блага различают не только по их физическим характеристикам, но и по времени, когда они становятся доступными и по местам их расположения. Будем предполагать, что потребителю доступны l благ. Под **множеством допустимых альтернатив** X будем понимать все физически возможные наборы благ и, как правило, будем рассматривать его как некоторое подмножество неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^l_+$, т.е. $X \subset \mathbb{R}^l_+$. В некоторых постановках полезно предполагать, что количество блага может быть отрицательным; в частности такая потребность может возникнуть, когда в качестве одного из товаров рассматривается труд индивидуума.

Мы предполагаем, что в основе действий потребителя лежат его предпочтения, и в соответствии с этими предпочтениями он осуществляет выбор между доступными ему в той ситуации, с которой он сталкивается, наборами из множества допустимых альтернатив. Доступность потребительских наборов может определяться финансовыми, законодательными и другими ограничениями.

Обсудим сначала типичные предположения относительно предпочтений потребителя. Отношение предпочтения является примером того, что в математике называется бинарным отношением. Напомним, что формально **бинарное отношение** $\mathfrak{R}$ — это подмножество множества $X \times X$ ($\mathfrak{R} \subseteq X \times X$). Другими словами $\mathfrak{R}$ — это некоторое множество упорядоченных пар $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — элементы множества X. Когда пара $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ принадлежит множеству $\mathfrak{R}$, говорят, что $\boldsymbol{x}$ находится в отношении $\mathfrak{R}$ к $\boldsymbol{y}$, что обычно записывается как $\boldsymbol{x} \,\mathfrak{R}\, \boldsymbol{y}$.

Определим теперь некоторые свойства бинарных отношений, которые в дальнейшем используем при рассмотрении отношения предпочтения. Наиболее часто в теории поведения потребителя рассматриваются свойства полноты и транзитивности.

Определение 1.

Отношение $\Re$ называется полным, если для любых двух элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ множества X ($\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$) выполнено либо $\boldsymbol{x}\,\Re\,\boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y}\,\Re\,\boldsymbol{x}$ (либо и то и другое).

Полнота отношения $\Re$ означает сопоставимость любых двух элементов множества X по этому свойству. Так если мы рассматриваем отношение $\Re_1$ “быть братом” на множестве населения планеты Земля, то очевидно, что данное отношение не обладает свойством полноты. Если же мы рассмотрим отношение $\Re_2$ “не ниже ростом чем” на том же множестве альтернатив, то видим полноту отношения $\Re_2$. Кроме того отметим, что если два индивидуума $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеют одинаковый рост, то мы имеем как $\boldsymbol{x}\,\Re_2\,\boldsymbol{y}$, так и $\boldsymbol{y}\,\Re_2\,\boldsymbol{x}$.

Определим теперь свойство транзитивности.

Определение 2.

Отношение $\Re$ называется транзитивным, если для любых трех элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ множества X ($\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$), из того что $\boldsymbol{x}\,\Re\,\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y}\,\Re\,\boldsymbol{z}$, следует что $\boldsymbol{x}\,\Re\,\boldsymbol{z}$.

Полное отношение не обязано быть транзитивным. Чтобы показать это рассмотрим следующий условный пример. Пусть множество альтернатив состоит из 3 индивидуумов, первый из которых должен некоторую сумму денег второму, второй должен третьему, а третий должен первому. Введем на этом множестве участников отношение “должен некоторую сумму денег”. Как не трудно проверить, данное отношение является полным, но не удовлетворяет свойству транзитивности. В то же время отношение $\Re_2$ упоминавшееся выше обладает этим свойством.

Определение 3.

Отношение $\Re$ называется рефлексивным, если для каждого $\boldsymbol{x} \in X$, выполнено $\boldsymbol{x}\,\Re\,\boldsymbol{x}$.

Отношение $\Re_3$ “стоит в списке очередников на жилье не раньше чем” обладает свойством рефлексивности. В то же время, отношение $\Re_4$ “состоит в браке с” не удовлетворяет свойству рефлексивности.

Определение 4.

Отношение $\Re$ называется нерефлексивным, если не существует $\boldsymbol{x} \in X$, такое что выполнено $\boldsymbol{x}\,\Re\,\boldsymbol{x}$.

Примером нерефлексивного отношения является отношение $\Re_4$ приведенное выше, а примером отношения не удовлетворяющим этому свойству является отношение $\Re_3$. Как не трудно понять, нерефлексивным является отношение для которого свойство рефлексивности не выполнено для каждого (!) элемента множества X. Примером отношения, которое не является ни рефлексивным, ни нерефлексивным является отношение $\Re_5$ "любит", так как не очевидно, что каждый человек любит себя, но и не очевидно, что не существует людей, которые любят себя.

Определение 5.

Отношение $\Re$ называется **асимметричным**, если для любой пары $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, из $\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{y}$ следует, что $\boldsymbol{y} \Re \boldsymbol{x}$ неверно.

Примером асимметричного отношения может служить отношение $\Re_6$ "быть женой", а отношение $\Re_7$ "такого же роста, как и" этим свойством не обладает.

Определение 6.

Отношение $\Re$ является **отрицательно транзитивным**, если для любых трех элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ множества X таких, что $\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{y}$, выполнено либо $\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{z}$, либо $\boldsymbol{z} \Re \boldsymbol{y}$.

Название этого свойства происходит от следующей альтернативной формы его задания:

$$\neg(\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{z}) \wedge \neg(\boldsymbol{z} \Re \boldsymbol{y}) \Rightarrow \neg(\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{y}).$$

Примером отношения, которое удовлетворяет свойству отрицательной транзитивности, служит отношение $\Re_8$ "выше ростом, чем". (Попытайтесь привести примеры отношений, которые этому свойству не удовлетворяют).

Определение 7.

Отношение $\Re$ называется **ацикличным**, если из $\boldsymbol{x}_1 \Re \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_2 \Re \boldsymbol{x}_3$, ..., $\boldsymbol{x}_{n-1} \Re \boldsymbol{x}_n$ следует, что $\boldsymbol{x}_n \Re \boldsymbol{x}_1$ ложно.

(Попытайтесь придумать несколько примеров отношений как удовлетворяющих, так и не удовлетворяющих этому свойству).

В экономической теории предпочтение потребителя — единственная его характеристика, которая принимается во внимание при объяснении его поведения. Поэтому в дальнейшем в теории потребления мы отождествляем потребителя с его предпочтениями.

Будем строить теорию потребительского поведения на основе **нестрогого отношения предпочтения** $\succeq$ — бинарного отношения, заданного на множестве допустимых альтернатив. Если для двух альтернатив $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из X выполняется соотношение $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$, будем говорить, что альтернатива $\boldsymbol{x}$ *не хуже*, чем альтернатива $\boldsymbol{y}$ (для данного потребителя).

Традиционным для экономической теории является предположение о том, что нестрогое отношение предпочтения, на основе которого потребители упорядочивают альтернативы, полно и транзитивно. Эти предположения тесно связаны с понятием *рациональности* экономических агентов. Как представляется, неотъемлемым свойством рациональности является непротиворечивость выбора и возможность осуществить выбор в любой мыслимой ситуации. Понятно, что эти условия в наших терминах приобретают форму свойств полноты и транзитивности. (Заметим, что нестрогое отношение предпочтения будет полным, если для любых двух альтернатив из допустимого множества альтернатив одна из них не хуже другой. Нестрогое отношение предпочтения будет транзитивным, если для любых трех альтернатив из множества допустимых альтернатив из того, что первая не хуже второй, а вторая не хуже третей, следует, что первая не хуже третей.)

Существуют, однако, ситуации, когда поведение потребителей несовместимо с предположением, что его предпочтения полны и транзитивны. Чаще всего причина такого нарушения — отсутствие транзитивности в наблюдаемых выборах участника.

Если мы попросим индивидуума сравнить стакан чая, куда положили одну крупинку сахара, и стакан чая с двумя крупинками, то практически всегда получим ответ о безразличии в выборе. Такой же ответ получим при сравнении стаканов с двумя и тремя крупинками. Продолжим наш опрос достаточно долго, и мы придем к абсурдному выводу, если будем настаивать на транзитивности. А разве для индивидуума совершенно безразлично, что пить — стакан с одной крупинкой, или стакан с килограммом сахара?! Как не трудно понять, причина недоразумения кроется в принципиальной невозможности объективного сравнения малых величин блага.

Другими причинами появления нетранзитивности можно назвать то что на индивидуальный выбор участников могут влиять мнения других людей, его предпочтения сами по себе могут меняться во времени и это далеко не все.

На основе данного нестрогого отношении предпочтения можно построить другие два отношения между альтернативами, которые будут использоваться для характеристики поведения потребителя:

Строгое отношение предпочтения $\succ$ определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X), \text{ если } \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}, \text{ но не } \boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}.$$

Если для двух альтернатив $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из X выполняется соотношение $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$, будем говорить, что альтернатива $\boldsymbol{x}$ *лучше*, чем альтернатива $\boldsymbol{y}$.

В случае полноты нестрогого отношения предпочтения это определение можно записать в эквивалентной форме:

Утверждение 1.
Пусть нестрогое отношение предпочтения полно, тогда

$(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}) \;\Leftrightarrow\;$ (неверно, что $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$).

<u>Доказательство</u>:

$\Rightarrow$ Утверждение $(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}) \;\Rightarrow\;$ (неверно, что $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$) следует прямо из определения строгого отношения предпочтения.

$\Leftarrow$ Полнота нестрогого отношения предпочтения означает, что

(неверно, что $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$) $\Rightarrow (\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y})$.

По определению строгого отношения предпочтения условия

(неверно, что $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$) и $(\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y})$

в совокупности означают $(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y})$.

■

Заметим, что на основе данного строгого отношения предпочтения можно построить нестрогое отношение предпочтения следующего типа:

$\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$, если неверно, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

Отношение безразличия ~ определяется следующим образом:

$\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$: $(\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x})$.

Если для двух альтернатив $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из X выполняется соотношение $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$, будем говорить, что альтернатива *эквивалентна* альтернативе $\boldsymbol{y}$.

Заметим, что свойства полноты и транзитивности нестрогого отношения предпочтения обуславливают свойства асимметричности и отрицательной транзитивности построенного на его основе строгого отношения предпочтения и наоборот, что показывают два нижеследующих утверждения.

Утверждение 2.

Строгое отношение предпочтения является асимметричным тогда и только тогда, когда нестрогое отношение предпочтения полное.

<u>Доказательство</u>:

$\Rightarrow$ Асимметричность строгого отношения предпочтения означает, что для любой пары $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ из $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ следует, что $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. Значит, либо $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ неверно, либо $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. Отсюда, пользуясь определением строгого отношения предпочтения, либо $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y} \preceq \boldsymbol{x}$. А это и есть полнота нестрогого отношение предпочтения.

$\Leftarrow$ Пусть теперь мы нестрогое отношение предпочтения полно, т.е. для любой пары $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ либо $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y} \preceq \boldsymbol{x}$. Согласно Утверждению **1** это то же самое, что либо $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ неверно, либо $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. Значит, из $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ следует, что $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. А это и означает асимметричность строгого отношения предпочтения.

■

Утверждение 3.

Пусть нестрогое отношение предпочтения является полным. Тогда отрицательная транзитивность строгого отношение предпочтения эквивалентно транзитивности нестрогого отношения предпочтения.

<u>Доказательство</u>:

В силу Утверждения **1** имеем

$$\urcorner(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}) \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}).$$

Очевидно, что отрицательная транзитивность строгого отношение предпочтения в форме

$$\urcorner(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z}) \wedge \urcorner(\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{y}) \Rightarrow \urcorner(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y})$$

эквивалентна транзитивности нестрогого отношения предпочтения:

$$(\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{z}) \wedge (\boldsymbol{z} \succeq \boldsymbol{y}) \Rightarrow (\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}).$$

■

<u>Замечание</u>: в этом утверждении, согласно Утверждению **2**, полноту нестрогого отношения предпочтения можно заменить на асимметричность строгого отношения предпочтения.

Утверждения **2** и **3** в совокупности доказывают, что из транзитивности и полноты нестрогого отношения предпочтения следует асимметричность и отрицательная транзитивность строгого отношения предпочтения и наоборот.

Существует две традиции построения теории поведения потребителя, различающиеся способом описания предпочтений индивидуума. Первая, которой мы и будем придерживаться, опирается на нестрогое отношение предпочтения. Вторая же традиция исходит из строгого отношения предпочтения. Заметим, что эти две традиции приводят к одинаковым результатам, если строгое и нестрогое отношения предпочтения построены на основе друг друга указанным выше способом.

Утверждение 4.

Если строгое отношение предпочтения асимметрично и отрицательно транзитивно, то оно

(1) транзитивно,

(2) ациклично,

(3) нерефлексивно.

<u>Доказательство</u>:

(1) Пусть строгое отношение предпочтения не является транзитивным, то есть существуют такие $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in X$, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{y}$, но $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ не выполнено. По ассимметричности из $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z}$ следует, что $\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. Так как $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ неверно и $\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{x}$ неверно, то по отрицательной транзитивности $\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{y}$ неверно. Получили противоречие.

(2) Пусть для $\boldsymbol{x}_{\mathrm{k}} \in X$ (k=1,...,n) выполнено $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2 \succ \boldsymbol{x}_3 \succ \ldots \succ \boldsymbol{x}_{n-1} \succ \boldsymbol{x}_n$. По индукции и только что доказанной транзитивности имеем $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_n$. Из ацикличности получаем, что $\boldsymbol{x}_n \succ \boldsymbol{x}_1$ неверно.

(3) Пусть $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x}$. Так как $\succ$ ациклично, это означает, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. Противоречие.

■

Определение 8.

Множеством безразличия (кривой безразличия) $\mathrm{I}(\boldsymbol{x})$, соответствующим точке $\boldsymbol{x} \in X$ называется множество всех точек, эквивалентных $\boldsymbol{x}$:

$$\mathrm{I}(\boldsymbol{x}) = \{\, \boldsymbol{y} \in X \mid \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x} \}.$$

Утверждение 5.

Если нестрогое отношение предпочтения полно и транзитивно, то отношение эквивалентности

(1) транзитивно,

(2) рефлексивно,

(3) любые два множества безразличия либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Доказательство:

(1) Пусть для $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in X$, выполнено $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{z} \sim \boldsymbol{y}$. По определению эквивалентности имеем $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{z} \preceq \boldsymbol{y}$, и, кроме того, $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{z} \succeq \boldsymbol{y}$. По транзитивности нестрогого отношения предпочтения это влечет $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Значит, $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$.

(2) Из полноты нестрогого отношения предпочтения следует его рефлексивность, т.е. $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{x}$ $\forall\, \boldsymbol{x} \in X$. По определению эквивалентности это влечет $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}$.

(3) Пусть $\mathrm{I}(\boldsymbol{x})$ и $\mathrm{I}(\boldsymbol{y})$ — два множества безразличия и и пусть они имеют общую точку $\boldsymbol{z}$. Тогда по определению множеств безразличия, используя транзитивность и рефлексивность, имеем $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$. Используя транзитивность и рефлексивность легко показать совпадение $\mathrm{I}(\boldsymbol{x})$ и $\mathrm{I}(\boldsymbol{y})$.

■

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Если отношение предпочтения полно и транзитивно, то оно
- ♦ нерефлексивно;
- ♦ асимметрично;
- ♦ рефлексивно.

2. Если отношение предпочтения является транзитивным, то оно также является
- ♦ ацикличным;
- ♦ полным;
- ♦ нерефлексивным.

3. Если отношение предпочтения является ацикличным, то оно также является
- ♦ транзитивным;
- ♦ асимметричным;
- ♦ рефлексивным.

4. Асимметричное отношение предпочтения обладает свойством

♦ нерефлексивности;
♦ транзитивности;
♦ рефлексивности.

5. Из свойства отрицательной транзитивности и асимметричности следует свойство
♦ цикличности;
♦ транзитивности;
♦ рефлексивности.

6. Бинарное отношение «А отец В» не обладает свойствами
♦ полноты;
♦ нерефлексивности;
♦ асимметричности.

7. Бинарное отношение «А родная сестра В» обладает свойством
♦ полноты;
♦ транзитивности;
♦ рефлексивности.

8. Бинарное отношение «А сдает экзамен В» на множестве людей, находящихся в данный момент в Университете обладает свойством
♦ полноты;
♦ нерефлексивности;
♦ рефлексивности.

9. Бинарное отношение $\Re$ называется нерефлексивным, если
♦ из того, что $x\Re y$ следует, что неверно $y\Re x$;
♦ из того, что неверны $x\Re y$ и $y\Re z$ следует, что неверно $x\Re z$;
♦ неверно, что $x\Re x$.

10. Бинарное отношение $\Re$ называется асимметричным, если
♦ из того, что $x\Re y$ следует, что неверно $y\Re x$;
♦ из того, что неверны $x\Re y$ и $y\Re z$ следует, что неверно $x\Re z$;
♦ неверно, что $x\Re x$.

11. Бинарное отношение называется отрицательно транзитивным, если
♦ из того, что $x\Re y$ следует, что неверно $y\Re x$;
♦ из того, что неверны $x\Re y$ и $y\Re z$ следует, что неверно $x\Re z$;
♦ неверно, что $x\Re x$.

12. Покажите, что:
Асимметричное и отрицательно транзитивное отношение предпочтения является
- нерефлексивным (т.е. неверно, что $x \succ x$);
- транзитивным (т.е. если $x \succ y$, $y \succ z$, то $x \succ z$);

- ацикличным (т.е. если $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2 \succ \boldsymbol{x}_3 \ldots \boldsymbol{x}_{n-1} \succ \boldsymbol{x}_n$, то неверно, что $\boldsymbol{x}_n \succ \boldsymbol{x}_1$).

13. Пусть X состоит из n-мерных векторов (с неотрицательными компонентами), а отношение задано следующим образом: $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$, если все компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ (строго) больше соответствующих компонент вектора $\boldsymbol{y}$. Охарактеризуйте соответствующее ему отношение нестрогого предпочтения и отношение безразличия ($\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$, если неверно, что $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$).

1.2. Элементы теории выбора и выявленные предпочтения

Обычно в микроэкономике описание предпочтений с помощью бинарных отношений используется в качестве отправной точки анализа рационального выбора потребителя. Но возможен и другой подход, отправной точкой которого непосредственно является выбор участника. Преимущество такого подхода состоит в следующем: мы можем наблюдать выбор участника, но не его предпочтения. Однако в некотором достаточно широком классе случаев подход, основанный на выборе, полностью эквивалентен подходу, основанному на предпочтениях, в том смысле, что возможно по известному выбору построить отношение предпочтения, которое порождает этот выбор. С другой стороны, подход, основанный на предпочтениях, позволяет построить более богатую теорию.

Для описания выбора участника в теории выбора вводятся понятия ситуации выбора и правила выбора, определенного на множестве ситуаций выбора. Ситуация выбора — это некоторое подмножество множества допустимых (физически) альтернатив X, с которым участник сталкивается и из которого он может выбирать.

Определение 9.

Пусть $\mathcal{A}$ — множество ситуаций выбора ($\mathcal{A} \subseteq 2^X$). Правило выбора C(.) ставит в соответствие каждой ситуации выбора A из $\mathcal{A}$ непустое множество $C(A)$ выбранных альтернатив, каждая из которых является элементом A, т.е. $C(A) \subseteq A$.

Рациональность потребителя в терминах функции выбора выражается в «аксиоме выбора Хаутеккера».

Аксиома выбора Хаутеккера
(Аксиома выявленных предпочтений)

Пусть A и A' — две ситуации выбора и альтернативы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ принадлежат как A, так и A'. Если $\boldsymbol{x} \in C(A)$, а $\boldsymbol{y} \in C(A')$, то $\boldsymbol{x} \in C(A')$.

Смысл данного свойства прозрачен. Если подразумевать, что потребитель рационален в том смысле, что выбирает в любой ситуации выбора “лучшие” альтернативы, то данная аксиома устанавливает условие непротиворечивости его выбора.

Определение 10.

Будем говорить, что альтернатива $\boldsymbol{x}$ нестрого выявленно предпочитается альтернативе $\boldsymbol{y}$, если существует ситуация выбора A, такая что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A)$.

В дальнейшем нестрогое отношение выявленного предпочтения будем обозначать $\succeq^{\mathrm{R}}$ и говорить, что $\boldsymbol{x}$ *выявленно не хуже* $\boldsymbol{y}$, когда $\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{y}$. Смысл этого определения состоит в том, что если была выбрана альтернатива $\boldsymbol{x}$ в ситуации выбора, когда была доступна также альтернатива $\boldsymbol{y}$, значит, $\boldsymbol{x}$ не может быть хуже $\boldsymbol{y}$.

Определение 11.

Будем говорить, что альтернатива $\boldsymbol{x}$ строго выявленнно предпочитается альтернативе $\boldsymbol{y}$, если существует ситуация выбора A, такая что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A)$, но $\boldsymbol{y} \notin \mathrm{C}(A)$.

Строгое отношение выявленного предпочтения будем обозначать $\succ^{\mathrm{R}}$ и говорить, что $\boldsymbol{x}$ *выявленно лучше* $\boldsymbol{y}$, когда $\boldsymbol{x} \succ^{\mathrm{R}} \boldsymbol{y}$. Смысл этого определения состоит в том, что если в какой-то ситуации выбора были доступны как $\boldsymbol{x}$, так и $\boldsymbol{y}$, но альтернатива $\boldsymbol{x}$ была выбрана, а альтернатива $\boldsymbol{y}$ — нет, значит, $\boldsymbol{x}$ лучше $\boldsymbol{y}$.

Аксиому выбора Хаутеккера можно переформулировать в терминах выявленных предпочтений:

> Если $\boldsymbol{x}$ выявленно не хуже $\boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{y}$ не может быть выявленно лучше $\boldsymbol{x}$, т.е.
> $(\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{y}) \Rightarrow \urcorner (\boldsymbol{y} \succ^{\mathrm{R}} \boldsymbol{x})$.

Рациональность потребителя в терминах предпочтений тесно связана с рациональностью выбора потребителя, как она сформулирована в аксиоме выбора Хаутеккера.

Утверждение 6.

Пусть правило выбора $\mathrm{C}(A)$ определено на множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$ и при этом

- ♦ выполнена аксиома выбора Хаутеккера;
- ♦ $\mathcal{A}$ содержит все двух- и трехэлементные подмножества X.

Тогда нестрогое отношение выявленного предпочтения $\succeq^{\mathrm{R}}$, соответствующее правилу выбора $\mathrm{C}(A)$

(1) полно,

(2) транзитивно.

Доказательство:

(1) Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — две альтернативы из X. Ситуация выбора $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ должна принадлежать $\mathcal{A}$, так как это двухэлементное подмножество X. Поскольку по определению

$C(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})$ не должно быть пустым, то либо $\boldsymbol{x} \in C(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})$, либо $\boldsymbol{y} \in C(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})$. То есть либо $\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y} \succeq^{R} \boldsymbol{x}$.

(2) Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ — три альтернативы из X, такие что $\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y} \succeq^{R} \boldsymbol{z}$. Ситуация выбора $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ должна принадлежать $\mathcal{A}$, так как это трехэлементное подмножество X.

Покажем, что $\boldsymbol{x} \in C(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$. Если $\boldsymbol{y} \in C(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$, то из аксиомы выбора Хаутеккера следует, что $\boldsymbol{x} \in C(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$, поскольку $\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{y}$. Аналогично, если $\boldsymbol{z} \in C(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$, то $\boldsymbol{x} \in C(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$. Поскольку $C(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$ непусто, то в любом случае $\boldsymbol{x} \in C(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$. Это влечет за собой, что
$\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{z}$.

■

Данное утверждение показывает, что выбор на основе правила выбора, удовлетворяющего аксиоме Хаутеккера, можно «рационализировать» как выбор на основе некоторого отношения предпочтения. Заметим, что, как будет показано ниже, справедливо и обратное.

Если заданы предпочтения $\succeq$, то правило выбора потребителя, соответствующее этим предпочтениям естественно определить следующим образом:

$$C_{\succeq}(A) \equiv \{\boldsymbol{x} \in A \mid \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y} \ \forall\, \boldsymbol{y} \in A\}.$$

Утверждение 7.

Пусть праило выбора $C_{\succeq}(A)$ соответствует транзитивному нестрогому отношению предпочтения $\succeq$. Тогда это правило выбора удовлетворяет аксиоме выбора Хаутеккера.

<u>Доказательство</u>:

Пусть $\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{y}$. Это означает, что в некоторой ситуации выбора A как $\boldsymbol{x}$, так и $\boldsymbol{y}$ можно было выбрать ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$) и среди выбранных альтернатив была альтернатива $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in C_{\succeq}(A)$). Поскольку правило $C_{\succeq}(A)$ порождено нестрогим отношением предпочтения $\succeq$, то $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Пусть в некоторой другой ситуации выбора A' как $\boldsymbol{x}$, так и $\boldsymbol{y}$ можно было выбрать ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$) и среди выбранных альтернатив была альтернатива $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{y} \in C_{\succeq}(A')$). Это означает, что $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{z}\ \forall\, \boldsymbol{z} \in A'$. Из транзитивности следует, что то же самое должно быть верным для $\boldsymbol{x}$, т.е. $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{z}\ \forall\, \boldsymbol{z} \in A'$. Таким образом, $\boldsymbol{x} \in C_{\succeq}(A')$, то есть аксиома Хаутеккера выполнена.

■

Покажем теперь, что если множество ситуаций выбора, на котором определено правило выбора, достаточно богато, то подход, берущий за основу правило выбора, эквивалентен подходу, берущему за основу предпочтения.

Утверждение 8.

Пусть выполнены условия Утверждения 6. Тогда правило выбора $C^{R}(A)$, порожденное нестрогим отношением выявленного предпочтения $\succeq^{R}$, сопадает с исходным правилом выбора на $\mathcal{A}$, т.е.

$$\mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A) = \mathrm{C}(A)\ \forall\ A \in \mathcal{A}.$$

Доказательство:

$(\mathrm{C}(A) \subseteq \mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A))$

Пусть $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A)$. Тогда по определению нестрогого выявленного предпочтения $\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{y}\ \forall\ \boldsymbol{y} \in A$. Отсюда видно, что $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A)$.

$(\mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A) \subseteq \mathrm{C}(A))$

Пусть $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A)$. Поскольку множество $\mathrm{C}(A)$ непусто, то существует альтернатива $\boldsymbol{y} \in \mathrm{C}(A)$. Условие $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A)$ означает, что для произвольной альтернативы $\boldsymbol{z} \in A$, в том числе и для $\boldsymbol{y}$, выполнено $\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{z}$, то есть существует такая ситуация выбора A', что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$ и $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A')$.

Таким образом, мы имеем $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$, $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A')$ и $\boldsymbol{y} \in \mathrm{C}(A)$. По аксиоме Хаутеккера это означает, что $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A)$.

■

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Нестрогое отношение выявленного предпочтения всегда обладает свойством
♦ полноты;
♦ транзитивности;
♦ рефлексивности.

2. Пусть множество альтернатив X конечно. Тогда функция выбора C(.), определенная на всех подмножествах множества X, удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений Хаутеккера, если
♦ правило (функция) выбора является вогнутым;
♦ выбор участника может быть описан полным и транзитивным отношением предпочтения;
♦ функция спроса участника может быть получена на основе сравнения потребительских излишков.

3. Множество альтернатив X конечно и состоит из 3 элементов $X = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Участник осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, $A_2=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Выбор участника описывается функцией выбора C(.). Какие из нижеприведенных правил выбора не удовлетворяют аксиоме выявленных предпочтений?
♦ $\mathrm{C}_1(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})=\{\boldsymbol{x}\}$, $\mathrm{C}_1(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})=\{\boldsymbol{x}\}$;
♦ $\mathrm{C}_2(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})=\{\boldsymbol{x}\}$, $\mathrm{C}_2(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})=\{\boldsymbol{y}\}$;
♦ $\mathrm{C}_3(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, $\mathrm{C}_3(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$.

4. Множество альтернатив X конечно и состоит из 3-х элементов $X = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Участник осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, $A_2=\{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$, $A_3=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\}$. Выбор участника описывается функцией выбора C(.), при этом $\mathrm{C}(A_1) = \{\boldsymbol{x}\}$, $\mathrm{C}(A_2) = \{\boldsymbol{y}\}$, $\mathrm{C}(A_3) = \{\boldsymbol{z}\}$. Какие из нижеприведенных высказываний справедливы?

1) Выбор удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений.
2) Выбор участника представим некоторым отношением предпочтения.
♦ 1;
♦ 2;
♦ 1, 2.

5. Какому из перечисленных утверждений эквивалентна аксиома выявленных предпочтений?
♦ Пусть X — множество альтернатив. Пусть $A, A' \subseteq X$ и кроме того $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$.
Тогда из того, что $\boldsymbol{x} \in C(A)$ и $\boldsymbol{y} \in C(A')$ следует $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C(A)$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C(A')$, где C(.) — функция выбора.
♦ Пусть X — множество альтернатив. Тогда из того, что $\boldsymbol{x} \in A$ и $\boldsymbol{y} \in A'$ следует $\boldsymbol{x} \in A'$ и $\boldsymbol{y} \in A$, где $A, A' \subseteq X$ некоторые подмножества X.
♦ Пусть X — множество альтернатив. Пусть $A, A' \subseteq X$ и кроме того $\boldsymbol{x} \in C(A)$ и $\boldsymbol{y} \in C(A')$, где C(.) — функция выбора. Тогда $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$.

6. Пусть X — множество альтернатив.
Пусть $A, A' \in X$ и кроме того $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$. Тогда из того, что $\boldsymbol{x} \in C(A)$ и $\boldsymbol{y} \in C(A)$ следует $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \in C(A)$ и $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \in C(A')$, где C(.) — правило выбора. Данное свойство является:
♦ формулировкой транзитивности отношения выявленного предпочтения;
♦ формулировкой аксиомы выявленных предпочтений, в которой допущена ошибка;
♦ формулировкой аксиомы выявленных предпочтений.

7. Пусть X — множество альтернатив. Рассмотрим $A, A' \in X$ и такие наборы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$. Тогда из того, что $\boldsymbol{x} \in C(A)$ и $\boldsymbol{y} \in C(A')$ следует $\boldsymbol{y} \in C(A)$ и $\boldsymbol{x} \in C(A')$, где C(.) — функция выбора.
Данное свойство является:
♦ формулировкой транзитивности отношения выявленного предпочтения;
♦ формулировкой аксиомы выявленных предпочтений, в которой допущена ошибка;
♦ формулировкой аксиомы выявленных предпочтений.

8. Отношение выявленного предпочтения обладает свойством полноты, если…
♦ правило выбора задано на множестве всех подмножеств множества альтернатив;
♦ отношение выявленного предпочтения отрицательно транзитивно;
♦ отношение выявленного отношения удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений.

9. Пусть множество альтернатив X конечно и состоит из 3-х элементов $X=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Участник осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1 = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, $A_2=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Выбор участника описывается функцией выбора C(.).

Отношение выявленного предпочтения заданное для данной ситуации
- ♦ не будет удовлетворять аксиоме выявленных предпочтений;
- ♦ не будет полным;
- ♦ будет обладать свойством транзитивности.

10. Одно из необходимых условий для того, чтобы отношение выявленного предпочтения было транзитивно состоит в том, что
- ♦ правило выбора непрерывно;
- ♦ отношение выявленного предпочтения рефлексивно;
- ♦ правило выбора задается на всех трехэлементных подмножествах множества альтернатив.

11. Пусть функция $C_{\succ}(.)$ сопоставляет каждому непустому подмножеству A множества X совокупность его наилучших по $\succ$ элементов

$$(C_{\succ}(A) \equiv (\boldsymbol{x} \in A \mid \text{не существует } \boldsymbol{y} \in A, \text{ такой, что } \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}).$$

Покажите, что если нестрогое и строгое отношения предпочтения связаны соотношением

$$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}, \text{ но не } \boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x},$$

то построенные на их основе правила выбора совпадут, то есть область определения $\mathcal{A}$ у них будет одинаковой и

$$C_{\succ}(A) = C_{\succeq}(A) \ \forall\ A \in \mathcal{A}.$$

12. Пусть множество альтернатив X конечно, определенное на нем отношение предпочтения $\succ$ антисимметрично и отрицательно транзитивно, а функция $C(.)$ сопоставляет каждому непустому подмножеству A множества X совокупность его наилучших по $\succ$ элементов

$(C_{\succ}(A) \equiv (\boldsymbol{x} \in A \mid$ не существует $\boldsymbol{y} \in A$, такой, что $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x})$.

Покажите, что

(1) для всякого A множество $C_{\succ}(A)$ не пусто, а функция $C_{\succ}(A)$ удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений Хаутеккера;

(2) если $C(A) \subseteq A$ — произвольная функция выбора, сопоставляющая каждому непустому подмножеству A непустое подмножество его элементов и удовлетворяющая аксиоме выбора Хаутеккера, то существует антисимметричное и отрицательно транзитивное отношение предпочтения $\succ$, такое что

$$C(A) = C_{\succ}(A).$$

1.3. Представление предпочтений функцией полезности

Мы показали при достаточно естественных предположениях эквивалентность трех подходов к описанию предпочтений участников:
- ❖ Первоначально задано нестрогое отношение предпочтения;
- ❖ Первоначально задано строгое отношение предпочтения;

❖ Первоначально задана функция выбора участника на множестве ситуаций выбора.

Далее мы будем строить свои рассуждения, беря за основу нестрогое отношение предпочтения, но следует отметить, что нижеприведенные рассуждения можно перенести на случай двух других походов. В этом разделе мы рассмотрим условия, при которых на основании нестрогого отношения можно получить числовой индикатор полезности (функцию полезности) с некоторыми наперед заданными свойствами.

Удобно (особенно в приложениях теории) иметь дело с ситуациями, когда предпочтения потребителя описываются функцией полезности. Мы всюду будем предполагать, что область значения функции полезности — это действительная прямая, т.е. данная функция является вещественнозначной.

Определение 12.

Будем называть $u(.)\colon X \to \mathbb{R}$ **функцией полезности** потребителя, соответствующей нестрогому отношению предпочтения $\succeq$, если для всякой пары альтернатив $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ верно тогда и только тогда, когда $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$, т.е.

$$\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y} \iff u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y}).$$

Какие свойства предпочтений (и множества альтернатив, на которых заданы предпочтения) гарантируют существование функции полезности?

Следующее утверждение описывает необходимое условие существования функции полезности.

Утверждение 9.

Если функция полезности существует, то нестрогое отношение предпочтения является

(1) полным,

(2) транзитивным.

Доказательство:

(1) Для любой пары альтернатив $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ выполняется по крайней мере одно из неравенств $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$ и $u(\boldsymbol{y}) \geqslant u(\boldsymbol{x})$. Поэтому либо $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$.

(2) Пусть для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ выполняются соотношения $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{z}$. По определению функции полезности это означает, что $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y}) \geqslant u(\boldsymbol{z})$. Из $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{z})$ следует, что $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{z}$.

■

Отметим, что когда множества альтернатив не более чем счетное, условия полноты и транзитивности являются и достаточными для существования функции полезности. Множество альтернатив будет счетным, например, когда товары потребляются только в целых количествах.

Утверждение 10.

Если множество альтернатив счетно, то для любого полного и транзитивного нестрогого отношения предпочтения существует функция полезности.

Доказательство:

Пусть множество альтернатив счетно. Тогда его можно представить в виде последовательности альтернатив $\boldsymbol{x}^i$, i=1, 2, ... Доказательство утверждения строится в виде алгоритма.

Пусть мы уже присвоили величину полезности первым N альтернативам из данной последовательности. Требуется присвоить величину полезности альтернативе $\boldsymbol{x}^{N+1}$. Рассмотрим два подмножества множества $A^N = \{\boldsymbol{x}^1,..., \boldsymbol{x}^N\}$:

$$A_+^N = \{\boldsymbol{x}\in A^N \mid \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{x}^{N+1}\} \quad \text{и} \quad A_-^N = \{\boldsymbol{x}\in A^N \mid \boldsymbol{x}^{N+1} \succeq \boldsymbol{x}\}.$$

Обозначим $\bar{\boldsymbol{x}}$ такой элемент множества A_+^N, что $\boldsymbol{x} \succeq \bar{\boldsymbol{x}}$ $\forall$ $\boldsymbol{x}\in A_+^N$. В случае неединственности такого элемента берем любой из них. Так же точно обозначим $\tilde{\boldsymbol{x}}$ такой элемент множества A_-^N, что $\tilde{\boldsymbol{x}} \succeq \boldsymbol{x}$ $\forall \boldsymbol{x}\in A_-^N$. Существование $\bar{\boldsymbol{x}}$ (при непустом множестве A_+^N) и $\tilde{\boldsymbol{x}}$ (при непустом множестве A_-^N) следует из полноты и транзитивности отношения $\succeq$. Доказательство этого оставляется в качестве упражнения.

Возможны 4 случая:

- ♦ $A_+^N = \varnothing$. Тогда можно взять $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) = u(\tilde{\boldsymbol{x}}) + 1$.
- ♦ $A_-^N = \varnothing$. Тогда можно взять $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) = u(\bar{\boldsymbol{x}}) - 1$.
- ♦ $A_+^N \cap A_-^N = \varnothing$. Тогда можно взять $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) = (u(\bar{\boldsymbol{x}}) + u(\tilde{\boldsymbol{x}}))/2$.
- ♦ $A_+^N \cap A_-^N \neq \varnothing$. В этом случае берем $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) = u(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x}$ — произвольный элемент множества $A_+^N \cap A_-^N$ (по построению все элементы множества $A_+^N \cap A_-^N$ имеют одну и ту же полезность).

Чтобы закончить алгоритм, положим $A^1 = \{\boldsymbol{x}^1\}$ и $u(\boldsymbol{x}^1) = 0$. Заметим, что при таком построении функции полезности свойство

$$\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$$

выполнено $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A^N$ при любом N. Поэтому построенная таким образом функция $u(.)$ действительно является функцией полезности.

■

Если же множество альтернатив не является счетным, то утверждение в общем случае неверно, что показывает, например, нестрогое отношение предпочтения на основе лексикографического упорядочения потребительских наборов из $\mathbb{R}_+^l$.

Лексикографическое упорядочение называется так, поскольку оно подобно правилу расположения слов в словаре. Для простоты рассмотрим в качестве множества допустимых альтернатив положительный ортант двумерного пространства, т.е. X=$\mathbb{R}_+^2$. Зададим бинарное отношение $\succeq^{\mathrm{L}}$ определяемое по правилу

$$\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X \quad (\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{L}} \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow (\, (x_1 > y_1) \text{ или } (\, x_1 = y_1,\ x_2 \geqslant y_2)\,).$$

Как нетрудно показать, этот бинарное отношение обладает свойствами полноты и транзитивности. Однако, оно не представляется никаким численным индикатором. Докажем последнее.

Предположим противное. Пусть существует некоторая функция полезности (принимающая действительные значения) такая, что

$$\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{L}} \boldsymbol{y} \iff u_{\mathrm{L}}(x_1, x_2) \geqslant u_{\mathrm{L}}(y_1, y_2).$$

Сопоставим каждому действительному числу x_1 некоторое рациональное число $r(x_1)$ такое, что

$$u_{\mathrm{L}}(x_1, 2) > r(x_1) > u_{\mathrm{L}}(x_1, 1).$$

Заметим, что если $x_1 > x_1'$, то по определению лексикографического упорядочения имеем

$$u_{\mathrm{L}}(x_1, 1) > u_{\mathrm{L}}(x_1', 2).$$

Кроме того,

$$u_{\mathrm{L}}(x_1, 2) > r(x_1) > u_{\mathrm{L}}(x_1, 1) \text{ и } u_{\mathrm{L}}(x_1', 2) > r(x_1') > u_{\mathrm{L}}(x_1', 1).$$

В силу этих соотношений имеем

$$r(x_1) > u_{\mathrm{L}}(x_1, 1) > u_{\mathrm{L}}(x_1', 2) > r(x_1')$$

и тем самым из того, что $x_1 > x_1'$ имеем, что $r(x_1) > r(x_1')$. В силу этого $r(.)$ является взаимооднозначной функцией, область определения которой — вещественные числа, а область значения — рациональные (точнее сказать, некоторое подмножества множества рациональных чисел), но это невозможно, так как невозможно построить взаимооднозначное соответствие между счетным и несчетным множествами. Таким образом, мы пришли к противоречию, и, тем самым доказали, что не существует функции полезности, соответствующей лексикографическому упорядочиванию.

Отметим, однако, что все-таки существует ряд случаев, для которых можно гарантировать существование функции полезности в случае несчетного множества альтернатив. Например, функция полезности существует, если предпочтения непрерывны.

Определение 13.

Отношение $\mathfrak{R}$ называется непрерывным, если для любых сходящихся последовательностей $\{\boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{y}_n\}$, таких что $\boldsymbol{x}_n \,\mathfrak{R}\, \boldsymbol{y}_n$, выполнено $\boldsymbol{x} \,\mathfrak{R}\, \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n$ и где $\boldsymbol{y} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{y}_n$.

Несложно показать, что если функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ непрерывна, то нестрогое отношение предпочтения $\succeq$ непрерывно. Дебре доказал и обратное:

Утверждение 11.

Пусть нестрогое отношение предпочтения $\succeq$ полно, транзитивно и непрерывно. Тогда существует представляющая его непрерывная функция полезности.

Доказательство этого результата сложно, поэтому приводим его без доказательства. Ниже мы докажем более слабое утверждение.

Рассмотрим теперь дополнительные качественные свойства, которыми могут обладать предпочтения. Наиболее естественным из них является свойство монотонности, которое гарантирует нам, что полезность индивидуума возрастает при росте количества потребляемых товаров.

Определение 14.
Отношение предпочтения является МОНОТОННЫМ, если из $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$ следует $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Отношение предпочтения является СТРОГО МОНОТОННЫМ, если из $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ следует $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

Утверждение 12.
Пусть нестрогое отношение предпочтения $\succeq$, определенное на $X = \mathbb{R}_+^l$, полно, транзитивно, строго монотонно и непрерывно. Тогда существует представляющая его строго монотонная непрерывная функция полезности.

Доказательство:
В качестве функции полезности можно взять соответствие, которое сопоставляет каждому $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^l$ такое число $u(\boldsymbol{x})$, что
$$\boldsymbol{x} \sim u(\boldsymbol{x})\,\mathbf{1},$$
где $\mathbf{1}$ — l-мерный вектор, состоящий из единиц. Покажем, что такое число $u(\boldsymbol{x})$ всегда существует и единственно.

Для этого мы должны найти для каждого набора $\boldsymbol{x}$ эквивалентный ему набор из множества $U = \{u\mathbf{1} \mid u \in \mathbb{R}_+\}$, которое является лучом, выходящим из начала координат. Сопоставим рассматриваемому набору $\boldsymbol{x}$ множество чисел u, соответствующих не худшим наборам из U
$$U^+(\boldsymbol{x}) = \{u \in \mathbb{R}_+ \mid u\,\mathbf{1} \succeq \boldsymbol{x}\}$$
и множество чисел u, соответствующих не лучшим наборам из U
$$U^-(\boldsymbol{x}) = \{u \in \mathbb{R}_+ \mid \boldsymbol{x} \succeq u\,\mathbf{1}\}.$$
Эти множества не пусты, так как из свойства строгой монотонности следует, что
$$0 \in U^-(\boldsymbol{x}) \quad \text{и} \quad \max\{x_k\} \in U^+(\boldsymbol{x})$$ (максимальный элемент вектора $\boldsymbol{x}$).

Множество $U^+(\boldsymbol{x})$ лежит выше $U^-(\boldsymbol{x})$ поскольку из строгой монотонности следует, что $\forall u_1 \in U^-(\boldsymbol{x})$ и $\forall u_2 \in U^+(\boldsymbol{x})$ выполнено $u_1 \leqslant u_2$.

Обозначим $u^+ = \inf\{U^+(\boldsymbol{x})\}$ и $u^- = \sup\{U^-(\boldsymbol{x})\}$. Эти величины конечны, так как множества $U^-(\boldsymbol{x})$ и $U^+(\boldsymbol{x})$ ограничены сверху и снизу соответственно. По непрерывности предпочтений $u^+ \in U^+(\boldsymbol{x})$ и $u^- \in U^-(\boldsymbol{x})$. При этом $u^+ \geqslant u^-$. Покажем, что $u^+ = u^-$. Пусть это не так. Тогда существует число u' такое, что $u^- < u' < u^+$, так что $u' \notin U^-(\boldsymbol{x})$ и $u' \notin U^+(\boldsymbol{x})$. Это противоречит полноте предпочтений, так как либо $u'\,\mathbf{1} \succeq \boldsymbol{x}$, либо $u'\,\mathbf{1} \preceq \boldsymbol{x}$.

Полученная точка $u = u^+ = u^-$ удовлетворяет требуемому условию $\boldsymbol{x} \sim u\,\mathbf{1}$ и единственна.

Заданная таким образом функция $u(\boldsymbol{x})$ является функцией полезности. Пусть $\boldsymbol{x}_1 \succeq \boldsymbol{x}_2$. По построению $\boldsymbol{x}_1 \sim u(\boldsymbol{x}_1)\,\mathbf{1}$ и $\boldsymbol{x}_2 \sim u(\boldsymbol{x}_2)\,\mathbf{1}$. Значит, $\boldsymbol{x}_1 \succeq \boldsymbol{x}_2$ тогда и только тогда, когда $u(\boldsymbol{x}_1)\,\mathbf{1} \succeq u(\boldsymbol{x}_2)\,\mathbf{1}$. Но из строгой монотонности $u(\boldsymbol{x}_1)\,\mathbf{1} \succeq u(\boldsymbol{x}_2)\mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $u(\boldsymbol{x}_1) \geqslant u(\boldsymbol{x}_2)$.

Функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ является строго монотонной. Пусть $\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$. Тогда из строгой монотонности предпочтений $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2$. Отсюда следует, что $u(\boldsymbol{x}_1)\,\mathbf{1} \succ u(\boldsymbol{x}_2)\mathbf{1}$. Поэтому $u(\boldsymbol{x}_1) > u(\boldsymbol{x}_2)$.

Докажем теперь непрерывность функции полезности $u(\boldsymbol{x})$. Для доказательства непрерывности функции полезности рассмотрим последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$. Нам надо показать, что $\lim_{n\to\infty} u(\boldsymbol{x}_n) = u(\boldsymbol{x})$. Зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$. Заметим, что можно выбрать $\underline{u}$ и $\bar{u}$ такие, что для любого вектора $\boldsymbol{y}$ из ε-окрестности точки $\boldsymbol{x}$ (т.е. $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \leqslant \varepsilon$) выполнено

$$\underline{u}\,\mathbf{1} \ll \boldsymbol{y} \ll \bar{u}\,\mathbf{1}.$$

Например, можно взять $\underline{u} = \min_{\mathrm{k}}\{x_{\mathrm{k}}\} - 2\varepsilon$ и $\bar{u} = \max_{\mathrm{k}}\{x_{\mathrm{k}}\} + 2\varepsilon$. Как нетрудно заметить, по строгой монотонности мы имеем $\underline{u} < u(\boldsymbol{y}) < \bar{u}$. Для любой сходящейся подпоследовательности из $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдется достаточно большое число N, такое что при $n > N$ имеем $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \leqslant \varepsilon$, т.е. последовательность начиная с номера $N+1$ попадает в ε-окрестность точки $\boldsymbol{x}$. Тогда, как мы показали выше, $u(\boldsymbol{x}_n)$ попадает в интервал $[\underline{u}, \bar{u}]$.

Покажем теперь, что любая сходящаяся подпоследовательность из последовательности $\{u(\boldsymbol{x}_n)\}_{n=N+1}^{\infty}$ сходится к одному и тому же числу $u(\boldsymbol{x})$. (Отметим, что так как бесконечная последовательность $\{u(\boldsymbol{x}_n)\}_{n=N+1}^{\infty}$ задана на компакте $[\underline{u}, \bar{u}]$, то она должна иметь точки сгущения. Мы хотим показать что существует всего одна точка сгущения и это $u(\boldsymbol{x})$.)

Рассмотрим теперь некоторую сходящуюся подпоследовательность $\{u(\boldsymbol{x}_{n_k})\}_{\mathrm{k}=1}^{\infty}$ из $\{u(\boldsymbol{x}_n)\}_{n=N+1}^{\infty}$. Пусть эта последовательность сходится к $\tilde{u}$ и при этом $\tilde{u} \neq u(\boldsymbol{x})$. Предположим что $\tilde{u} > u(\boldsymbol{x})$. Возьмем некоторое число $\hat{u}$, такое что $\tilde{u} > \hat{u} > u(\boldsymbol{x})$. По свойству строгой монотонности имеем, что $\hat{u}\,\mathbf{1} \succ u(\boldsymbol{x})\,\mathbf{1}$. Поскольку $\{u(\boldsymbol{x}_{n_k})\}_{\mathrm{k}=1}^{\infty}$ сходится к $\tilde{u}$, то существует M такое, что при $k > M$ выполнено $u(\boldsymbol{x}_{n_k}) > \hat{u}$. По определению функции полезности $\boldsymbol{x}_{n_k} \sim u(\boldsymbol{x}_{n_k})\mathbf{1}$ и, кроме того, по строгой монотонности $u(\boldsymbol{x}_{n_k})\mathbf{1} \succ \hat{u}\mathbf{1}$ ($\forall\ k > M$), т.е. $\boldsymbol{x}_{n_k} \sim u(\boldsymbol{x}_{n_k})\,\mathbf{1} \succ \hat{u}\,\mathbf{1}$. Так как предпочтения непрерывны, то $\boldsymbol{x} \succeq \hat{u}\,\mathbf{1}$, но $\boldsymbol{x} \sim u(\boldsymbol{x})\mathbf{1}$, поэтому $u(\boldsymbol{x})\,\mathbf{1} \succeq \hat{u}\,\mathbf{1}$. Однако выше было показано, что $\hat{u}\,\mathbf{1} \succ u(\boldsymbol{x})\,\mathbf{1}$. Получили противоречие и тем самым доказали непрерывность построенной функции полезности.

■

Ряд нижеприведенных свойств отношений предпочтений и представляющих их функций полезности используются при характеристике важных частных случаев моделей рационального поведения.

Вместо свойства строгой монотонности часто можно использовать более слабое свойство локальной ненасыщаемости. Локальной ненасыщаемости обычно оказывается достаточно для доказательства тех свойств выбора, которые следуют из строгой монотонности предпочтений.

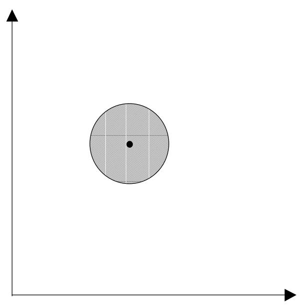
Определение 15.

Предпочтения называются локально ненасыщаемыми, если для любого допустимого набора $\boldsymbol{x}$ в любой его окрестности найдется другой допустимый набор $\hat{\boldsymbol{x}}$, такой что $\boldsymbol{x} \prec \hat{\boldsymbol{x}}$.

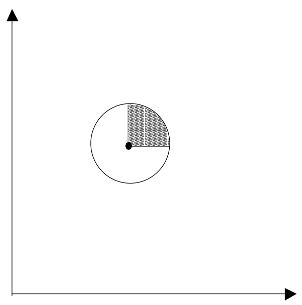
(Под ε-окрестностью точки $\boldsymbol{x}^*$ можно понимать множество таких точек $\boldsymbol{x}$, что $\sqrt{\sum (x_i - x_i^*)^2} \leqslant \varepsilon$, т. е. сфера радиуса ε с центром в точке $\boldsymbol{x}^*$).

На рисунке заштрихованы области, в которых могут быть лучшие наборы при локальной ненасыщаемости и при строгой монотонности предпочтений.

Довольно простое поведение потребителя (линейность кривых Энгеля) получаем в ситуации так называемых гомотетичных предпочтений.



Для локальной ненасыщаемости



Для строгой монотонности

Рисунок 1

Определение 16.

Отношение предпочтения называется гомотетичным , если

(1) для каждого положительного t $t\boldsymbol{x} \in X$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} \in X$.

(2) для каждого положительного t соотношение

$$t\boldsymbol{x} \succ t\boldsymbol{y}$$

выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}.$$

Отметим, для гомотетичных предпочтений существует однородная функция полезности, представляющая такие предпочтения. Такая характеристика предпочтений позволяет получать сильные результаты, касающиеся поведения потребителей и состояний равновесия, и активно эксплуатируется в теории международной торговли и в макроэкономике при анализе агрегированного спроса.

Следующее свойство, характеризующее «регулярный» случай, рассматриваемый в экономической теории, важно для демонстрации «хороших» свойств функции выбора и доказательства существования равновесия.

Здесь и далее мы будем предполагать, что множество X выпукло.

Определение 17.

Предпочтения являются **выпуклыми**, если $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$: $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ выполнено $\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\,\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{y}$.

Предпочтения являются **строго выпуклыми**, если $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$: $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ и $0 < \alpha < 1$ выполнено $\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\,\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{y}$.

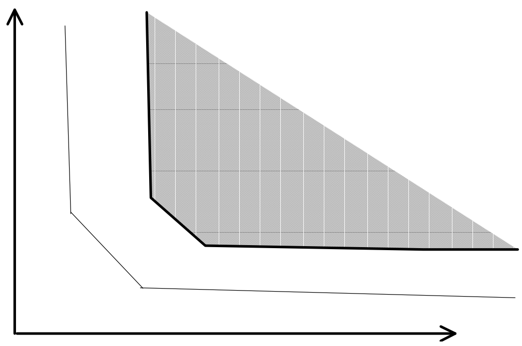


Рисунок 2. Пример выпуклых, но не строго выпуклых предпочтений

Напомним, что функция $u\,(.)$ — вогнута, если

$$u\,(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant \alpha u\,(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)\,u\,(\boldsymbol{y})\ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Известно, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $u\,(.)$ вогнута тогда и только тогда, когда ее матрица вторых производных (матрица Гессе) $\boldsymbol{H}$ отрицательно полуопределена, т.е. $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{z} \leqslant 0\ \forall \boldsymbol{z}$.

Утверждение 13.

Если функция полезности вогнута, то представляемые ею предпочтения выпуклы.

<u>Доказательство</u>:

По определению вогнутости $u\,(.)$ имеем, что $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$

$$u\,(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant \alpha u\,(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)\,u\,(\boldsymbol{y})\ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

Без потери общности считаем, что $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Тогда $u\,(\boldsymbol{x}) \geqslant u\,(\boldsymbol{y})$, откуда

$$u\,(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant u\,(\boldsymbol{y}).$$

Воспользовавшись определением функции полезности получим, что

$$\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{y}\ \ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

■

Обратное не всегда верно. Выпуклость предпочтений эквивалентна квазивогнутости функции полезности.

Напомним, что функция $u\,(.)$ — квазивогнута, если

$$u(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant \min(u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{y}))\ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Известно, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(.)$ квазивогнута тогда и только тогда, когда ее матрица вторых производных $\boldsymbol{H}$ отрицательно полуопределена на гиперплоскости $\nabla u(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{z} = 0$, т.е.

$$\boldsymbol{z}'\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{z} \leqslant 0 \text{ для каждого } \boldsymbol{z}, \text{ такого что } \nabla u(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{z} = 0.$$

Утверждение 14.

Функция полезности квазивогнута тогда и только тогда, когда представляемые ею предпочтения выпуклы.

Доказательство:

Покажем, что из квазивогнутости функции полезности следует выпуклость представляемых ею предпочтений.

По определению квазивогнутости $u(.)$ имеем, что $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$

$$u(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant \min(u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{y}))\ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Без потери общности считаем, что $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Тогда $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$, откуда

$$u(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant u(\boldsymbol{y}).$$

Воспользовавшись определением функции полезности получим, что

$$\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{y}\ \ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Теперь покажем обратное. Считаем, что $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Тогда по определению выпуклости предпочтений

$$\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{y}\ \ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

По определению функции полезности

$$u(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant u(\boldsymbol{y}) = \min(u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{y}))\ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

■

Помимо вогнутости функции, нам в дальнейшем понадобится понятие строгой вогнутости и строгой квазивогнутости. Функция $u(.)$ — строго вогнута, если

$$u(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) > \alpha u(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)\,u(\boldsymbol{y})\ \forall\ 0 < \alpha < 1.$$

Функция $u(.)$ — строго квазивогнута, если

$$u(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) > \min(u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{y}))\ \forall\ 0 < \alpha < 1.$$

Основная цель данного параграфа состояла в том, чтобы показать, какие свойства предпочтений гарантируют существования функции полезности и указать на связи между характеристиками предпочтений и соответствующими им свойствами представляющих их функций полезности. Но, кроме этого мы косвенно показали, что функция полезности, представляющая заданные предпочтения, не единственна.

При моделировании предпочтений потребителя часто рассматриваются два подхода: ординалистский и кардиналистский. Ординалистский подход предполагает, что все функции $u(.)$, которые удовлетворяют свойству $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ эквивалентны при описании поведения потребителя. Кардиналистский же подход предполагает, что среди этого семейства функций существует подмножество особых функций, обладающих более «глубокими» свойствами, в том смысле, что с их помощью можно измерить «истинную» полезность, которую получает индивидуум от каждого из наборов благ. Эти функции позволяют сравнивать потребительские наборы количественно, чего нельзя сделать при ординалистском подходе, так как разница величина полезности в последнем случае не имеет содержательной интерпретации.

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Если множество альтернатив конечно, то для существования функции полезности достаточно чтобы
- ♦ предпочтения удовлетворяли аксиоме Хаутеккера
- ♦ предпочтения были полны и транзитивны
- ♦ предпочтения были лексикографически упорядочены

2. Лексикографический порядок не может быть представлен функцией полезности потому что
- ♦ он не является непрерывным
- ♦ он является полным
- ♦ он удовлетворяет свойству монотонности

3. Свойства функции полезности, которые сохраняются при строго возрастающем преобразовании, называются
- ♦ ординальными
- ♦ кардинальными
- ♦ не обозначаются специальным термином

4. Свойство локальной ненасыщаемости следует из свойства
- ♦ монотонности
- ♦ полноты и выпуклости предпочтений
- ♦ строгой монотонности

5. Пусть предпочтения являются полными, транзитивными и непрерывными, тогда
- ♦ эти предпочтения гомотетичны
- ♦ функция полезности существует, непрерывна и субаддитивна
- ♦ существует представляющая их непрерывная функция полезности

6. Какое из преобразований функции полезности всегда не меняет ее ординалистского характера
- ♦ неубывающее
- ♦ возрастающее
- ♦ квазивогнутое

7. Предпочтения, задаваемые положительно однородной функцией полезности
- ♦ выпуклы и гомотетичны
- ♦ строго монотонны и гомотетичны
- ♦ гомотетичны

8. Если предпочтения представимы функцией полезности, то они
- ♦ полны и транзитивны
- ♦ полны, транзитивны и выпуклы
- ♦ полны, транзитивны и непрерывны

9. Какое из нижеприведенных утверждений верно
- ♦ Если отношение предпочтения монотонно, то оно строго монотонно
- ♦ Если отношение предпочтения строго монотонно, то оно локально ненасыщаемо
- ♦ Если отношение предпочтения монотонно, то оно локально ненасыщаемо

10. Лексикографическое отношение предпочтения
- ♦ представимо дискретной, но не непрерывной функцией полезности
- ♦ обладает свойством непрерывности
- ♦ не представимо функцией полезности

11. Отношение предпочтения представимо функцией полезности, если оно
- ♦ полно, транзитивно, непрерывно
- ♦ ациклично, рефлексивно, полно
- ♦ полно, непрерывно, рефлексивно

12. Отношение предпочтения представимо функцией полезности, если
- ♦ множество альтернатив счетно, отношение предпочтения полно и транзитивно
- ♦ множество альтернатив счетно, отношение предпочтения полно и ациклично
- ♦ множество альтернатив конечно, отношение предпочтения транзитивно

13. Непрерывное, полное, транзитивное и строго монотонное отношение предпочтения гомотетично тогда и только тогда, когда
- ♦ оно представимо квазилинейной функцией полезности
- ♦ оно представимо функцией полезности однородной нулевой степени
- ♦ оно представимо функцией полезности однородной первой степени

14. Если функция полезности потребителя строго вогнута, то
- ♦ выполняется закон убывания предельной полезности
- ♦ она представляет локально ненасыщаемые предпочтения
- ♦ предельные полезности органичены сверху

15. Постройте функцию полезности для полного и транзитивного отношения предпочтения, заданного на конечном множестве альтернатив.

16. Покажите, что
(1) лексикографическое отношение предпочтения на множестве неотрицательных n-мерных векторов задает антисимметричное и отрицательно транзитивное отношение предпочтения,
(2) не существует представляющей его непрерывной функции полезности.

17. Говорят, что функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ гомотетична, если она имеет вид:

$$u(\boldsymbol{x}) = g(v(\boldsymbol{x})),$$

где — $g(\boldsymbol{y})$ (строго) возрастающая, а $v(\boldsymbol{x})$ — однородная первой степени функция.

(а) Покажите, что (выпуклые, локально ненасыщаемые) предпочтения гомотетичны тогда и только тогда, когда существует представляющая их гомотетичная функция полезности.

(б) Покажите, что (выпуклые, локально ненасыщаемые) предпочтения гомотетичны тогда и только тогда, когда существует представляющая их функция полезности, являющаяся положительно однородной первой степени.

18. Покажите, что из строгой монотонности предпочтений следует их локальная ненасыщаемость.

19. Покажите, что если функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ непрерывна, то нестрогое отношение предпочтения $\succeq$ непрерывно.

20. Покажите, что функция полезности монотонна тогда и только тогда, когда представляемые ею отношения монотонны.

21. Пусть X состоит из n-мерных векторов (с неотрицательными компонентами), а отношение задано следующим образом: $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$, если все компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ (строго) больше соответствующих компонент вектора $\boldsymbol{y}$. Существует ли функция полезности, представляющая это предпочтение?

22. Покажите, что отношение предпочтения, задаваемые положительно однородной (первой степени) функцией полезности, гомотетично.

23. Приведите пример выпуклых локально ненасыщаемых предпочтений, которые не обладают свойством монотонности.

24. Приведите пример выпуклых, монотонных предпочтений, которые не являются локально ненасыщаемыми.

25. Покажите, что строго выпуклые монотонные предпочтения локально ненасыщаемы.

26. Покажите, что если функция полезности строго вогнута, то представляемые ею предпочтения строго выпуклы.

27. Функция полезности строго квазивогнута тогда и только тогда, когда представляемые ею предпочтения строго выпуклы.

1.4. Задача потребителя. Характеристики потребительского выбора

Говоря нестрого, потребитель всегда выбирает из множества доступных ему альтернатив наилучшую (одну из наилучших). Доступные альтернативы в теории потребления — это доступные потребительские наборы, т.е. наборы, удовлетворяющие двум типам ограничений. Во-первых, это все "физические" ограничения на выбор потребителя (он не может работать более 24 часов в сутки, потреблять какое-то благо в отрицательных количествах и т.д.); все потребительские наборы, удовлетворяющие этим ограничениям, т.е. наборы, которые доступны потребителю без учета всевозможных институциональных ограничений, будем называть множеством допустимых альтернатив (потребительских наборов) и обозначать его через X. В дальнейшем, если не оговорено особо, в качестве X рассматривается множество $\mathbb{R}^l_+$.

Во-вторых, это всевозможные типы институциональных ограничений. Наиболее простой тип ограничений этого типа — это так называемое **бюджетное ограничение** вальрасовского типа — требование ограничить стоимость потребительской корзины фиксированной суммой денег (бюджетом). Множество потребительских наборов, удовлетворяющих этому ограничению, называют **бюджетным множеством**. Таким образом, если $\boldsymbol{p}$ — вектор цен рассматриваемых благ, а R — доход потребителя, то его бюджетное множество имеет следующий вид:

$$\mathrm{B}(\boldsymbol{p}, R) = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \boldsymbol{px} \leqslant R\}.$$

Таким образом, если потребитель сталкивается лишь с бюджетным ограничением, то его выбор — наилучший потребительский набор из бюджетного множества $\mathrm{B}(\boldsymbol{p}, R)$. По введенному ранее определению бюджетное множество $\mathrm{B}(\boldsymbol{p}, R)$ представляет собой частный случай *ситуации выбора*.

С учетом вышесказанного, в случае, когда предпочтения задаются функцией полезности, выбор рационального потребителя должен быть решением следующей задачи математического программирования (задачи максимизации полезности):

<u>Задача 1</u> (**Задача потребителя**)

$u(\boldsymbol{x}) \to \max$

$\boldsymbol{px} \leqslant R$, (1-1)

$\boldsymbol{x} \geqslant 0.$ (1-2)

Соотношение (1-2) выделяет множество допустимых альтернатив, а соотношение (1-1), — бюджетное ограничение, — выделяет, совместно с (1-2), бюджетное множество потребителя.

При положительных ценах, неотрицательном доходе и непрерывных предпочтениях (функции полезности) решение задачи существует, что легко показать, используя соответствующую теорему Вейерштрасса. Соответствие между бюджетным множеством В($\boldsymbol{p}$, R) и множеством решений задачи потребителя представляет собой то, что выше называлось *правилом выбора*. Строгая выпуклость предпочтений гарантирует единственность решения; в этом случае правило выбора есть функция спроса.

Определение 18. Пусть решение Задачи 1 существует и единственно для всех значений параметров — положительных ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R. Тогда определена следующая функция, которая ставит в соответствие каждому набору цен и доходов решение задачи при этих параметрах — вектор $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Будем называть ее функцией спроса Маршалла. Если решение задачи при некоторых значениях параметров не единственно, то говорят об отображении спроса Маршалла.

В дальнейшем будем предполагать, если не оговорено противное, что

♦ маршаллианский спрос является функцией и определен для всех положительных цен и доходов;

♦ решение внутреннее: $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \overline{R}) \gg 0$;

♦ предпочтения локально ненасыщаемы (поэтому решение лежит на границе бюджетного множества, т.е. выполняется закон Вальраса).

Утверждение 15 (свойства маршаллианского спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$) .

1. Отображение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ однородно нулевой степени, т. е.

$$\boldsymbol{x}(\lambda\boldsymbol{p}, \lambda R) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R).$$

(Если цены и доходы изменятся в одно и то же число раз, то спрос не изменится.)

2. Если предпочтения потребителя выпуклы, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ — выпуклое множество.

3. Если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ удовлетворяет закону Вальраса, т.е. если $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, то $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} = R$. (Бюджетное ограничение выполняется как равенство.)

4. Если предпочтения потребителя строго выпуклы, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ — функция.

5. Если предпочтения потребителя непрерывны и строго выпуклы, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ — непрерывная функция.

Доказательство:

(1) Для доказательства однородности спроса по ценам и доходу отметим, что множество, на котором потребитель ищет лучший набор не меняется при одновременном умножении цен и доходов на некоторую положительную величину $\lambda > 0$, т.е. $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid (\lambda\boldsymbol{p})\boldsymbol{x} \leqslant (\lambda R)\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{x} \leqslant R\}$

(2) Пусть предпочтения индивидуума выпуклы, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ не пусто и $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ — два элемента из множества $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, т.е. $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Рассмотрим потребительский набор $\tilde{\boldsymbol{x}} = \alpha\, \boldsymbol{x}' + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{x}''$ ($0<\alpha<1$). Так как $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, то по определению функции полезности $\boldsymbol{x}' \sim \boldsymbol{x}''$. По определению выпуклости предпочтений $\tilde{\boldsymbol{x}} \succeq \boldsymbol{x}' \sim \boldsymbol{x}''$. Кроме того набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ является допустимым в задаче потребителя. В силу этого $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$. Тем самым получили выпуклость множества $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$.

(3) Пусть $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — решение задачи потребителя, и закон Вальраса не выполнен, т.е. $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} < R$. Тогда по свойству локальной ненасыщаемости в любой окрестности точки $\tilde{\boldsymbol{x}}$ должен существовать набор $\hat{\boldsymbol{x}}$, такой, что $\hat{\boldsymbol{x}} \succ \tilde{\boldsymbol{x}}$. Если выбрать достаточно малую окрестность, то $\hat{\boldsymbol{x}}$ будет удовлетворять бюджетному ограничению ($\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}} \leqslant R$), что противоречит оптимальности набора $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

(4) Пусть предпочтения индивидуума строго выпуклы и $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ — два различных элемента из множества $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, т.е. $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Рассмотрим потребительский набор $\tilde{\boldsymbol{x}} = \alpha\boldsymbol{x}' + (1-\alpha)\boldsymbol{x}''$ $(0<\alpha<1)$. Так как $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, то $\boldsymbol{x}' \sim \boldsymbol{x}''$. По определению строгой выпуклости предпочтений имеем, что $\tilde{\boldsymbol{x}} \succ \boldsymbol{x}' \sim \boldsymbol{x}''$. Кроме того набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ допустим в задаче потребителя. В силу этих свойств получаем, что набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ допустим и, лучше наборов $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$, а это противоречит их оптимальности. Поэтому решение единственно, то есть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ — (однозначная) функция. (Отметим еще раз, что существование следует из непрерывности функции полезности).

(5) Докажем непрерывность функции спроса. Рассмотрим последовательность $\{\boldsymbol{p}_n, R_n\}_{n=1}^{\infty} \to \{\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R}\}$, где $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R}) \gg \mathbb{0}$, и последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ решений задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}_n$ и доходах R_n (т.е. $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_n, R_n)$), такую что $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \to \bar{\boldsymbol{x}}$.

Поскольку $\boldsymbol{p}_n \boldsymbol{x}_n \leqslant R_n$, то переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{x}} \leqslant \bar{R}$.

Нам нужно показать, что $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R})$, т.е. $\bar{\boldsymbol{x}}$ является оптимальным выбором потребителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе $\bar{R}$. Предположим, что это не так, и существует такой набор $\hat{\boldsymbol{x}}$, что

$$u(\hat{\boldsymbol{x}}) > u(\bar{\boldsymbol{x}}) \text{ и } \bar{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{x}} \leqslant \bar{R}.$$

Так как доход положителен, то существует потребительский набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ такой, что $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) > u(\bar{\boldsymbol{x}})$ и $\bar{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{x}} < \bar{R}$. (Если $\hat{\boldsymbol{x}} \geqslant 0$ и $\hat{\boldsymbol{x}} \neq 0$, то можно подобрать $\boldsymbol{\varepsilon} \geqslant\neq 0$, так что $\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^l_+$. По непрерывности функции полезности найдется достаточно малая величина ε, такая что $u(\hat{\boldsymbol{x}} - \varepsilon) > u(\bar{\boldsymbol{x}})$. Тем самым мы нашли $\tilde{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}} - \varepsilon$, такой что $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) > u(\bar{\boldsymbol{x}})$ и $\bar{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{x}} < \bar{R}$. Если же $\hat{\boldsymbol{x}} = 0$, то аналогичным образом найдется $\boldsymbol{\varepsilon} \geqslant\neq 0$, такое что $\tilde{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}} + \varepsilon$, дальнейшие рассуждения для этого случая совершенно аналогичны.)

Далее, найдется достаточно большое N такое, что при $n>N$ выполнено $\boldsymbol{p}_n\tilde{\boldsymbol{x}} < R_n$. Пусть это не так, т.е. существует такая возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел n_k, что $\boldsymbol{p}_{n_k}\tilde{\boldsymbol{x}} \geqslant R_{n_k}$ $\forall k$. Тогда, перейдя к пределу, мы получили бы $\bar{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geqslant \bar{R}$, что противоречит выбору $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Для каждого n, такого что $\boldsymbol{p}_n\tilde{\boldsymbol{x}} < R_n$ в силу оптимальности $\boldsymbol{x}_n$ мы должны иметь $u(\boldsymbol{x}_n) > u(\tilde{\boldsymbol{x}})$. Так как функция полезности непрерывна, то, переходя к пределу, получаем $u(\bar{\boldsymbol{x}}) \geqslant u(\tilde{\boldsymbol{x}})$. Тем самым мы пришли к противоречию. Это означает, что набор $\bar{\boldsymbol{x}}$ оптимален при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе $\bar{R}$, т.е. $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R})$. Таким образом, доказана непрерывность функции спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ по ценам и доходу.

Замечание. В общем случае можно показать, что отображение спроса имеет замкнутый график, используя, с незначительными изменениями предложенную схему доказательства.

■

Одним из ключевых понятий теории потребителя является понятие непрямой функции полезности. Ниже мы даем его определения и основные свойства.

Определение 19. Непрямая функция полезности $v(\boldsymbol{p}, R) = u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R))$ есть значение целевой функции Задачи 1 при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R в точке оптимума.

Утверждение 16 (свойства непрямой функции полезности $v(\boldsymbol{p}, R)$)

Пусть предпочтения потребителя представляются непрерывной функцией полезности $u(\boldsymbol{x})$. Тогда

1) $v(\boldsymbol{p}, R)$ однородна нулевой степени: $v(\lambda \boldsymbol{p}, \lambda R) = v(\boldsymbol{p}, R)$.

2) $v(.)$ не убывает по доходу ($v(\boldsymbol{p}, R') \geqslant v(\boldsymbol{p}, R)$ при $R'>R$), причем строго возрастает по доходу, если предпочтения локально ненасыщаемы ($v(\boldsymbol{p}, R') > v(\boldsymbol{p}, R)$ при $R'>R$).

3) $v(.)$ не возрастает по ценам ($v(\boldsymbol{p}, R) \leqslant v(\boldsymbol{p}', R)$ при $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{p}'$).

4) Функция $v(\boldsymbol{p}, R)$ непрерывна на множестве строго положительных цен и неотрицательных доходов, т. е. при $(\boldsymbol{p}, R) \in \mathbb{R}^l_{++}\times\mathbb{R}_+$.

5) Функция $v(\boldsymbol{p}, R)$ квазивыпукла.

Доказательство:

(1) Однородность нулевой степени следует из определения непрямой функции полезности и однородности нулевой степени функции спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ (см. Утверждение 15).

(2) Покажем, что $v(\boldsymbol{p}, R)$ не убывает по R. Рассмотрим непрямую функцию полезности при двух разных уровнях дохода R' и R, таких что $R'>R$. Поскольку при $R'>R$ бюджетное множество $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid \boldsymbol{px} \leqslant R'\}$ содержит бюджетное множество $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid \boldsymbol{px} \leqslant R\}$, а непрямая функция полезности по определению есть максимум функции полезности на бюджетном множестве, то $v(\boldsymbol{p}, R') \geqslant v(\boldsymbol{p}, R)$.

Предположим, что предпочтения локально ненасыщаемы. Если бы при $R'>R$ мы имели $v(\boldsymbol{p}, R') = v(\boldsymbol{p}, R)$, то наборы из $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ принадлежали бы $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R')$, но для них не выполнялся бы закон Вальраса. Значит, должно выполняться строгое неравенство $v(\boldsymbol{p}, R') > v(\boldsymbol{p}, R)$, т.е. при локальной ненасыщаемости непрямая функция полезности возрастает по доходу.

(3) Доказательство невозрастания непрямой функции полезности $v(\boldsymbol{p}, R)$ по ценам $\boldsymbol{p}$ можно провести по той же схеме. Заметим, что при локальной ненасыщаемости предпочтений, если $\boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{p}'$, то $v(\boldsymbol{p}, R) < v(\boldsymbol{p}', R)$.

(4) Непрерывность следует из определения непрямой функции полезности и непрерывности функции $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, которую мы доказали в Утверждении 15 в предположении строгой выпуклости предпочтений. Доказательство в общем случае оставляем читателю.

(5) Мы хотим показать, что

$$v(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2, \alpha R_1 + (1-\alpha)R_2) \leqslant \max\,\{v(\boldsymbol{p}_1, R_1), v(\boldsymbol{p}_2, R_2)\}.$$

Пусть $\boldsymbol{x}$ — решение Задачи 1 при ценах $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2$ и доходе $R = \alpha R_1 + (1-\alpha)R_2$, Сначала докажем, что $\boldsymbol{x}$ — допустимое решение Задачи 1 при ценах $\boldsymbol{p}_1$ и доходе R_1, либо при ценах $\boldsymbol{p}_2$ и доходе R_2.

Пусть $\boldsymbol{x}$ не является допустимым решением Задачи 1 ни при цене $\boldsymbol{p}_1$ и доходе R_1, ни при цене $\boldsymbol{p}_2$ и доходе R_2. Тогда $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x} > R_1$ и $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x} > R_2$.

Отсюда следует, что $\alpha\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\mathrm{p}_2\boldsymbol{x} > \alpha R_1 + (1-\alpha)R_2$, что противоречит тому, что $\boldsymbol{x}$ — допустимое решение при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R. Таким образом, либо $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x} \leqslant R_1$, либо $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x} \leqslant R_2$.

Предположим, например, что $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x} \leqslant R_1$.

Из того, что $\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1)$ есть по определению значение целевой функции на оптимальном решении Задачи 1 при ценах $\boldsymbol{p}_1$ и доходах R_1, следует, что $\nu(\boldsymbol{p}_1,R_1) \geqslant u(\boldsymbol{x})$, так как $\boldsymbol{x}$ — допустимое решение этой задачи. Тем более должно выполняться и требуемое соотношение

$u(\boldsymbol{x}) = \nu(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2, \alpha R_1 + (1-\alpha)R_2) \leqslant \max\{\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1), \nu(\boldsymbol{p}_2, R_2)\}$.

■

Если дополнительно предположить, что u является дифференцируемой функцией, то для характеристики решений Задачи 1 можно применить теорему Куна-Таккера:

Пусть $\bar{\boldsymbol{x}}$ — решение Задачи 1. При $R>0$ условие Слейтера выполнено. Из теоремы Куна-Таккера следует, что найдется множитель Лагранжа $\lambda \geqslant 0$, такой, что функция Лагранжа $L(\boldsymbol{x}, \lambda) = u(\boldsymbol{x}) + \lambda(R - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x})$ Задачи 1 имеет в точке $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})$ производную по $\boldsymbol{x}_i$, не превышающую ноль. Другими словами, мы имеем необходимое условие оптимальности:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda}) \leqslant \bar{\lambda}\, p_i.$$

В случае же внутреннего решения ($\bar{\boldsymbol{x}}\gg 0$) это условие принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}\, p_i.$$

Можно показать, что двойственная оценка бюджетного ограничения Задачи 1 $\bar{\lambda}$ представляет собой (в случае внутреннего решения) производную непрямой функции полезности по доходу, т.е. $\bar{\lambda} = \dfrac{\partial \nu}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R)$.

<u>Замечание.</u> Квазивыпуклость по доходу дифференцируемой непрямой функции полезности и ее строгая монотонность по доходу (которая следует из локальной ненасышаемости предпочтений) гарантируют положительность двойственной оценки ограничения всюду, за исключением не более чем счетного множества точек ее области определения. Таким образом, даже выпуклость предпочтений и их локальная ненасышаемость не гарантируют, вообще говоря, положительность оценки ограничений (положительность предельной полезности дохода при некоторых его уровнях). В ситуации же, когда существует вогнутая функция полезности, представляющая локально ненасыщаемые предпочтения, при любом уровне дохода его предельная полезность всегда положительна.

В большей части следующего ниже материала, который составляет ядро неоклассической теории поведения потребителей, мы, не вполне последовательны и уклоняемся от программы построения теории на основе только свойств предпочтений, часто считая некоторые свойства функций полезности заданными априорно, а не выводя их из характеристик лежащих в их основе предпочтений.

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Если функция полезности однородна первой степени, то при увеличении дохода в 2 раза полезность индивидуума
♦ возрастет меньше чем в 2 раза
♦ возрастет в 2 раза
♦ упадет меньше чем в 2 раза

2. Если функция полезности однородна степени k, то при увеличении дохода в m раз полезность индивидуума
♦ возрастет в mk раз
♦ возрастет в m^k раз
♦ возрастет в m раз

3. Оптимальный выбор потребителя всегда лежит на бюджетной линии
если предпочтения
♦ локально ненасыщаемы
♦ выпуклы
♦ вогнуты

4. Задача потребителя всегда имеет решение, если
♦ цены и доход строго положительны, а функция полезности монотонна
♦ цены строго положительны и функция полезности непрерывна
♦ функция полезности непрерывна

5. Задача потребителя имеет единственное решение, если
♦ функция полезности вогнута и квазилинейна
♦ функция полезности квазивогнута
♦ функция полезности строго вогнута

6. Если функция полезности потребителя строго вогнута, то
♦ решение задачи потребителя единственно
♦ все товары потребляются в положительных количествах
♦ предельная полезность денег равна 0

7. Если предпочтения выпуклы и решение задачи максимизации полезности неединственное, то множество оптимальных решений
♦ может состять из конечного числа точек

- ♦ не всегда замкнуто
- ♦ всегда выпукло

8. Спрос потребителя удовлетворяет закону спроса всегда
- ♦ для нормальных благ
- ♦ для малоценных благ
- ♦ для товаров Гиффена

9. Пусть функция полезности локально ненасыщаема и непрерывна. Какие из нижеприведенных свойств функции спроса выполняются при этих предположениях.
1) спрос однороден нулевой степени по ценам и доходу
2) выполняется закон Вальраса
3) решение задачи единственное
4) решение внутреннее
- ♦ 1, 2
- ♦ 1, 2, 3
- ♦ 2, 3

10. Пусть функция полезности порождена локально ненасыщаемыми, непрерывными предпочтениями. Какие из нижеприведенных свойств характеризуют непрямую функцию полезности.
1) однородность нулевой степени по ценам
2) невозрастание по ценам
3) непрерывность по ценам и доходам
- ♦ 2, 3
- ♦ 1, 2
- ♦ 1, 3

11. Непрямая функция полезности
- ♦ квазивогнута по ценам и доходу
- ♦ выпукла по ценам и доходу
- ♦ квазивыпукла по ценам и доходу

12. Если функция полезности однородна первой степени, то ...
- ♦ непрямая функция полезности имеет вид $a(\boldsymbol{p})R$
- ♦ непрямая функция полезности имеет вид $a(\boldsymbol{p}) + R$
- ♦ непрямая функция полезности имеет вид $a(\boldsymbol{p})R + b(\boldsymbol{p})$, $b(\boldsymbol{p})>0$

13. Если функция полезности квазилинейна, то при достаточно большом доходе непрямая функция полезности имеет вид:
- ♦ $a(\boldsymbol{p})R$
- ♦ $a(\boldsymbol{p})R + b(\boldsymbol{p})$
- ♦ $a(\boldsymbol{p}R) + b(\boldsymbol{p})R$

14. Если функция полезности потребителя квазилинейна, то непрямая функция полезности
- ♦ квазивыпукла
- ♦ линейна
- ♦ имеет вид Гормана

15. Какие из нижеприведенных формул верны?
- ♦ $D_R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{p} + D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)R = 0$
- ♦ $D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)R + D_R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{p} = 0$
- ♦ $D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{p} + D_R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)R = 0$

16. Какие из нижеприведенных формул верны?
- ♦ $\boldsymbol{p}D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) + \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)^T = 0^{\mathrm{T}}$
- ♦ $\boldsymbol{p}D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) + \nu(\boldsymbol{p},R)^T = 0^{\mathrm{T}}$
- ♦ $\boldsymbol{p}D_{\boldsymbol{p}}\nu(\boldsymbol{p},R) + \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)^T = 0^{\mathrm{T}}$

17. Функция спроса потребителя положительно однородна первой степени по доходу и удовлетворяет закону Вальраса. Тогда...
- ♦ предпочтения гомотетичны
- ♦ функция спроса удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений
- ♦ эластичность спроса по доходу равна 1

18. Если предпочтение гомотетично, то
- ♦ эластичность спроса по доходу равна 1
- ♦ эффект дохода отсутствует
- ♦ потребительский излишек совпадает с компенсирующей вариацией

19. Пусть в экономике 2 товара. Функция полезности потребителя квазилинейна и первое благо входит в нее линейно. Тогда...
- ♦ предпочтения потребителя гомотетичны
- ♦ нарушаются кардинальные свойства функции полезности
- ♦ эластичность спроса по доходу на первый товар обратно пропорциональна доли дохода затрачиваемой на этот товар

20. Доля средств, расходуемых потребителем на приобретение каждого блага — постоянная (и положительная) доля совокупных расходов потребителя. Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
- ♦ Квазилинейной;
- ♦ Леонтьевской (ситуация комплементарности благ);
- ♦ Функцией полезности Кобба-Дугласа

21. Спрос потребителя на любое благо зависит лишь от относительной цены данного блага и совокупных потребительских расходов. Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
♦ Квазилинейной;
♦ Леонтьевской (ситуация комплементарности благ);
♦ Функцией полезности Кобба-Дугласа

22. Спрос потребителя на первые n–1 благ зависит лишь от относительной цены этих благ. Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
♦ Квазилинейной;
♦ Квазилинейной и сепарабельной
♦ Функцией полезности Кобба-Дугласа

23. Спрос потребителя на первые n –1 благо не зависит от (совокупных) потребительских расходов. Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
♦ Квазилинейной;
♦ Сепарабельной
♦ Квазилинейной и сепарабельной

24. Спрос потребителя на первые n –1 благо зависит лишь от цены данного блага. Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
♦ Квазилинейной;
♦ Сепарабельной
♦ Квазилинейной и сепарабельной

25. Структура спроса потребителя постоянна (отношение величины покупок j блага к величине 1 блага, j=1,..., n). Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
♦ Леонтьевской (ситуация комплементарности благ);
♦ Линейной (ситуация вполне заменимых благ).
♦ Функцией полезности Кобба-Дугласа

26. Пусть функция полезности потребителя имеет вид $u(\boldsymbol{x}) = (ax_1^{\mathrm{r}} + bx_2^{\mathrm{r}})^{1/\mathrm{r}}$.
Если $\mathrm{r} \to 0$, то
♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=x_1^{\mathrm{a}}\, x_2^{\mathrm{b}}$
♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=x_1^{\mathrm{a}} + x_2^{\mathrm{b}}$
♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=ax_1 + bx_2$

27. Пусть функция полезности потребителя имеет вид $u(\boldsymbol{x}) = (ax_1^{\mathrm{r}} + bx_2^{\mathrm{r}})^{1/\mathrm{r}}$.
Если $\mathrm{r} \to 1$, то
♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=x_1^{\mathrm{a}}\, x_2^{\mathrm{b}}$

♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=x_1^{\mathrm{a}} + x_2^{\mathrm{b}}$
♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=ax_1 + bx_2$

28. Пусть функция полезности потребителя имеет вид $u(\boldsymbol{x}) = (ax_1^{\mathrm{r}} + bx_2^{\mathrm{r}})^{1/\mathrm{r}}$.
Если $\mathrm{r} \to -\infty$, то
♦ функция полезности имеет Леонтьевский тип
♦ функция полезности имеет вид функции Кобба-Дугласа
♦ функция полезности линейна

29. Какая из нижеприведенных функций выступая в качестве функции полезности дает всегда граничные решения
♦ $x_1 + x_2$
♦ $x_1^2 + x_2^2$
♦ $x_1\, x_2$

30. Пусть функция полезности участника имеет вид $u(\boldsymbol{x})= x_1 + \ln(x_2)$. Цена первого товара 1, а цена второго товара 2. Потребитель будет потреблять оба товара в положительных количествах, начиная с дохода
♦ 1.5
♦ 1
♦ 2

31. Покажите, что для (выпуклых, локально ненасыщаемых) предпочтений непрямая функция имеет мультипликативную форму $a(\boldsymbol{p})R$ в том и только том случае, когда (прямая) функция полезности является положительно однородной первой степени.

32. Покажите, что если функция полезности аддитивно сепарабельна и строго монотонна, то в экономике не будет взаимодополняемых товаров

33. Покажите, что строгой выпуклости предпочтений недостаточно для справедливости предыдущего утверждения (приведите соответствующий пример).

34. Покажите, что если функция полезности является однородной первой степени, то непрямая функция полезности $v(\boldsymbol{p},R)$ имеет вид $v(\boldsymbol{p},R) = a(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p})R$.

35. Покажите, что если функция полезности является квазилинейной, то непрямая функция полезности $v(\boldsymbol{p},R)$ имеет вид $v(\boldsymbol{p},R) = a(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p})R$ для тех значений $\boldsymbol{p}$ и R, при которых оптимальный потребительский набор содержит все блага (в положительных количествах).

36. В экономике с тремя благами потребитель имеет положительный доход $R > 0$ и его функции спроса на первое и второе благо равны

$$x_1 = 100 - 5\frac{p_1}{p_3} + \beta\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{w}{p_3},$$

$$x_2 = \alpha + \beta\frac{p_1}{p_3} + \gamma\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{w}{p_3},$$

где α, β, γ, $\delta \geqslant 0$.

(а) Объясните, как можно рассчитать спрос не третье благо (вычисления делать не надо).

(б) Являются ли функции спроса для x_1 и x_2 однородными требуемой степени?

(в) Какие ограничения на параметры α, β, γ, δ должны выполняться, чтобы данные функции спроса могли быть порождены задачей максимизации полезности.

(г) Используя результаты пункта (в) для фиксированного значения спроса на 3-й товар изобразите кривые безразличия в пространстве (x_1, x_2).

(д) Что можно сказать о свойствах функции полезности этого потребителя? (Используйте результаты пункта (г).)

37. Предположим, что функция полезности потребителя зависит лишь от двух благ потребления C и досуга L, а доход формируется из трудового $w(L_0 - L)$ и (экзогенно заданного) нетрудового дохода m. Здесь w — ставка заработной платы и L_0 — его общий бюджет (фонд) времени. Покажите на примерах, что даже в том случае, когда досуг (и потребление) — нормальное благо, предложение труда (разность между общим бюджетом времени и спросом на досуг) может убывать при росте ставки заработной платы. Объясните невыполнение “закона спроса” в данной ситуации.

38. Покажите, что если предпочтения потребителя гомотетичны, то отношение функций спроса на любые два товара не зависит от уровня дохода.

39. Покажите, что если предпочтения потребителя гомотетичны, то функции спроса удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial x_i(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_i}.$$

40. Функция полезности потребителя зависит от потребления некоторого блага x и потребления остальных благ (вектора $\boldsymbol{z}$) и однородна первой степени. Докажите, что при фиксированных ценах на остальные блага (вектор $\boldsymbol{q}$) предпочтения потребителя на парах (x, y), где y — сумма денег затрачиваемая на покупку набора $\boldsymbol{z}$, представимы однородной первой степени “полунепрямой” функцией полезности $U(x,y)$.

41. Во вводных курсах микроэкономики обычно вводят следующее определение благ-заменителей и комплементарных благ (в терминах функций спроса Маршалла):

«Благо 1 называется субститутом блага 2, если $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} < 0$».

«Благо 1 называется комплементарным для блага 2, если $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} > 0$».

Покажите, что такое определение ведет к парадоксам. Например, возможна ситуация, когда благо 1 является субститутом блага 2, а обратное неверно.
Покажите также, что, аналогичные определения в терминах функции спроса Хикса (приведите их) свободны от парадоксов такого типа.

42. Покажите, что любой товар Гиффена является малоценным. Справедливо ли обратное?

43. С какими типами благ мы имеем дело в случае следующих функций полезности:
- Кобба-Дугласа, - CES, -Леонтьева,
- линейной, - квазилинейной,
- аддитивной.

44. Могут ли все блага быть малоценнными, если предпочтения локально ненасыщаемы?

45. Пусть полезность потребителя зависит от двух благ, и первое благо является дискретным (доступные уровни его потребления — целые числа а потребитель имеет квазилинейные предпочтения. При каких ценах на благо 1 потребитель предъявляет спрос на него на уровне 1, 2, …?

46. Покажите, что если функция полезности квазилинейна, то непрямая функция полезности — выпуклая функция цен.

1.5. Двойственность в модели потребителя

Выберем в качестве U достижимое значение полезности (т.е. $U = u(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \geqslant 0$) и рассмотрим следующую задачу:

Задача 2

$\boldsymbol{px} \to \min_{\boldsymbol{x}}$

$u(\boldsymbol{x}) \geqslant U$, (2-1)

$\boldsymbol{x} \geqslant 0$. (2-2)

Введем два понятия, связанные с этой задачей.

Определение 20. Функцией расходов $e(\boldsymbol{p},U)$ называют значение целевой функции в Задаче 2 в точке оптимума при данных $\boldsymbol{p}$ и U.

Согласно определению, для каждого достижимого уровня полезности функция расходов указывает минимальный уровень расходов (дохода), обеспечивающий такой уровень полезности.

Предположим, что решение Задачи 2 единственно при всех значениях цен рассматриваемых благ. Тогда можно определить функцию спроса Хикса, соответствующую данному значению полезности U.

Определение 21. Функция спроса Хикса $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)$ сопоставляет заданному уровню полезности U и ценам $\boldsymbol{p}$ потребительский набор, который обеспечивает наименьший уровень расходов.

Заметим, что из определения функций $e(\boldsymbol{p},U)$ и $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)$ следует, что

$$\boldsymbol{ph}(\boldsymbol{p},U) = e(\boldsymbol{p},U).$$

Кроме того, если функция полезности непрерывна, то хиксианский спрос удовлетворяет также равенству

$$u(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)) = U,$$

что доказывает следующее утверждение.

Утверждение 17.

Пусть функция полезности $u(.)$ непрерывна.

Тогда если $\tilde{\boldsymbol{x}}$ является решением Задачи 2 при некоторых ценах $\boldsymbol{p}\gg 0$ и $U \geqslant u(\mathbf{0})$, то $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) = U$.

<u>Доказательство</u>:

Предположим противное. Пусть решение Задачи 2 удовлетворяет условию $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) > U \geqslant u(\mathbf{0})$.

Из соотношения $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) > u(\mathbf{0})$ следует, что $\tilde{\boldsymbol{x}}\neq\mathbf{0}$, поэтому, поскольку $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} > 0$.

Рассмотрим два случая: (а) $U = u(\mathbf{0})$ и (б) $U > u(\mathbf{0})$.

В ситуации (а) нулевой вектор допустим и стоит меньше, чем $\hat{\boldsymbol{x}}$, что противоречит оптимальности $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Рассмотрим теперь случай (б). Так как $u(.)$ непрерывна, то существует $\alpha<1$, такое что $\alpha\tilde{\boldsymbol{x}}$ допустим ($u(\alpha\tilde{\boldsymbol{x}}) \geqslant U$). Но этот набор $\alpha\tilde{\boldsymbol{x}}$ стоит дешевле, чем $\tilde{\boldsymbol{x}}$, т. е. $\boldsymbol{p}\alpha\tilde{\boldsymbol{x}} = \alpha\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}$. А это противоречит оптимальности $\tilde{\boldsymbol{x}}$, что и доказывает утверждение.

■

Утверждение 18 (свойства функции расходов) :

1) Функция однородна первой степени по ценам:

$$e(\lambda p, U) = \lambda\, e(\boldsymbol{p}, U);$$

2) Функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ — вогнутая функция цен $\boldsymbol{p}$.

3) Функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ непрерывна.

4) Функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ возрастает по U.

5) Функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ не убывает по ценам.

<u>Доказательство</u>:

(1) Первый пункт утверждения следует из того, что решения Задачи 2 (потребительский набор минимальной стоимости) при векторе цен $\boldsymbol{p}$ и векторе цен $\lambda\boldsymbol{p}$ совпадают.

(2) Мы должны показать, что для двух произвольных векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ выполняется $e(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2, U) \geqslant \alpha\, e(\boldsymbol{p}_1, U) + (1-\alpha)\, e(\boldsymbol{p}_2, U)$.

Пусть $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — оптимальное решение Задачи 2 при ценах $\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2$, тогда $(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2)\,\tilde{\boldsymbol{x}} = e(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2, U)$. Множество $\{\boldsymbol{x} \mid u(\boldsymbol{x}) \geqslant U\}$ не зависит от $\boldsymbol{p}$, поэтому, поскольку $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) \geqslant U$ при ценах $\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2$, то $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) \geqslant U$ и при ценах $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$. Из определения функции расходов и допустимости $\tilde{\boldsymbol{x}}$ имеем

$$e(\boldsymbol{p}_1, U) \leqslant \boldsymbol{p}_1\tilde{\boldsymbol{x}} \quad \text{и} \quad e(\boldsymbol{p}_2, U) \leqslant \boldsymbol{p}_2\tilde{\boldsymbol{x}}.$$

Отсюда

$$\alpha e(\boldsymbol{p}_1, U) + (1-\alpha)\, e(\boldsymbol{p}_2, U) \leqslant (\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2)\tilde{\boldsymbol{x}} = e(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2, U).$$

(3) Доказательство непрерывности оставляем читателю в качестве упражнения. Заметим только, что непрерывность следует из того, что (а) функция расходов вогнута как функция цен и (б) любая вогнутая функция непрерывна во внутренности своей области определения.

(4) Доказательство этого пункта подобно доказательству возрастания непрямой функции полезности по доходу и оставляется в качестве самостоятельного упражнения.

(5) Пусть $\boldsymbol{p}' \geqslant \boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}' \neq \boldsymbol{p}$. Тогда $\boldsymbol{ph}(\boldsymbol{p}', U) \geqslant \boldsymbol{ph}(\boldsymbol{p}, U) = e(\boldsymbol{p}, U)$. Но $e(\boldsymbol{p}', U) = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}', U) \geqslant \boldsymbol{ph}(\boldsymbol{p}', U)$. Заметим, что если $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}', U) \gg 0$, то $e(\boldsymbol{p}', U) > e(\boldsymbol{p}, U)$.

■

Решения Задачи 1 и Задачи 2 тесно связаны между собой, что доказывает нижеследующая "теорема двойственности". Некоторые авторы называют этот результат "теоремой взаимности". Этой традиции мы и будем следовать в дальнейшем.

Утверждение 19

I. Пусть функция полезности локально ненасыщаема. Тогда если $\boldsymbol{x}^*$ является решением Задачи 1, то $\boldsymbol{x}^*$ является решением Задачи 2 при $U = u(\boldsymbol{x}^*)$.

II. Пусть функция полезности непрерывна. Тогда если $\boldsymbol{x}^*$ является решением Задачи 2 с $\boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{x}^*$ является решением Задачи 1 при $R = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^*$.

Доказательство:

I. Предположим противное: $\boldsymbol{x}^*$ не является решением Задачи 2, т.е. существует допустимое решение Задачи 2 — потребительский набор $\boldsymbol{x}'$ такой, что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'$. Поскольку $\boldsymbol{x}'$ допустим в Задаче 2, то $u(\boldsymbol{x}') \geqslant U = u(\boldsymbol{x}^*)$. С другой стороны, из локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что существует $\boldsymbol{x}''$, такой что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^* \geqslant \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}''$ и $u(\boldsymbol{x}'') > u(\boldsymbol{x}') \geqslant u(\boldsymbol{x}^*)$. А это противоречит оптимальности $\boldsymbol{x}^*$ в Задаче 1.

II. Предположим, что $\boldsymbol{x}^*$ не является решением Задачи 1. Тогда существует потребительский набор $\boldsymbol{x}'$, который является допустимым решением Задачи 1, такой что $u(\boldsymbol{x}') > u(\boldsymbol{x}^*)$. Набор $\boldsymbol{x}'$ должен удовлетворять бюджетному ограничению, т.е.

$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}' \leqslant R = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^*$. Такой набор $\boldsymbol{x}'$ может найтись только при $\boldsymbol{x}^* \neq \boldsymbol{0}$, поскольку в противном случае $\boldsymbol{x}^*$ — единственное допустимое решение Задачи 1. Тогда, поскольку $\boldsymbol{p} \gg 0$, то $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^* > 0$. В силу непрерывности отношения предпочтения найдется α такое, что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^* > \alpha\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'$ и $u(\alpha\boldsymbol{x}') \geqslant u(\boldsymbol{x}^*)$. Это противоречит оптимальности $\boldsymbol{x}^*$ в Задаче 2.
■

Из доказанной теоремы следует, что в случае, когда предпочтения локально ненасыщаемы и непрерывны, справедливы следующие четыре тождества, которые по сути дела являются соотношениями двойственности для Задач 1 и 2:

- ♣ $\nu(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, U)) \equiv U$;
- ♣ $e(\boldsymbol{p}, \nu(\boldsymbol{p}, R)) \equiv R$;
- ♣ $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \nu(\boldsymbol{p}, R))$;
- ♣ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, U) \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \mathrm{e}(\boldsymbol{p}, U))$.

Последнее из тождеств, является, по-видимому, самым важным в эмпирических исследованиях потребительского поведения, поскольку связывает наблюдаемый маршаллианский спрос с ненаблюдаемым хиксианским.

В ситуации, когда l=2, маршаллианский спрос — наилучший набор (точка) на данной бюджетной прямой. Хиксианский спрос — самый дешевый набор благ на данной кривой безразличия (см. помещенную ниже графическую иллюстрацию).

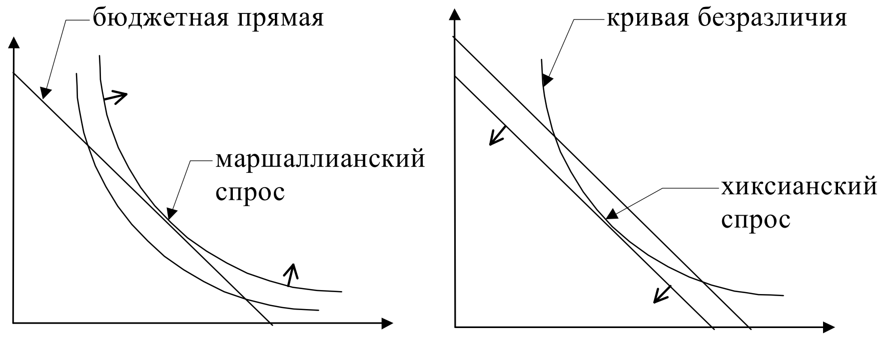


Рисунок 3

Когда хиксианский и маршаллианский спрос не совпадают? В качестве примера можно привести предпочтения с “толстой” кривой безразличия (такие кривые безразличия появятся, например, если взять в качестве функции полезности целую часть какой-нибудь “нормальной” функции полезности). Хиксианский спрос всегда будет лежать (случай двух благ) на левой нижней границе “толстой” кривой безразличия. На рисунке эта граница изображена темной линией. Маршаллианский же спрос может лежать внутри “толстой” кривой безразличия.

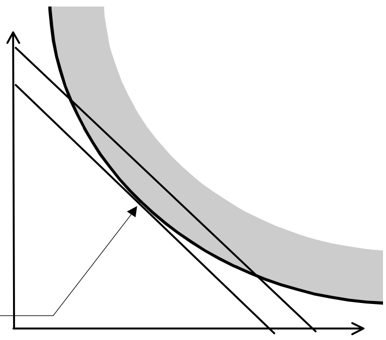


Рисунок 4. «Толстая» кривая безразличия

Причина несовпадения заключается в том, что “толстая” кривая безразличия означает отсутствие локальной ненасыщаемости. Таким образом, для того, чтобы гарантировать выполнение равенства $h_i(\boldsymbol{p},U) = x_i(\boldsymbol{p},\ e(\boldsymbol{p},U))$, нужно требовать наличие локальной ненасыщаемости.

Предположим дополнительно, что функции $e(\boldsymbol{p},U)$, $\nu(\boldsymbol{p},R)$, $h_i(\boldsymbol{p},U)$, $x_i(\boldsymbol{p},R)$ — дифференцируемые функции (т.е соответствующая функция полезности $u(.)$, представляющая данные предпочтения, дважды непрерывно дифференцируема). Тогда выполняются три важных свойства: лемма Шепарда, тождество Роя и уравнение Слуцкого.

Связь между функциями расходов и (хиксианского) спроса описывается леммой Шепарда.

Утверждение 20 (<u>Лемма Шепарда для теории потребления</u>).

$$\frac{\partial \mathrm{e}(p,U)}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p},U)$$

<u>Доказательство</u>:

Учитывая значение этого результата для теории потребления, укажем несколько его обоснований

1. По определению функции расходов $e(\boldsymbol{p},U) = \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)\ \forall \boldsymbol{p},U$. Продифференцировав это тождество по p_i, получим соотношение:

$$\frac{\partial \mathrm{e}(\boldsymbol{p},U)}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p},U) + \sum_j p_j \frac{\partial h_j(\boldsymbol{p},U)}{\partial p_i}.$$

Остается показать, что второе слагаемое равно нулю.

Последнее утверждение стоит проинтерпретировать. Хотя при изменении цен рассматриваемых благ потребитель меняет свое поведение, предпочитая, вообще говоря, другой потребительский набор, при расчете изменения расходов на приобретение нового набора в первом приближении можно не учитывать этого изменение спроса потребителя. Другими словами, новые расходы в первом приближении рассчитываются так, как если бы оптимальный выбор остался неизменным, т.е. эти новые расходы равны стоимости старого набора в новых ценах. Изменение спроса проявляется лишь во втором приближении.

Докажем это утверждение.

Так как $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)$ — решение Задачи 2, то по теореме Куна-Таккера существует множитель Лагранжа λ ограничения (2-1) задачи такой, что

$$p_j = \lambda \frac{\partial u}{\partial x_j} \ \forall j.$$

(Напомним, что, как обычно, мы предполагаем, что решение внутреннее.)

Отсюда $\sum_j p_j \dfrac{\partial h_j(\boldsymbol{p},U)}{\partial p_i} = \lambda \sum_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\dfrac{\partial\, h_j(\boldsymbol{p},U)}{\partial p_i}$.

В соответствие с определением функции $\boldsymbol{h}(.)$ выполняется тождество $u\,(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)) \equiv U$. Продифференцировав его по p_i, получим требуемое соотношение

$$\sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\, h_j(\boldsymbol{p},U)}{\partial\, p_i} = 0.$$

Другое доказательство этого факта состоит в построении касательной для графика функции расходов.

Обозначим $\boldsymbol{p}_{-i} = (\,p_1,\ldots,p_{i-1},\,p_{i+1},\ldots,p_l)$. При этом $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) = \boldsymbol{p}$.

Пусть $\boldsymbol{p}^*$ — некоторая точка. Зафиксируем все цены, кроме цены i-го блага $\boldsymbol{p}_{-i} = \boldsymbol{p}^*_{-i}$. Покажем, что прямая $p_i h_i(\boldsymbol{p}^*,U) + \sum_{j\neq i} p_j^* \ h_j(\boldsymbol{p}^*,U)$ касается графика функции $e\,(p_i,\ \boldsymbol{p}^*_{-i},U)$ в точке p^*_i. Действительно, набор $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}^*,U)$ при ценах $\boldsymbol{p}^*$ требует минимальных расходов на приобретение из наборов, обеспечивающих полезность U. При любых других ценах он допустим, но, вообще говоря, не минимизирует расходы. При ценах $(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i})$ минимум расходов достигается на потребительской корзине $\boldsymbol{h}(p_i,\ \boldsymbol{p}^*_{-i},U)$. Другими словами, справедливо соотношение, которое и устанавливает требуемый результат о касании:

$$e\,(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U) = p_i h_i(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U) + \sum_{j\neq i} p_j^* \ h_j(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U) \leqslant p_i h_i(\boldsymbol{p}^*,U) + \sum_{j\neq i} p_j^* \ h_j(\boldsymbol{p}^*,U).$$

Сказанное иллюстрирует нижеприведенный график.

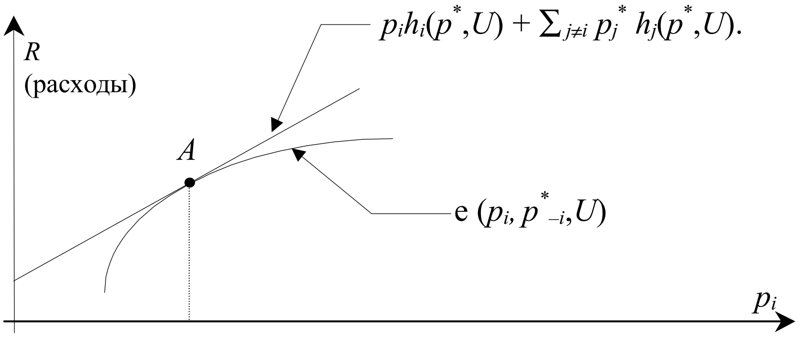


Рисунок 5

Согласно неравенству, кривая $R = e\,(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U)$ лежит под прямой

$$R = p_i h_i(\boldsymbol{p}^*,U) + \sum_{j\neq i} p_j^* \ h_j(\boldsymbol{p}^*,U)$$

и имеет с ней общую точку $(p_i^*, e\,(\boldsymbol{p}^*,U)$ (A на рисунке). Значит, эта прямая является касательной к кривой $R = e\,(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U)$. Наклон прямой равен $h_i(\boldsymbol{p}^*,U)$.

Таким образом, производная функции $e\,(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U)$ равна $h_i(\boldsymbol{p}^*,U)$:

$$\frac{\partial e}{\partial p_i}(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U) = \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{p}_i}(p^*_j,U) = h_i(\ p^*_j,U).$$

■

Из леммы Шепарда следует, что по функции расходов всегда можно построить функцию (хиксианского) спроса.

Утверждение 21 (<u>Тождество Роя</u>)

$-\dfrac{\partial \nu(p,R)}{\partial p_i} / \dfrac{\partial \nu(p,R)}{\partial R} = x_i(\boldsymbol{p},R)$.

<u>Доказательство</u>:

Для доказательства этого тождества воспользуемся одним из перечисленных выше тождеств:

для любого $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$ выполняется соотношение: $\nu(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p},U)) = U$

Продифференцируем это тождество по p_i:

$$\frac{\partial \nu}{\partial p_i}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p},U)) + \frac{\partial \nu}{\partial R}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p},U)) \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{p}_i}(\boldsymbol{p},U) = 0.$$

По лемме Шепарда $\dfrac{\partial \mathrm{e}}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},U) = h_i(\boldsymbol{p},U)$, следовательно

$$\frac{\partial \nu}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},e(\boldsymbol{p}, U)) + \frac{\partial \nu}{\partial R}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p},U))h_i(\boldsymbol{p},U) = 0.$$

Возьмем $U=\nu(\boldsymbol{p},R)$.

Воспользуемся тождествами $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\nu(\boldsymbol{p},R)) \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ и $\mathrm{e}(\boldsymbol{p}, \nu(\boldsymbol{p},R)) \equiv R$. Из них следует, что верно соотношение

$$-\frac{\partial \nu}{\partial p_i}(p,R) / \frac{\partial \nu}{\partial R}(p,R) = x_i(\boldsymbol{p},R).$$

■

Утверждение 22 (<u>Уравнение Слуцкого</u>)

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j.$$

$\dfrac{\partial h_i}{\partial p_j}$ — эффект замены, $\dfrac{\partial x_i}{\partial R} x_j$ — эффект дохода.

<u>Доказательство</u>:

Для доказательства воспользуемся следующим тождеством:

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \mathrm{e}(\boldsymbol{p},U)) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)$.

Продифференцируем это тождество по p_j:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{p}_j}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p},U)) + \frac{\partial x_i}{\partial R}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}_i,U)) \frac{\partial e}{\partial p_j}(\boldsymbol{p},U) = \frac{\partial h_i}{\partial \mathrm{p}_j}(\boldsymbol{p},U).$$

Воспользуемся леммой Шепарда $\dfrac{\partial \mathrm{e}(p,U)}{\partial p_j} = h_j(\boldsymbol{p},U)$.

Если $U = \nu(\boldsymbol{p},R)$, то $e(\boldsymbol{p},U) = R$, $h_j(\boldsymbol{p},U) = x_j(\boldsymbol{p}, R)$.

Следовательно,

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, R) + \frac{\partial x_i}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R)\, x_j(\boldsymbol{p}, R) = \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, \nu(\boldsymbol{p},R)).$$

■

Устанавливая эти соотношения, мы предполагали, что функции $v(\boldsymbol{p},R)$ и $e(\boldsymbol{p},U)$ непрерывно дифференцируемы. Теперь усилим это требование, предположив, что функция расходов дважды непрерывно дифференцируема. Тогда в силу теоремы Юнга (Young) ее смешаные вторые производные совпадают, т.е.

$$\frac{\partial^2 e}{\partial p_j \partial p_i}(\boldsymbol{p},U) = \frac{\partial^2 e}{\partial p_i \partial p_j}(\boldsymbol{p},U).$$

Дифференцируя тождество Шепарда, получаем

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p},U) = \frac{\partial h_j}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},U).$$

Используя этот результат и уравнение Слуцкого, имеем

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p},R) + \frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{R}}(\boldsymbol{p},R)\, x_j(\boldsymbol{p},R) = \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},R) + \frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{R}}(\boldsymbol{p},R)\, x_i(\boldsymbol{p},R).$$

Таким образом, мы показали симметричность матрицы Якоби функции расходов, т.е. матрицы, коэффициент a_{ij} которой рассчитывается по следующей формуле:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R}\, x_j$$

Эту матрицу называют также матрицей коэффициентов замены. Таким образом, матрица коэффициентов замены функции расходов потребителя, выборы которого описываются моделью рационального поведения, всегда симметрична.

Кроме того, поскольку функция расходов $e(\boldsymbol{p},U)$ — вогнутая функция цен, то матрица коэффициентов замены является отрицательно полуопределенной.

Это важные характеристики спроса, порожденного моделью рационального поведения. Они являются не только необходимыми (как мы только что установили), но и достаточными (как покажем далее) условиями того, что некоторая функция цен и уровней полезности является функцией расходов рационального потребителя. Согласно уравнению Слуцкого эти характеристики могут быть выражены в терминах первых частных производных маршаллианского спроса, которые, как предполагается, являются непосредственно наблюдаемыми, что дает возможность проверять согласованность наблюдаемого потребительского поведения с моделью рационального поведения и восстанавливать предпочтения потребителя на основе его рыночного поведения (выборов).

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Если спрос на товар обладает отрицательным эффектом дохода,
то этот товар является
- ♦ нормальным
- ♦ малоценным
- ♦ товаром Гиффена

2. Какое из нижеприведенных утверждений верно:

♦ товар является малоценным тогда и только тогда, когда он — товар Гиффена
♦ товар Гиффена является малоценным товаром
♦ малоценный товар является товаром Гиффена

3. Какое из нижеприведенных утверждений неверно
♦в экономике с двумя товарами первый товар субститут второго, но второй не субститут первого
♦ существует предпочтения потребителя, при которых он при любых ценах и доходах потребляет только первый товар
♦ в экономике с двумя товарами оба товара являются товарами Гиффена

4. Эффект замены отсутствует в случае, если
♦ функция полезности квазилинейна
♦ функция полезности вогнута
♦ блага комплементарные

5. Эффект дохода отсутствует в случае, если функция полезности
♦ квазилинейна
♦ вогнута
♦ линейна

6. В экономике 2 товара. Известно, что в матрице замены $a_{11} = -2$ и $a_{22} = -1$. В этом случае элемент a_{21} равен
♦ –3
♦ –1.5
♦ не достаточно данных для ответа

7. Какие из нижеприведенных формул верны?
♦ $\boldsymbol{p} D_R \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},R) = 1$
♦ $\boldsymbol{p} D_R \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) = 1$
♦ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, u)\, D_R \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) = 1$

8. Какое из нижеприведенных определений взаимозаменяемых (взаимодополняемых) благ не ведет к парадоксам следующего типа: благо 1 является субститутом блага 2, однако обратное неверно?
♦ благо i называется субститутом блага j если $\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}p_j} > 0$
♦ благо i называется субститутом блага j если $\frac{\mathrm{d}h_i}{\mathrm{d}p_j} > 0$
♦ оба вышеприведенных определения ведут к парадоксам указанного типа

9. Какими из нижеперечисленных свойств обладает функция расходов?
1) однородна нулевой степени по ценам
2) однородна нулевой степени по ценам и доходам

3) неубывает по ценам
♦ 1, 2
♦ 2
♦ 3

10. Какими из нижеперечисленных свойств обладает функция расходов?
♦ выпукла по ценам
♦ строго убывает по уровню полезности и не возрастает по ценам
♦ однородна первой степени по доходу

11. Какими из нижеперечисленных свойств обладает хиксианский спрос?
♦ однородна нулевой степени по доходу
♦ однородна нулевой степени по ценам
♦ возрастает по ценам и не убывает по доходу

12. Матрица Якоби хиксианского спроса
♦ положительно полуопределена
♦ симметрична
♦ вырождена

13. Лемма Шепарда устанавливает связь между...
♦ хиксианским спросом и функцией затрат;
♦ хиксианским и маршалианским спросом;
♦ маршалианским спросом и непрямой функцией полезности.

14. Тождество Роя устанавливает связь между
♦ хиксианским спросом и функцией затрат;
♦ маршаллианским спросом и непрямой функцией полезности;
♦ хиксианским и маршаллианским спросом.

15. Уравнение Слуцкого устанавливает связь между ...
♦ хиксианским спросом и функцией затрат;
♦ маршаллианским спросом и непрямой функцией полезности;
♦ хиксианским и маршаллианским спросом.

16. Какое из нижеприведенных выражений верно
♦ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u) = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p},R) \,/\, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}R}(\boldsymbol{p},R)$;
♦ $e(\boldsymbol{p},u) = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p},u)$;
♦ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u) = -\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p},u)$.

17. Какое из нижеприведенных выражений верно?

♦ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$

♦ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}R} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$

♦ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}R}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$

18. Пусть функция полезности непрерывна, локально ненасыщаема, строго вогнута. Функция хиксианского спроса $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u)$ непрерывно дифференцируема. Какие из нижеприведенных свойств справедливы при этих предположениях?

1) $D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{h} = D_{p}^{2}\, e(\boldsymbol{p},u)$

2) $D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{h}$ — отрицательно полуопределена

3) $D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{h}$ — симметрична

♦ 1

♦ 1,2

♦ 1,2,3

19. Если функция полезности имеет вид Гормана, то функция затрат имеет вид

♦ $e(\boldsymbol{p},u) = c(\boldsymbol{p}) + u$

♦ $e(\boldsymbol{p},u) = \mathrm{c}(\boldsymbol{p})\,u + d(\boldsymbol{p})$

♦ $e(\boldsymbol{p},u) = c(\boldsymbol{p}) + d(u)$

20. Если функция полезности однородна первой степени, то ...

♦ функция хиксианского спроса и функция затрат однородны первой степени по уровню полезности

♦ функция хиксианского спроса однородна нулевой степени по уровню полезности

♦ маршалианский спрос однороден нулевой степени по доходу

21. Целевой функционал взаимной задачи — это...

♦ полезность индивидуума

♦ расходы индивидуума

♦ потребительский излишек

22. Теорема взаимности устанавливает взаимосвязь между...

♦ решениями задач максимизации полезности и минимизации затрат

♦ хиксианским спросом и непрямой функцией полезности

♦ маршалианским спросом и непрямой функцией полезности

23. Для выполнения теоремы взаимности функция полезности должна быть...

♦ квазивогнута

♦ квазивогнута и локально ненасыщаема

♦ локально ненасыщаема

24. Какое из нижеприведенных выражений неверно

♦ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u) = \nu(\boldsymbol{p},e(\boldsymbol{p},u))$
♦ $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\nu(\boldsymbol{p},R))$
♦ $e(\boldsymbol{p},\nu(\boldsymbol{p},R)) = R$

25. Какое из нижеприведенных выражений верно
♦ $\nu(\boldsymbol{p},R) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R))$
♦ $\nu(\boldsymbol{p},e(\boldsymbol{p},u)) = u$
♦ $e(\boldsymbol{p},u) = \nu(\boldsymbol{p},\boldsymbol{h}(e,\boldsymbol{p}))$

26. Пусть функция полезности индивидуума имеет вид

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} x_1x_2, & \text{если } x_1x_2 \leqslant 1 \\ 1, & \text{если } 1 \leqslant x_1x_2 \leqslant 2 \\ x_1x_2 - 1, & \text{если } x_1x_2 \geqslant 2 \end{cases}$$

Найдите маршалианский и хиксианский спрос. Как при ценах (1, 1) будут выглядеть
♦ кривые Энгеля,
♦ кривые хиксианского спроса в зависимости от полезности?

27. Покажите, что при росте цен рассматриваемых благ на величину $\Delta\boldsymbol{p}$ прирост потребления хиксианского спроса $\Delta\boldsymbol{h}$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta\boldsymbol{p}\ \Delta\boldsymbol{h} \leqslant 0.$$

28. Предположим, что строго выпуклые строго монотонные предпочтения представимы сепарабельной функцией полезности, причем предельная полезность любого продукта как угодно мала при достаточно больших объемах его потребления. Покажите, что
♦ вальрасовский и хиксианский спрос данного потребителя любой продукт не ограничен (т.е. при достаточно низкой цене на продукт спрос на него оказывается выше любой наперед заданной величины;
♦ система функций хиксианского спроса удовлетворяет условию валовой заменимости.

29. Какова функция затрат и какой тип предпочтений имеет потребитель, если его непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\boldsymbol{p}, R) = A(\boldsymbol{p})\, R\ .$$

30. Покажите, что функция $v(p_1, p_2, R) = \dfrac{R}{p_1} + \dfrac{R}{p_2}$ удовлетворяет всем свойствам непрямой функции полезности и вычислите на ее основе функцию затрат и функции спроса (маршалианского и хиксианского).

31. Найдите непрямые функции полезности и функции затрат для пяти типов предпочтений, задаваемых следующими функциями полезности:

a. Функцией полезности Кобба-Дугласа

$$u(\boldsymbol{x}) = \prod \boldsymbol{x}_i^{\alpha_i},\ \alpha_i > 0.$$

б. Вогнутой аддитивной функцией полезности

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{x}_i^{\rho}$$

в. Функцией Леонтьева (блага комплементарны)

$$u(\boldsymbol{x}) = \min\{x_i/a_i\}$$

г. Линейной функцией (блага вполне заменимы)

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

д. Квазилинейной функцией

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(x_i) + x_n.$$

32. Покажите, что для предпочтений предыдущего упражнения непрямая функция полезности и функция расходов взаимно обратны.

33. Вычислите функцию спроса Маршала и Хикса для функций полезности из упражнения 31 и покажите, что выполняются следующие соотношения

- $\nu(\boldsymbol{p}, \mathrm{e}(\boldsymbol{p},U)) \equiv U$;
- $\mathrm{e}(\boldsymbol{p}, \nu(\boldsymbol{p},R)) \equiv R$;
- $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\nu(\boldsymbol{p},R))$;
- $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U) \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \mathrm{e}(\boldsymbol{p},U))$.

где $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ – функция спроса Маршала, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)$ – функция спроса Хикса на благо, $\mathrm{e}(\boldsymbol{p},U)$ – функция затрат, $\nu(\boldsymbol{p},R)$ – непрямая функция полезности.

34. Проверьте путем прямого вычисления, справедливы ли для функций упражнения 31 тождество Роя и лемма Шепарда, связывающие функцию спроса Хикса и функцию затрат, а также соотношение связывающее непрямую функцию полезности и множитель Лагранжа для задачи потребителя.

35. Используя теорему об огибающей (см. Математическое приложение) докажите, что

$$h_i(\boldsymbol{p}, u) = \frac{\partial e(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_i}.$$

36. Используя теорему об огибающей докажите, что $\dfrac{\partial v(\boldsymbol{p},R)}{\partial R}$ — значение множителя Лагранжа задачи потребителя.

37. Пусть A — матрица коэффициентов замены с элементами

$$a_{ij} = \frac{\partial x_i(\boldsymbol{p}, R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\boldsymbol{p}, R)}{\partial R} x_j(\boldsymbol{p}, R).$$

Докажите, что $\boldsymbol{p}A = 0$.

38. Пусть выполнен закон Вальраса и функция спроса однородна нулевой степени. Пусть, кроме того, в экономике обращается только два товара. Докажите симмет-

ричность матрицы Слуцкого, не делая предположения о максимизации полезности потребителем.

39. Покажите, что если блага комплементарны, то эффект замены отсутствует, а если предпочтения квазилинейны (для спроса на благо, уровень полезности которого нелинейно зависит от потребления этого блага) то отсутствует эффект дохода.

40. Вычислите коэффициенты замены для следующих функций полезности:
- Кобба-Дугласа, - CES, -Леонтьева,
- линейной, - квазилинейной,
- аддитивной.

41. Матрица замены при ценах $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 6$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} -10 & ? & ? \\ ? & -4 & ? \\ 3 & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Найдите пропущенные элементы. Может ли эта матрица быть матрицей замены рационального потребителя?

1.6. Интегрируемость функций спроса: восстановление предпочтений

На основе модели рационального поведения, ключевым элементом которой являются предпочтения потребителя, можно построить функции спроса. Однако сами по себе предпочтения ненаблюдаемы, и чтобы иметь возможность прогнозировать будущий спрос при изменениях цен и дохода, нам необходимо решить обратную задачу: восстановить предпочтения по наблюдаемому спросу. Один из подходов к ее решению — анализ так называемой проблемы интергрируемости (в соответствии с методом ее решения).

Рассмотрим его подробнее.

Предположим, что нам известна система функций спроса $x_i(\boldsymbol{p},R)$. Для восстановления непрямой функции полезности можно прямо воспользоваться тождеством Роя

$$x_i(\boldsymbol{p},R) = -\frac{\partial v(p,R)}{\partial p_i} / \frac{\partial v(p,R)}{\partial R},$$

рассматривая это тождество как систему дифференциальных уравнений. Если бы мы смогли решить данную систему дифференциальных уравнений, то получили бы непрямую функцию полезности. Знание непрямой функции полезности и системы функций спроса позволяет нам сопоставить каждому потребительскому набору, который может быть выбран как наилучший при некоторых ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R, значение полезности по следующему правилу:

$$u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)) = v(\boldsymbol{p},R).$$

Однако данное правило задает полезность не всех наборов. Так функции полезности $u(x_1, x_2) = \min(2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1)$ соответствует функция спроса, для которой $x_1(\boldsymbol{p},R) = x_2(\boldsymbol{p},R)$. Это не позволяет задать полезность для наборов (x_1, x_2), таких что $x_1 \neq x_2$.

Восстановить функцию полезности на множестве потребительских наборов, которые являются оптимальными выборами потребителя при некотрых ценах и доходах, по построенной непрямой функции полезности можно также на основе решения следующей задачи:

$$v(\boldsymbol{p}, R) \to \inf_{\boldsymbol{p}\in \mathbb{R}^l_{++}}$$
$$\boldsymbol{px} \leqslant R. \qquad (\#)$$

При этом в качестве полезности набора $\boldsymbol{x}$ выбираем значение этой задачи —

$$u^*(\boldsymbol{x}) = \inf \ \{v(\boldsymbol{p}, R) \mid \boldsymbol{p}\in \mathbb{R}^l_{++}, \boldsymbol{px} \leqslant R\}.$$

В качестве дохода можно взять любое положительное число, например, $R = 1$. Покажем, что такая процедура корректна, т.е. на ее основе мы получаем (правда, не для всех точек $\boldsymbol{x}$) прямую функцию полезности, соответствующую данной $v(\boldsymbol{p},R)$.

Утверждение 23. Пусть $u(.)$ — функция полезности, а $v(.,.)$ — соответствующая ей непрямая функция полезности. Пусть в задаче (#) вектор $\boldsymbol{x}$ — оптимальный потребительский набор при ценах $\boldsymbol{p}'$ и доходе R, т.е.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R).$$

Тогда вектор $\boldsymbol{p}'$ является решением задачи (#), и $v(\boldsymbol{p}',R) = u(\boldsymbol{x})$.

<u>Доказательство</u>:

Пусть $\boldsymbol{p}$ — произвольный вектор, являющийся допустимым в задаче (#) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R)$, т.е. $\boldsymbol{px}(\boldsymbol{p}', R) \leqslant R$. Это неравенство, с другой стороны, означает, что $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R)$ допустим в задаче потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R. Этот набор не может иметь большую полезность, чем набор $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, являющийся оптимальным в задаче потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R, т.е.

$$u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R)) \leqslant u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)),$$

или

$$v(\boldsymbol{p}',R) \leqslant v(\boldsymbol{p},R).$$

Отсюда следует, что $\boldsymbol{p}'$ оптимален в задаче (#) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R)$. Таким образом мы получили, что $v(\boldsymbol{p}',R) = u(\boldsymbol{x})$.

■

Заметим, что в принципе данная процедура позволяет построить «фунцию полезности» $u^*(.)$ на множестве всех наборов благ. Однако она может не везде совпадать с исходной функцией полезности. Так, если $\boldsymbol{x}$ — вектор, для которого задача (#) имеет решение, но который не реализуется как спрос участника ни при каких ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R (при которых $\boldsymbol{x}$ является допустимым в задаче потребителя), то $u(\boldsymbol{x}) < u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = v(\boldsymbol{p},R)$ для каждого $\boldsymbol{p}$ такого, что $\boldsymbol{px} \leqslant R$. В том числе неравенство $u(\boldsymbol{x}) < v(\boldsymbol{p},R)$ верно и для вектора $\boldsymbol{p}$, являющегося решением задачи (#), т.е. $u(\boldsymbol{x}) < u^*(\boldsymbol{x})$. Таким образом, описанная процедура не всегда позволяет получить исходные значения полезности в точках, которые не реализуется как спрос участника ни при каких ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R.

Хотя мы не всегда можем восстановить функцию полезности правильно, однако полученная функция полезности порождает тот же спрос, что и исходная.

Утверждение 24. Пусть $u(.)$ — функция полезности, а $v(.,.)$ — соответствующая ей непрямая функция полезности и пусть $u^*(.)$ — построена на основе задачи (#) указанным выше способом. Тогда набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$, являющийся решением задачи потребителя с функцией полезности $u(.)$ при ценах $\boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{0}$ и доходе $R > 0$, является решением задачи потребителя с функцией полезности $u^*(.)$.

<u>Доказательство</u>:

Пусть $\hat{\boldsymbol{x}}$ — произвольный потребительский набор, удовлетворяющий бюджетному ограничению при некоторых ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R:

$$\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}} \leqslant R.$$

Рассмотрим задачу (#) с $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}$. Цены $\boldsymbol{p}$ являются допустимыми в этой задаче, а $u^*(\hat{\boldsymbol{x}})$ — значение этой задачии. Поэтому $v(\boldsymbol{p}, R) \geqslant u^*(\hat{\boldsymbol{x}})$.

Поскольку $u^*(\tilde{\boldsymbol{x}}) = v(\boldsymbol{p}, R)$, то $u^*(\tilde{\boldsymbol{x}}) \geqslant u^*(\hat{\boldsymbol{x}})$.

■

Поскольку существует бесконечно много функций полезности, описывающих одни и те же предпочтения, то дифференциальные уравнения, порождаемые тождеством Роя, не позволяют однозначно восстановить непрямую функцию полезности: если эти уравнения имеют хотя бы одно решение, то решений бесконечно много. Чтобы решение было единственным, необходимо наложить дополнительные ограничения на непрямую функцию полезности.

В простом случае, когда известно, что восстанавливаемые предпочтения могут быть представлены квазилинейной функцией полезности, —

$$u(x_1, ..., x_l) = s(x_1, ..., x_{l-1}) + x_l, \text{ —}$$

такая нормировка определяется самим видом функции.

Приведем сначала характеристики функции спроса. Предположим, что $s(x_1, ..., x_{l-1})$ — строго вогнутая дифференцируемая функция, и выбор потребителя при некоторых ценах и доходе содержит все продукты в положительном количестве, т.е. $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \gg \boldsymbol{0}$. Тогда по теореме Куна-Таккера при некотором положительном λ верны соотношения $\dfrac{\partial s}{\partial x_i} = \lambda p_i$ $(i \neq l)$ и $p_l\lambda = 1$. Будем предполагать без потери общности, что $p_l = 1$. Тогда $\lambda = 1$, и

$$\frac{\partial s}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{l-1}) = p_i,\ \ i \neq l.$$

Эти соотношения определяют функцию спроса на все блага, кроме последнего. Отсюда следует, что спрос на эти блага не зависит от дохода:

$$x_i = x_i(p_1, ..., p_{l-1}) = x_i(\boldsymbol{p}_{-l}),\ \ i \neq l.$$

Пользуясь видом функции спроса, получаем, что непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\boldsymbol{p}_{-l}, 1, R) = s(x_1(\boldsymbol{p}_{-l}), ..., x_{l-1}(\boldsymbol{p}_{-l})) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(\boldsymbol{p}_{-l}).$$

При этом $\dfrac{\partial v}{\partial R}(p, R) = 1$, и $\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial p_i}$ не зависит от R. Поэтому, интегрируя $l-1$ уравнений тождества Роя, по $p^1, \dots, p^{l-1}$ соответственно, мы можем получить (с точностью до константы интегрирования) искомую функцию $v(.)$ в любой данной точке. Отметим также, что соответствующие интегралы будут равны изменению так называемого потребительского излишка.

Особенно простой задача восстановления предпочтений оказывается, если известно (дополнительно к квазилинейности), что функция полезности сепарабельна, т.е.

$$u(x_1,\dots,x_l) = \sum_{i=1}^{l-1} s_i(x_i) + x_l.$$

Условия первого порядка для задачи потребителя в предположении, что потребитель при рассматриваемых ценах и доходах предъявляет спрос на все блага ($\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \gg 0$), имеют вид

$$\frac{\partial s_i(x_i(\boldsymbol{p}))}{\partial x_i} = \frac{p_i}{p_l}.$$

Если цена последнего блага равна единице, то соотношение

$$\frac{\partial s_i(x_i(\boldsymbol{p}))}{\partial x_i} = p_i.$$

фактически задает обратную функцию спроса $p_i(x_i)$. При этом спрос на каждое благо зависит только от его цены, т.е. $x_i(\boldsymbol{p}) = x_i(p_i)$.

Непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\boldsymbol{p}, R) = \sum_{i=1}^{l-1} s_i(x_i(p_i)) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(p_i),$$

Из тождества Роя получаем соотношение:

$$x_i(p_i) = -\frac{\partial v}{\partial p_i}(\boldsymbol{p}, R) \Big/ \frac{\partial v}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R) = -\frac{\partial v}{\partial p_i}(\boldsymbol{p}, R) = -\frac{\partial v_i}{\partial p_i}(p_i)\ ,$$

где $v_i(p_i) = s_i(x_i(p_i)) - p_i x_i(p_i)$, и, следовательно,

$$-\int_{p_i}^{+\infty} \frac{\partial v_i}{\partial p_i}(t)dt = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt,$$

Откуда

$$v_i(p_i) - \lim_{p_i \to +\infty} v_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt,$$

или

$$v_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt\ +\ \text{const}.$$

Интеграл в последнем соотношении есть по определению потребительский излишек:

$$\text{CS}_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)\,\text{d}t.$$

Отсюда

$$v(\boldsymbol{p}, R) = \sum_{i=1}^{l-1} v_i(p_i) + R = \sum_{i=1}^{l-1} \text{CS}_i(p_i) + R + \text{const}.$$

Можно восстановить также непосредственно прямую функцию полезности, проинтегрировав уравнения условий первого порядка задачи потребителя

$$\frac{\partial s_i(x_i(p_i))}{\partial x_i} = p_i.$$

Действительно,

$$s_i(x_i) = \int_0^{x_i} p_i(t)dt + s_i(0).$$

Интеграл в этом соотношении является альтернативной формой определения потребительского излишка, поэтому

$$s_i(x_i) = \mathrm{CS}_i(x_i) + s_i(0)$$

и

$$u(x_1,..., x_l) = \sum_{i=1}^{l-1} \mathrm{CS}_i(x_i) + x_l + \mathrm{const}.$$

В общем случае на основе системы функций спроса естественно восстанавливать так называемую денежную полезность $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})$. Введем соответствующие определения.

Определение 22. Денежная полезность $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})$ — это доход, который требуется, чтобы при ценах $\boldsymbol{q}$ потребитель мог бы иметь уровень полезности $u(\boldsymbol{x})$, т.е.

$$\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) = e(\boldsymbol{q}, u(\boldsymbol{x})).$$

Утверждение 25. Денежная полезность $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})$ является функцией полезности, т.е

$$\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) \geqslant \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y}).$$

Доказательство:

По определению $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) = e(\boldsymbol{q}, u(\boldsymbol{x}))$. Поэтому утверждение является следствием возрастания функции расходов по полезности (см. Утверждение **18** (5)).

■

По аналогии с данным понятием вводится так называемая денежная непрямая полезность.

Определение 23. Денежная непрямая полезность $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$ — это доход, который требуется, чтобы при ценах $\boldsymbol{q}$ потребитель мог бы иметь тот же уровень полезности, что и при ценах $\boldsymbol{p}$, располагая доходом R, т.е.

$$\mu(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}, R) = e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p},R)).$$

Утверждение 26. Денежная непрямая полезность $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$ является непрямой функции полезности для денежной функции полезности $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})$.

Доказательство:

По определению денежной непрямой полезности $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) = e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p},R))$. Кроме того, $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) = e(\boldsymbol{q}, u(\boldsymbol{x}))$. Поскольку $v(\boldsymbol{p},R) = u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R))$, то $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)) = \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$.

■

Поскольку $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) = e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p},R))$, то верно соотношение

$$\frac{\partial\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)}{\partial q_i} = \frac{\partial e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p}, R))}{\partial q_i} = h_i(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p},R)) =$$

$$= x_i(\boldsymbol{q}, e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p},R))) = x_i(\boldsymbol{q}, \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)).$$

Мы воспользовались здесь тем, что

$$\frac{\partial e(p,U)}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p},U)$$

и

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, U) \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, U)).$$

Тем самым мы получили систему дифференциальных уравнений относительно непрямой функции полезности $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$:

$$\frac{\partial\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)}{\partial q_i} = x_i(\boldsymbol{q}, \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)).$$

К ней следует добавить граничные условия

$$\mu(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{p}, R) = R.$$

Из теории дифференциальных уравнений в частных производных известно, что эта система имеет (локальное) решение тогда и только тогда, когда система функций спроса такова, что матрица

$$\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{i,j}$$

симметрична. Это условие, как несложно показать, эквивалентно условию симметричности матрицы коэффициентов замены

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R}\, x_j\right)_{i,j}.$$

Если у нас есть некоторая система функций спроса, то мы можем получить решение данных уравнений. Однако, можем ли мы быть уверены в том, что система функций спроса совместима с моделью рационального поведения потребителя, т.е., что существует функция полезности, максимизация которой порождает данную систему функций?

Необходимые условия того, что данная система функций спроса порождена моделью рационального поведения, нам известны:

♦ Система функций спроса $x_i(\boldsymbol{p},R)$ однородна нулевой степени.

♦ Система функций спроса $x_i(\boldsymbol{p},R)$ удовлетворяет закону Вальраса $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R))=R$ (если предпочтения потребителя локально неасыщаемы).

♦ Матрица коэффициентов замены

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R}\, x_j\right)_{i,j}.$$

является симметричной и отрицательно полуопределенной.

Оказывается, что эти условия являются и достаточными, т.е. любая система функций, удовлетворяющая этим условиям, может быть порождена некоторой моделью рационального поведения.

Предположим, что рассматриваемая система функций спроса удовлетворяет этим условиям (мы будем предполагать также дифференцируемость $x_i(\boldsymbol{p},R)$). Рассмотрим, какие свойства функции $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$, являющейся решением системы дифференциальных уравнений,

$$\frac{\partial\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)}{\partial q_i} = x_i(\boldsymbol{q}, \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)) \qquad (\#\#)$$

с граничными условиями

$$\mu(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{p}, R) = R.$$

следуют из этих свойств $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$.

♦ Функция $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ дифференцируема по $\boldsymbol{q}$.

♦ Функция $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ однородна первой степени по $\boldsymbol{q}$ (поскольку производная функции положительно однородна степени n тогда и только тогда, когда сама функция однородна степени $n + 1$).

♦ Функция $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ не убывает по $\boldsymbol{q}$.

♦ Функция $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ вогнута по $\boldsymbol{q}$.

Предположим дополнительно, что решение $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ рассматриваемой системы единственно.

Тогда $\forall \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}'$ верно соотношение

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) = \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \Leftrightarrow \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) = \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}', R).$$

Поскольку $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ непрерывна по $\boldsymbol{q}$, то это гарантирует выполнение $\forall \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}'$ следующего соотношения

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \Leftrightarrow \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}', R).$$

Утверждение 27. Пусть функция $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$ дифференцируема, однородна первой степени, не убывает и вогнута по $\boldsymbol{q}$ и выполнено

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \Leftrightarrow \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}', R),\ \forall \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' \geqslant \boldsymbol{0}.$$

Тогда

(1) $$\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) = \min\nolimits_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{q}\boldsymbol{x},$$

где

$$V(\boldsymbol{p}, R) = \{\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \mid \boldsymbol{q}\boldsymbol{x} \geqslant \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)\ \forall \boldsymbol{q} \geqslant \boldsymbol{0}\}.$$

(2) для произвольных векторов $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}' \gg \boldsymbol{0}$ выполнено

$$V(\boldsymbol{p}, R) \subseteq V(\boldsymbol{p}', R) \quad \text{или} \quad V(\boldsymbol{p}', R) \subseteq V(\boldsymbol{p}, R).$$

Доказательство:

(1) Из свойств функции $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$ и определения множества $V(\boldsymbol{p}, R)$ следует, что $V(\boldsymbol{p}, R)$ непусто, замкнуто и ограничено снизу. Если $\boldsymbol{q} \gg \boldsymbol{0}$ то эти условия гарантируют существование решения задачи $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) = \min_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{q}\boldsymbol{x}$. Из определения $V(\boldsymbol{p}, R)$ следует, что $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) \leqslant \min_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{q}\boldsymbol{x}$. Нам требуется показать, что это соотношение выполняется как равенство. Для этого достаточно показать, что $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) \geqslant \min_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{q}\boldsymbol{x}$. Вогнутость функции $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$ по $\boldsymbol{q}$ влечет, что для любых $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{q}'$ выполнено неравенство:

$\mu(\boldsymbol{q}';\boldsymbol{p},R) \leqslant \mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) + \nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)(\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q})$.

Поскольку $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$ однородна первой степени по $\boldsymbol{q}$ то по формуле Эйлера

$\nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{q} = \mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$,

поэтому для любого $\boldsymbol{q}'$

$\mu(\boldsymbol{q}';\boldsymbol{p},R) \leqslant \nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{q}'$.

В силу того, что $\nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) \geqslant 0$, имеем $\nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) \in V(\boldsymbol{p}, R)$. Отсюда следует, что $\min_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{qx} \leqslant \nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{q} = \mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$. Таким образом, получили требуемое равенство $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) = \min_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{qx}$.

(2) Из определения множеств $V(.)$ следует, что если

$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)\ \forall \boldsymbol{q} \geqslant \boldsymbol{0}$,

то $V(\boldsymbol{p}, R) \subseteq V(\boldsymbol{p}', R)$.

■

Приведенное утверждение позволяет построить предпочтения на множестве всех потребительских наборов, реализуемых как спрос. Нестрогое отношение предпочтения задается по следующему правилу:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \succeq \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R) \Leftrightarrow V(\boldsymbol{p}, R) \subseteq V(\boldsymbol{p}', R).$$

Для произвольной точки $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_+$ построить функцию полезности по полученной из рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (##) функции $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ можно на основе решения задачи (#), которая в данном случае приобретает следующий вид:

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \to \inf_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^l_{++}}$$
$$\boldsymbol{px} \leqslant R. \qquad (\#\#\#)$$

Построенная функция полезности

$$u^*(.) = \inf\{\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \mid \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^l_{++}, \boldsymbol{px} \leqslant R\}$$

будет соответствовать наблюдаемому спросу, на основе которого она получена, что следует из следующего утверждения.

Утверждение 28. Пусть функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ дифференцируема, однородна нулевой степени, удовлетворяет закону Вальраса, матрица коэффициентов замены является симметричной и отрицательно полуопределенной и решение системы (##) единственно, т.е.

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) = \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \Leftrightarrow \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) = \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}', R),\ \forall \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' \gg \boldsymbol{0}.$$

Тогда, если $u^*(.)$ построена на основе задачи (###) при некотором векторе $\boldsymbol{q} \gg \boldsymbol{0}$, то спрос $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)\ \forall \boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{0}$, $R > 0$, является решением задачи потребителя с функцией полезности $u^*(.)$.

Доказательство:

Докажем сначала, что $u^*(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$. Вектор $\boldsymbol{p}$ является допустимым в задаче (###) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Нам остается показать, что для любого вектора $\boldsymbol{p}' \geqslant \boldsymbol{0}$, такого что $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \leqslant R$, выполнено $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$.

Поскольку функция $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ вогнута по $\boldsymbol{q}$, то

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) + (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}')\,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)).$$

При $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$, используя закон Вальраса, имеем, что

$$\boldsymbol{q}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) \qquad \forall\, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}'.$$

Поскольку $R = \mu(\boldsymbol{p}';\ \boldsymbol{p}', R)$, то неравенство $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \leqslant R$ можно переписать в виде $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \leqslant \mu(\boldsymbol{p}';\ \boldsymbol{p}', R)$. С другой стороны, по только что доказанному, $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{p}';\ \boldsymbol{p}, R)$. Поэтому при $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \leqslant R$ имеем $\mu(\boldsymbol{p}';\ \boldsymbol{p}, R) \leqslant \mu(\boldsymbol{p}';\ \boldsymbol{p}', R)$. Поскольку система (##) имеет единственное решение и это решение непрерывно, то отсюда следует, что $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$.

Используя $u^*(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$, несложно показать, что $u^*(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) \geqslant u^*(\boldsymbol{x})$ для любого набора $\boldsymbol{x}$, такого что $\boldsymbol{px} \leqslant R$.

■

Приведенные выше необходимые и достаточные условия интергрируемости позволяют для заданной явно системы функций спроса определить, совместима ли она с моделью рационального поведения потребителя. В ситуации, когда нам доступно лишь конечное число значений функции спроса, полученных на основе наблюдений за фактическим поведения потребителя, проверить совместимость этих наблюдений с моделью рационального поведения позволяет так называемая концепция выявленных предпочтений. Основные ее положения приводятся в следующем параграфе.

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Для каждого потребительского набора $\boldsymbol{x}$ и вектора цен $\boldsymbol{p}$ определим функцию $m(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ как минимальную стоимость потребительского набора, полезность которого не ниже, чем полезность набора $\boldsymbol{x}$, т.е. как значение следующей задачи:

$$\boldsymbol{pz} \to \min_{\boldsymbol{z}}$$
$$u(\boldsymbol{z}) \geqslant u(\boldsymbol{x}).$$

Покажите, что при каждом (положительном) векторе цен $\boldsymbol{p}$ полученная характеристика потребительских наборов представляет собой функцию полезности для соответствующих предпочтений. Дайте графическую интерпретацию процесса ее построения.

2. Пусть функция $u(.)$ — функция полезности, представляющая строго выпуклые и строго монотонные предпочтения, $v(.)$ — соответствующая непрямая функция полезности. Покажите, что если $u^*(.)$ построена на основе задачи (#), то $u^*(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x})$ $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_{++}$.

Указание: Используйте теорему отделимости (см. доказательство утверждения о восстановлении технологического множества по функции прибыли). Множество $L^{++}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}\}$ можно отделить от точки $\boldsymbol{x}$. Поскольку предпочтения строго монотонны, то нормаль $\boldsymbol{p}$ к отделяющей гиперплоскости — вектор с положительными коэффициентами. Тогда $\boldsymbol{p}$ — решение задачи (#).

3. Пусть функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ дифференцируема, однородна первой степени, не убывает и вогнута по $\boldsymbol{p}$. Определим функцию $u(.)$ по формуле

$u(\boldsymbol{x}) = U$, если $\exists\, U, \boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$, такие что $\boldsymbol{x} = \nabla_{\boldsymbol{p}}\, e(\boldsymbol{p}, U)$.

$u(\boldsymbol{x}) = -\infty$ в противном случае

Покажите, что $e(\boldsymbol{p}, U)$ — функция затрат для функции полезности $u(.)$.

4. Пусть функция $u(.)$ — функция полезности, представляющая строго выпуклые и строго монотонные предпочтения, а $e(\boldsymbol{p}, U)$ — соответствующая ей функция затрат, $h(\boldsymbol{p}, U)$ — хиксианская функция спроса, а $x(\boldsymbol{p}, R)$ — маршаллианская функция спроса. Определим множество

$$\mathcal{X} = \{\boldsymbol{x} \mid \exists\, U, \boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}: \boldsymbol{x} = \nabla_{\boldsymbol{p}}\, e(\boldsymbol{p}, U)\},$$

и функцию $u^*(.)$ по формуле

$u(\boldsymbol{x}) = U$, если $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$,

$u(\boldsymbol{x}) = -\infty$ в противном случае.

Пусть $e^*(\boldsymbol{p}, U)$ — функция затрат, $h^*(\boldsymbol{p}, U)$ — хиксианская функция спроса, а $x^*(\boldsymbol{p}, R)$ — маршаллианская функция спроса, соответствующие функции полезности $u^*(.)$.

Покажите, что

$u^*(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$,

$e^*(\boldsymbol{p}, U) = e(\boldsymbol{p}, U)$,

$h^*(\boldsymbol{p}, U) = h(\boldsymbol{p}, U)$,

$x^*(\boldsymbol{p}, R) = x(\boldsymbol{p}, R)$.

5. Пусть функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ дифференцируема, однородна первой степени, не убывает и вогнута по $\boldsymbol{p}$. Тогда

$$e(\boldsymbol{p}, U) = \min_{\boldsymbol{x} \in V(U)} \boldsymbol{p}\boldsymbol{x},$$

где

$$V(U) = \{\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{x} \geqslant e(\boldsymbol{p}, U)\ \forall\, \boldsymbol{p} \geqslant \mathbf{0}\}.$$

6. Пусть $u(\boldsymbol{x})$ — функция полезности. Вычислите для нее непрямую функцию полезности, решите задачу (#) и вычислите "восстановленную" функцию полезности $u^*(\boldsymbol{x})$. Совпадает ли она с исходной функцией полезности? Решите задачу для следующих функций полезности:

а) $u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \ln \boldsymbol{x}_k$; б) $u(\boldsymbol{x}) = \min_k \alpha_k \boldsymbol{x}_k$;

в) $u(\boldsymbol{x}) = \min(2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1)$; г) $u(\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2} + \boldsymbol{x}_3$.

7. Для функций полезности предыдущей задачи найдите денежную функцию полезности и непрямую денежную функцию полезности.

8. Для функций полезности предыдущей задачи найдите спрос, восстановите непрямую денежную функцию полезности, решив уравнения (##) и постройте "восстановленную" функцию полезности $u^*(\boldsymbol{x})$ в соответствии с задачей (###). Правильно ли восстановлены исходные предпочтения? Найдите спрос, соответствующий функции полезности $u^*(\boldsymbol{x})$. Совпадает ли он с исходным спросом?

9. Предположим, что на рынке обращаются три товара и цена третьего товара равна 1. Функции спроса на первый и второй товар имеют вид

$$x_1(\boldsymbol{p}, R) = a_1 + b_1 p_1 + c_1 p_2 + d_1 p_1 p_2,$$
$$x_2(\boldsymbol{p}, R) = a_2 + b_2 p_1 + c_2 p_2 + d_2 p_1 p_2.$$

Найдите функцию спроса на третий товар в предположении выполнения закона Вальраса. Функция полезности какого вида могла бы породить этот спрос? Какие ограничения на параметры гарантируют, что это функция спроса рационального потребителя?

1.7. Концепция выявленных предпочтений

Рассмотрим ряд ситуаций выбора, с которыми сталкивается рассматриваемый потребитель. В i-й ситуации заданы цены $\boldsymbol{p}_i$ и набор $\boldsymbol{x}_i$, который выбрал потребитель при данных ценах.

Предположим, что $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$. Из этого неравенства следует, что набор $\boldsymbol{x}_2$ был доступен в 1-й ситуации выбора (при ценах $\boldsymbol{p}_1$ имеющийся у потребителя доход позволял купить этот набор), но не был выбран. Это означает, что в ситуации, когда выбор потретителя основан на полном и транзитивном отношении предпочтения, $\boldsymbol{x}_2$ не может быть лучше выбранного набора $\boldsymbol{x}_1$. Таким образом, если выбор был рационален, то должно выполнятся отношение $\boldsymbol{x}_1 \succeq \boldsymbol{x}_2$. Из этого отношения и локальной ненасыщаемости предпочтений потребителя следует, что $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1$ не может быть меньше $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$. Если $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2$, то это очевидно. Предположим, что $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_2$. Если бы $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1 < \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$, то нашлась бы окрестность точки $\boldsymbol{x}_1$, все точки которой доступны во 2-й ситуации выбора, а в этой окрестности нашелся бы набор, лучший, чем $\boldsymbol{x}_2$.

Таким образом, при рациональности поведения и локальной ненасыщаемости из $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$ следует, что $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$.

Аналогично устанавливается следующее соотношение: из $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$ следует, что $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$.

Если дополнительно предположить, что выбор потребителя везде однозначен (например, в предположении строгой выпуклости отношения предпочтения) то если $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$, то, применяя аналогичные рассуждения, можно доказать, что из $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$ следует, что $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$.

Определение 24. Говорят, что функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленного предпочтения, если для любой пары $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}_1)$, $(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{x}_2)$ такой что $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_1)$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_2)$, из того, что $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$ следует, что $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$. Другими словами, слабая аксиома постулирует, что неравенства $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2 > \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1$ не могут быть верными одновременно.

Потребительский выбор предствляет частный случай выбора, когда ситуации выбора описываются бюджетными множествами $B(\boldsymbol{p}, R)$, а правила выбора ставят с соответствие $B(\boldsymbol{p}, R)$ выбранный потребителем при данных ценах потребительский набор. Заметим, что слабая аксиома выявленных предпочтений — переформулировка на данный случай аксиомы Хаутеккера.

Определение 25. Говорят, что функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленных предпочтений, если для любой последовательности $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{x}_n$ такой что $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_i)$, из того, что

$$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$$
$$\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2 \geqslant \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_3$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$\boldsymbol{p}_{n-1}\,\boldsymbol{x}_{n-1} \geqslant \boldsymbol{p}_{n-1}\,\boldsymbol{x}_n$$

следует, что $\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_n$.

Утверждение 29.

Если выборы порождены моделью рационального поведения, то выполняются сильная и слабая аксиомы выявленного предпочтения.

Доказательство:

Слабое свойство мы доказали выше. Теперь докажем сильное.

Предположим, что

$$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2,\ \ \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2 \geqslant \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_3,\ \dots,\ \ \boldsymbol{p}_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1} \geqslant \boldsymbol{p}_{n-1}\boldsymbol{x}_n.$$

Тогда $\boldsymbol{x}_{i+1} \succeq \boldsymbol{x}_i\ \forall i$. По транзитивности предпочтений $\boldsymbol{x}_1 \succeq \boldsymbol{x}_n$. Тогда $\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_n$.

■

Аналогично устанавливается следующее

Утверждение 30.

Если выборы порождены моделью рационального поведения с локально ненасыщаемым нестрогим отношением предпочтения, то выполняются сильная и слабая аксиомы выявленного предпочтения в следующей модифицированной форме:

Для любой последовательности $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{p}_n\ \boldsymbol{x}_n$, такой что $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_i)$, если

$$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$$
$$\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2 \geqslant \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_3$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$\boldsymbol{p}_{n-1}\,\boldsymbol{x}_{n-1} \geqslant \boldsymbol{p}_{n-1}\,\boldsymbol{x}_n$$

причем хотя бы одно из этих неравеств строгое, то

$$\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_n.$$

Доказательство:

Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.

■

Таким образом, любая система функций спроса, порожденная моделью рационального поведения, удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения. Оказывается, верно и обратное утверждение: если выборы потребителя удовлетворяют сильной аксиоме выявленных предпочтений, то существует предпочтения, порождающие эти выборы. (Ясно, что такие предпочтения не единственны). Доказательство этого утверждения достаточно громоздко и мы его упускаем.

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Функция спроса рационального потребителя удовлетворяет...
♦ как слабой, так и сильной аксиомам выявленных предпочтений
♦ только слабой аксиоме выявленных предпочтений
♦ сильной аксиоме выявленных предпочтений тогда и только тогда, когда предпочтения гомотетичны

2. Индивидуум при ценах (4, 6) выбирает набор (6, 6), а при ценах (6, 3) он выбирает набор (10, 0). Его поведение:
♦ удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений;
♦ не удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений;
♦ не достаточно информации.

3. Индивидуум при ценах (4, 6) выбирает набор (6, 6), а при ценах (6, 3) он выбирает набор (10, 10). Его поведение:
♦ не согласуется с аксиомой выявленных предпочтений;
♦ невозможно сказать определенно;
♦ согласуется с аксиомой выявленных предпочтений.

4. При ценах (1, 4) выбор потребителя был (2, 3). Этот набор выявленно предпочитается набору
♦ (5, 2)
♦ (8, 1)
♦ (15, 0)

5. Какое из нижеприведенных утверждений неверно
♦индивидуальная функция спроса рационального потребителя всегда удовлетворяет аксиомам выявленного предпочтения
♦агрегированная функция спроса всегда удовлетворяет аксиомам выявленного предпочтения
♦индивидуальная функция спроса рационального потребителя всегда удовлетворяет слабой аксиомой выявленного предпочтения, но не удовлетворяет сильной аксиоме

6. При ценах (2, 1) выбор потребителя был (2, 2). Этот набор выявленно предпочитается набору
♦ (1, 5)
♦ (5, 0)
♦ (0, 5)

7. Совместимы ли с моделью рационального поведения с локально ненасыщаемой функцией полезности следующие наблюдения рыночного поведения потребителя:
$\boldsymbol{x}(10, 10, 10) = (10,10, 10)$; $\boldsymbol{x}(10, 1, 2) = (9, 25, 7.5)$; $\boldsymbol{x}(1, 1, 10) = (15, 5, 9)$

(т.е. спрос при ценах (10, 10, 10) равен соответственно (10, 10, 10) и т.д.).

8. Рациональный потребитель в базовом периоде при ценах $\boldsymbol{p}^b$ выбрал объем потребления $\boldsymbol{x}^b$, а в периоде t при ценах $\boldsymbol{p}^t$ выбрал объем потребления $\boldsymbol{x}^t$. Индексы (физического объема) Пааше и Ласпейреса по определению равны

$$P_{\boldsymbol{q}} = \frac{(\boldsymbol{p}^t, \boldsymbol{x}^t)}{(\boldsymbol{p}^t, \boldsymbol{x}^b)}, \qquad L_{\boldsymbol{q}} = \frac{(\boldsymbol{p}^b, \boldsymbol{x}^t)}{(\boldsymbol{p}^b, \boldsymbol{x}^b)},$$

Какой из наборов $\boldsymbol{x}^t$, $\boldsymbol{x}^b$ лучше для потребителя

(а) если $P_{\boldsymbol{q}} > 1$, (б) если $L_{\boldsymbol{q}} > 1$.

9. Пусть $P_{\boldsymbol{p}}$, $L_{\boldsymbol{p}}$ — индексы (цен) Пааше и Ласпейреса, а M — отношение потребительских расходов в период t к потребительским расходам в базовом периоде:

$$M = \frac{(\boldsymbol{p}^t, \boldsymbol{x}^t)}{(\boldsymbol{p}^b, \boldsymbol{x}^b)},$$

Какой из наборов $\boldsymbol{x}^t$, $\boldsymbol{x}^b$ лучше для потребителя

(а) если $P_{\boldsymbol{q}} > M$, (б) если $L_{\boldsymbol{q}} > M$.

10. Покажите на примере, что функция совокупного спроса, полученная на основе суммирования конечного числа маршаллианских функций спроса, вообще говоря, не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

11. Покажите, что если предпочтения потребителей одинаковы, а представляющая их функция полезности — непрерывная строго вогнутая и положительно однородная первой степени, то функция совокупного спроса удовлетворяет аксиоме выявленного предпочтения.

12. В случае двух товаров спрос задается следующими функциями

$$x_1 = \frac{p_2}{p_3} \qquad x_2 = -\frac{p_1}{p_3} \qquad x_3 = \frac{R}{p_3}$$

а) проверьте что данная система функций спроса удовлетворяет закону Вальраса и однородна нулевой степени по ценам и доходу.

б) покажите, что для данной системы функций спроса не выполняется слабая аксиома выявленных предпочтений

13. Докажите, что если предпочтения потребителя монотонны и строго вогнуты, то его функция спроса удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

1.8. Оценка изменения благосостояния.

Перед экономистами часто стоит задача оценить изменения в благосостоянии потребителей при проведении мероприятий экономической политики. Рассмотрим две ситуации (до проведения мероприятий экономической политики и после). В первой их них потребитель сталкивается с ценами $\boldsymbol{p}^0$ и доходом R^0, во второй — с ценами $\boldsymbol{p}^1$ и доходом R^1. Пусть при ценах $\boldsymbol{p}^0$ и доходе R^0 непрямая функция полезности потребителя равна $v(\boldsymbol{p}^0,R^0)$, а при $(\boldsymbol{p}^1,R^1)$ — $v(\boldsymbol{p}^1,R^1)$. Если $v(\boldsymbol{p}^0,R^0) < v(\boldsymbol{p}^1,R^1)$, то вторая ситуация более благоприятна для потребителя, а если $v(\boldsymbol{p}^0,R^0) > v(\boldsymbol{p}^1,R^1)$, то менее благоприятна.

Вообще говоря, мы можем говорить лишь о направлении изменения благосостояния, а не оценивать его величину. И, тем не менее, при расчетах издержек и выгод мероприятий экономической политики пытаются получить количественные оценки таких изменений. При этом используются введенные выше денежные функции полезности. Опишем процедуры их использования и возникающие здесь проблемы.

Непрямую функцию полезности можно определить на основе любого «базового» вектора цен $\boldsymbol{q}\gg 0$. Оценка изменения благосостояния при этом будет равна

$$\Delta\mu(\boldsymbol{q}) = \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^1,R^1) - \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^0,R^0).$$

Значение $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$, вообще говоря, может быть различным для разных векторов $\boldsymbol{q}$, и поэтому соответствующие оценки изменения благосостояния содержат элемент субъективизма. Исключением являются квазилинейные предпочтения (предпочтения, которые описываются квазилинейной функцией полезности). В этом случае все меры благосостояния эквивалентны с точностью до постоянного множителя, а в случае, когда цена последнего блага равна единице (последнее благо является *numeraire*), они совпадают.

Покажем это, вычислив $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$ для квазилинейной функции полезности

$$u(x_1, ..., x_l) = s(x_1, ..., x_{l-1}) + x_l,$$

со строго вогнутой дифференцируемой функцией $s(.)$ в предположении, что $p_l = 1$. Вспомним, что в этом случае непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\boldsymbol{p}_{-l},1,R) = s(x_1(\boldsymbol{p}_{-l}), ..., x_{l-1}(\boldsymbol{p}_{-l})) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(\boldsymbol{p}_{-l}).$$

Пользуясь соотношениями двойственности получаем, что функция расходов в случае квазилинейных предпочтений имеет вид

$$e(\boldsymbol{p}, U) = U - s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{p}_{-l})) + \boldsymbol{p}_{-l}\,\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{p}_{-l}).$$

По определению непрямой денежной функции полезности

$$\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, R) = e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p}, R)),$$

Поэтому

$$\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, R) = v(\boldsymbol{p}, R) - s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l})) + \boldsymbol{q}_{-l}\,\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l}).$$

По определению $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$ имеем, что

$$\begin{aligned}\Delta\mu(\boldsymbol{q}) &= \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^1,R^1) - \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^0,R^0) = v(\boldsymbol{p}^1,R^1) - s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l})) + \\ &+ \boldsymbol{q}_{-l}\,\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l}) - v(\boldsymbol{p}^0,R^0) + s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l})) - \boldsymbol{q}_{-l}\,\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l}) = \\ &= v(\boldsymbol{p}^1,R^1) - v(\boldsymbol{p}^0,R^0).\end{aligned}$$

В общем случае, когда значение $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$ зависит от выбора $\boldsymbol{q}$, естественными кандидатами на выбор вектора $\boldsymbol{q}$ представляются следующие системы цен — цены в первой ситуации (до изменений) — $\boldsymbol{p}^0$ и цены после изменений — $\boldsymbol{p}^1$. В первом случае получим меру изменения благосостояния, называемую эквивалентной вариацией (EV), а во втором — меру изменения благосостояния, называемую компенсирующей вариации (CV).

Определение 26.

Эквивалентная вариация — это такое изменение дохода, которое позволяет в базовых ценах получить ту же полезность, что и после изменений:

$$v(\boldsymbol{p}^0, R^0 + \mathrm{EV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1)) = v(\boldsymbol{p}^1, R^1).$$

Заметим, что $\mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = e(\boldsymbol{p}^0, v(\boldsymbol{p}^1, R^1))$ — доход, достаточный для того, чтобы при ценах $\boldsymbol{p}^0$ обеспечить данному потребителю такой же уровень полезности, как и в ситуации после изменений (т.е. при ценах ($\boldsymbol{p}^1$) и доходе R^1). Поэтому, если воспользоваться тождеством $v(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p},U)) \equiv U$ можно дать эквивалентной вариации несколько другое определение:

$$\mathrm{EV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = e(\boldsymbol{p}^0, v(\boldsymbol{p}^1, R^1)) - R^0.$$

Таким образом, можно определить эквивалентную вариацию в терминах непрямой функции полезности, измеренной в деньгах при $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^0$:

$$\mathrm{EV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = \mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) - R^0 = \mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) - \mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^0, R^0).$$

Определение 27.

Компенсирующая вариация — это такое изменение дохода, которое позволяет в новых ценах достигнуть уровень полезности старой ситуации:

$$v(\boldsymbol{p}^0, R^0) = v(\boldsymbol{p}^1, R^1 - \mathrm{CV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1)).$$

По определению денежной непрямой функции полезности $\mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^0, R^0) = e(\boldsymbol{p}^1, v(\boldsymbol{p}^0, R^0))$ — доход, достаточный для того, чтобы при ценах $\boldsymbol{p}^1$ обеспечить данному потребителю такой же уровень полезности, как и в ситуации до изменений (т.е. при ценах $\boldsymbol{p}^0$ и доходе R^0). Поэтому компенсирующую вариацию можно выразить в терминах денежной непрямой функции полезности при $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^1$:

$$\mathrm{CV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = R^1 - e(\boldsymbol{p}^1, v(\boldsymbol{p}^0, R^0)) = R^1 - \mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^0, R^0) =$$
$$= \mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^1, R^1) - \mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^0, R^0).$$

Рассмотрим соотношение между этими мерами в простом случае, когда изменяется только цена одного блага (случай, который интересует нас при анализе последствий налогообложения).

$$R^0 = R^1 = R,\ p_1^0 > p_1^1,\ p_2^0 = p_2^1, \ldots p_n^0 = p_n^1.$$

Обозначим $u^0 = v(\boldsymbol{p}^0, R^0)$, $u^1 = v(\boldsymbol{p}^1, R^1)$. Очевидно, что $u^0 \leqslant u^1$.

$$\mathrm{EV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^0) = \mathrm{EV}(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = e(\boldsymbol{p}^0, v(\boldsymbol{p}^1, R^1)) - R = e(\boldsymbol{p}^0, u^1) - R.$$

Аналогично

$$\mathrm{CV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^0) = \mathrm{CV}(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = R^1 - e(\boldsymbol{p}^1, v(\boldsymbol{p}^0, R)) = R - e(\boldsymbol{p}^1, u^0).$$

Поскольку меняется только цена первого блага, не будем в дальнейшем указывать остальные цены и доход в качестве аргументов соответствующих функций.

Следующий рисунок предлагает графическую иллюстрацию для эквивалентной и компенсирующей вариаций в случае двух благ, когда цена второго блага равна единице ($p_2^0 = p_2^1 = 1$).

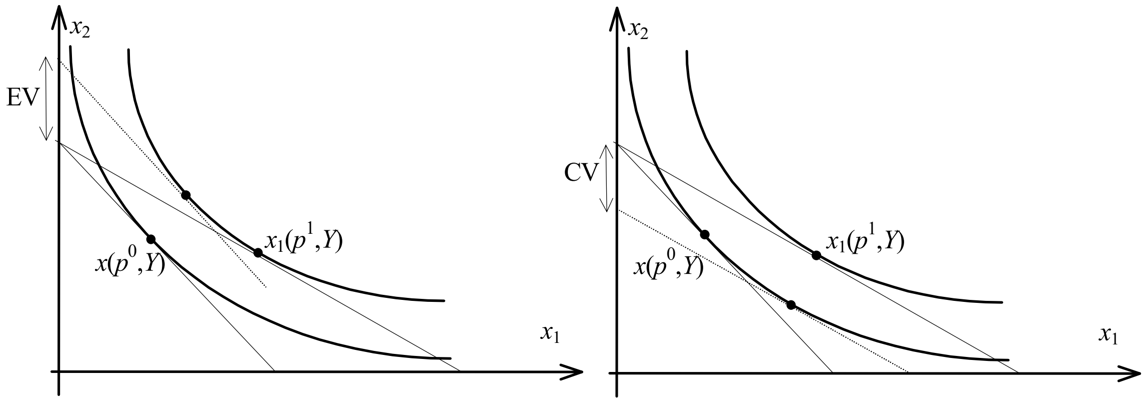


Рисунок 6. Эквивалентная и компенсирующая вариация при $R_0 = R_1 = R$, $p_1^0 > p_1^1$, $p_2^0 = p_2^1 = 1$

Поскольку $\dfrac{\partial e}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},\ u^1) = h_i(\boldsymbol{p},\ u^1)$ (лемма Шепарда для теории потребления), мы можем записать:

$$\frac{\partial \mathrm{EV}}{\partial p_1^0}(p_1, p_1^1) = h_1(p_1, u^1), \qquad \frac{\partial \mathrm{CV}}{\partial p_1^1}(p_1^0, p_1) = -\, h_1(p_1, u^0).$$

Проинтегрируем эти равенства от p_1^0 до p_1^1:

$$\int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, u^1)dt = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial \mathrm{EV}}{\partial p_1^0}(t, p_1^1)dt = \mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1) - \mathrm{EV}(p_1^1, p_1^1) = \mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1),$$

$$\int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, u^0)dt = -\int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial \mathrm{CV}}{\partial p_1^1}(\,p_1^0, t)dt = \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1) - \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^0) = \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1).$$

Таким образом,

$$\mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, u^1)dt, \qquad \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, u^0)dt.$$

Как известно, изменение потребительского излишка вычисляется по формуле

$$\Delta\mathrm{CS}(p_1^0, p_1^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t)dt.$$

В данном случае все три величины положительны:

$$\mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1)>0, \qquad \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1)>0, \qquad \Delta\mathrm{CS}(p_1^0, p_1^1)>0.$$

Если эффект дохода неотрицателен (рассматриваемое благо — нормальное), то

$$h_1(p_1, u^0) \leqslant x_1\,(p_1) \leqslant\ h_1(p_1, u^1) \text{ при } p_1^1 \leqslant p_1 \leqslant p_1^0.$$

Эти неравенства (в случае двух благ) иллюстрируется следующим рисунком.

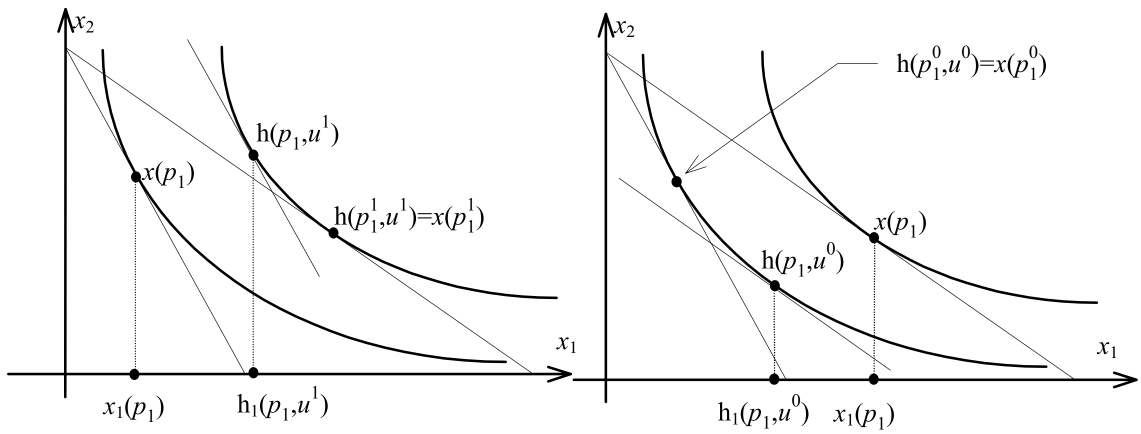


Рисунок 7

Докажем эти неравенства формально. Положительность эффекта дохода означает, что при увеличении дохода спрос на благо увеличивается ($\dfrac{\partial x_1}{\partial R} > 0$).

В разложении Слуцкого

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1, u^0) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1, e(p_1, u^0)) + x_1(p_1, e(p_1, u^0))\,\frac{\partial x_1}{\partial R}(p_1, e(p_1, u^0))$$

в этом случае $x_1(p_1, e(p_1, u^0))\,\dfrac{\partial x_1}{\partial R}(p_1, e(p_1, u^0)) > 0$. Поэтому

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1, u^0) > \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1, e(p_1, u^0)) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1),$$

и

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1, u^1) > \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1, e(p_1, u^1)) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1, R) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1).$$

Проинтегрируем эти неравенства. Неравенство сохраняется, если нижний предел интегрирования меньше верхнего.

Первое неравенство интегрируем от p_1 до p_1^0 при $p_1^0 > p_1$:

$$h_1(p_1^0, u^0) - h_1(p_1, u^0) = \int_{p_1}^{p_1^0} \frac{\partial h_1}{\partial p_1}(t, u^0)dt > \int_{p_1}^{p_1^0} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(t)dt = x_1(p_1^0) - x_1(p_1),$$

Поскольку $h_1(p_1^0, u^0) = x_1(p_1^0)$, то $h_1(p_1, u^0) < x_1(p_1)$.

Второе неравенство интегрируем от p_1^1 до p_1 при $p_1 > p_1^1$:

$$h_1(p_1, u^1) - h_1(p_1^1, u^1) = \int_{p_1^1}^{p_1} \frac{\partial h_1}{\partial p_1}(t, u^1)dt > \int_{p_1^1}^{p_1} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(t)dt = x_1(p_1) - x_1(p_1^1),$$

Поскольку $h_1(p_1^1, u^1) = x_1(p_1^1)$, то $x_1(p_1) < h_1(p_1, u^1)$.

Отсюда получим требуемое неравенство $h_1(p_1, u^0) \leqslant x_1(p_1) \leqslant h_1(p_1, u^1)$. Неравенство везде строгое, кроме двух крайних точек.

Интегрируя это неравенство от p_1^1 до p_1^0, получаем, что имеет место соотношение

$$\mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1) < \Delta\mathrm{CS}(p_1^0, p_1^1) < \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1).$$

Следующий рисунок иллюстрирует это соотношение.

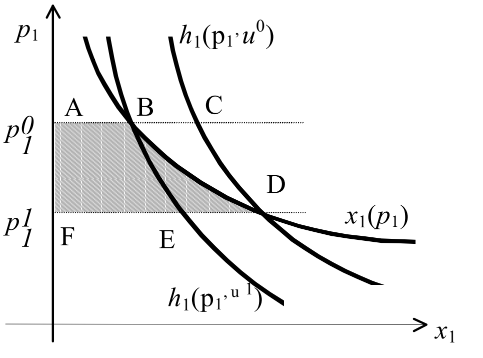


Рисунок 8. Связь между потребительским излишком и эквивалентной и компенсирующей вариацией

Здесь $\mathrm{CV} = S(ACDF)$,

$\Delta\mathrm{CS} = S(ABDF)$ (заштрихованная область),

$\mathrm{EV} = S(ABEF)$.

Предложенная диаграмма позволяет проиллюстрировать ситуацию с квазилинейными предпочтениями, когда компенсирующая вариация совпадает с эквивалентной. В этом случае отсутствует эффект дохода отсутствует ($\frac{\partial x_1}{\partial R} = 0$). Тогда из уравнения Слуцкого получаем, что

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u^0) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u^1)$$

и следовательно,

$$\mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1) = \Delta\mathrm{CS}(p_1^0, p_1^1) = \mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1).$$

Таким образом, все три кривые спроса, изображенные на диаграмме, совпадают; следовательно, совпадают и три меры благосостояния.

Вообще говоря, полезности разных потребителей не сравнимы друг с другом, и их бессмысленно складывать. Однако на основе денежных мер изменения благосостояния можно получать некоторые оценки мероприятий экономической политики.

Предположим, что существуют n потребителей с функциями полезности $u_i(\boldsymbol{x}_i)$ и доходами R_i. Пусть цены изменились с $\boldsymbol{p}^0$ до $\boldsymbol{p}^1$. Пусть, кроме того, в результате этого изменения цен суммарная величина компенсирующей вариации положительна, т.е.

$$\textstyle\sum_i \mathrm{CV}_i(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R_i) > 0.$$

Покажем, что существует такое перераспределение доходов $\{R_i'\}$ ($\sum_i R_i' \leqslant \sum_i R_i$), что

$$v_i(\boldsymbol{p}^1, R_i') > v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i)\ \forall i,$$

то есть возможно компенсировать изменение цен каждому потребителю.

По определению компенсирующей вариации имеем, что

$$\mathrm{CV}_A = \textstyle\sum_i \mathrm{CV}_i(\boldsymbol{p}^0, R_i, \boldsymbol{p}^1, R_i) = \sum_i (R_i - e_i(\boldsymbol{p}^1, v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i))) > 0$$

Мы можем выбрать R_i' так, что $R_i' > e_i(\boldsymbol{p}^1, v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i))$ (достаточно взять $R_i' = e_i(\boldsymbol{p}^1, v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i)) + \mathrm{CV_A}/ n$). Покажем, что в этом случае $v_i(\boldsymbol{p}^1, R_i') > v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i)$.

Воспользовавшись возрастанием непрямой функции полезности по доходу и свойством двойственности между $v_i(.,.)$ и $e_i(.,.)$, получим

$$v_i(\boldsymbol{p}^1, R_i') > v_i(\boldsymbol{p}^1, e_i(\boldsymbol{p}^1, v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i))) = v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i).$$

Это можно интерпретировать следующим образом: мероприятие экономической политики, характеризующееся положительной суммарной компенсирующей вариацией, может привести к росту полезности всех затронутых потребителей, если дополнить его соответствующим перераспределением дохода. Однако следует отметить, что данная интерпретация предполагает, что такое перераспределение доходов не вызовет изменения цен. В рамках концепции общего равновесия приведенные рассуждения оказываются некорректными.

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Какое из нижеприведенных выражений верно
- ♦ $\mathrm{CV} = e(\boldsymbol{p}_0, u^1) - R$
- ♦ $\mathrm{EV} = e(\boldsymbol{p}_0, u^1) - R$
- ♦ $\mathrm{CS} = e(\boldsymbol{p}_0, u^1) - R$

2. Какое из нижеприведенных выражений верно
- ♦ $\mathrm{EV} = R - e(\boldsymbol{p}_1, u^0)$
- ♦ $\mathrm{CV} = R - e(\boldsymbol{p}_1, u^0)$
- ♦ $\mathrm{CS} = R - e(\boldsymbol{p}_1, u^0)$

3. Какое из нижеприведенных выражений является определением эквивалентной вариации
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1 + \mathrm{EV}, R_1) = \nu(\boldsymbol{p}_2, R_1)$
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1) = \nu(\boldsymbol{p}_2, R_1 + \mathrm{EV})$
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1 - \mathrm{EV}) = \nu(\boldsymbol{p}_2, R_1)$

4. Какое из нижеприведенных выражений является определением компенсирующей вариации
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1) = \nu(\boldsymbol{p}_2, R_1 + \mathrm{CV})$
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1 - \mathrm{CV}) = \nu(\boldsymbol{p}_2, R_1 + \mathrm{EV})$
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1 - \mathrm{CV}, R_1) = \nu(\boldsymbol{p}_2 + \mathrm{CV}, R_1)$

5. Пусть цена одного из товаров возросла, в то время как цены остальных товаров остались неизменными. Если этот товар не является малоценным, то
- ♦ $\mathrm{CV} \leqslant \mathrm{CS} \leqslant \mathrm{EV}$
- ♦ $\mathrm{EV} \leqslant \mathrm{CS} \leqslant \mathrm{CV}$
- ♦ $\mathrm{CV} = \mathrm{CS} = \mathrm{EV}$

6. Пусть цена одного из товаров возросла, в то время как цены остальных товаров остались неизменными. Если этот товар является малоценным, то
- ♦ $CV \leqslant CS \leqslant EV$
- ♦ $EV \leqslant CS \leqslant CV$
- ♦ $CV = CS = EV$

7. Пусть цена одного из товаров возросла, в то время как цены остальных товаров остались неизменными. Если кроме того отсутствует эффект дохода, то
- ♦ $CV \leqslant CS \leqslant EV$
- ♦ $EV \leqslant CS \leqslant CV$
- ♦ $CV = CS = EV$

8. Пусть цена одного из товаров возросла, в то время как цены остальных товаров остались неизменными. Если кроме того функция полезности квазилинейна и этот товар входит в нее нелинейно, то
- ♦ $CV \leqslant CS \leqslant EV$
- ♦ $EV \leqslant CS \leqslant CV$
- ♦ $CV = CS = EV$

9. В каком случае при изменении цены только одного блага можно гарантировать, что эквивалентная вариация совпадает с компенсирующей
- ♦ При квазилинейных предпочтениях
- ♦ Если функция полезности выпукла
- ♦ Если блага комплементарные

10. В каком случае при изменении цены только одного блага можно гарантировать, что эквивалентная вариация совпадает с потребительским излишком
- ♦ При квазилинейных предпочтениях
- ♦ Если функция полезности выпукла
- ♦ Если функция полезности вогнута

11. В каком случае при изменении цены только одного блага можно гарантировать, что компенсирующая вариация совпадает с потребительским излишком
- ♦ При квазилинейных предпочтениях
- ♦ Если функция полезности линейна (совершенно заменимые блага)
- ♦ Если блага комплементарные

12. Что вы можете сказать о соотношении эквивалентной и компенсирующей вариаций при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?
- ♦ Эквивалентная вариация больше с компенсирующей
- ♦ Эквивалентная вариация меньше с компенсирующей
- ♦ Эквивалентная вариация совпадает с компенсирующей

13. Что вы можете сказать о соотношении эквивалентной вариации и потребительского излишка при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?

♦ Эквивалентная вариация совпадает с потребительским излишком

♦ Эквивалентная вариация больше потребительского излишка

♦ Эквивалентная вариация меньше потребительского излишка

14. Пусть функция спроса на благо линейна и зависит только от его цены и имеет вид $D(p)=20-2p$. Известно, что цена на него повышается с 2 до 3 денежных единиц, тогда потребительский излишек равен

♦ –15

♦ 15

♦ 0

15. Что вы можете сказать о соотношении компенсирующей вариации и потребительского излишка при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?

♦ Компенсирующая вариация совпадает с потребительским излишком

♦ Компенсирующая вариация больше потребительского излишка

♦ Компенсирующая вариация меньше потребительского излишка

16. В каком случае при изменении цены одного блага можно гарантировать, что компенсирующая вариация совпадает с потребительским излишком?

17. Что вы можете сказать о соотношении эквивалентной и компенсирующей вариаций при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?

18. Что вы можете сказать о соотношении эквивалентной вариации и потребительского излишка при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?

19. Что вы можете сказать о соотношении компенсирующей вариации и потребительского излишка при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?

20. Постройте пример, в котором потребительский излишек не является корректной мерой изменения благосостояния при изменении цен. (Подсказка: рассмотрите случай, когда изменяются цены сразу нескольких благ.)

21. Функция полезности Петрова $U(x) = \min\{x, y\}$. Его доход – 150 д.е., цена первого и второго блага – 1 д.е. Его шефы предлагает ему работу без повышения заработной платы в филиале фирмы в другом городе, где цена первого блага такая же, а цены второго в два раза выше. Петров еще в университете познакомился с поняти-

ем компенсирующей и эквивалентной вариации. Оценив предложение, он ответил, что в принципе он не против, но переезд для него означал бы потерю в доходе в А рублей. Но он готов принять предложение, если его зарплата возрастет на В рублей. Чему равно А и В?

22. Функция полезности Петрова $U(x) = xy$. Его доход — 100 д.е., цена первого и второго блага — 1 д.е. Его шефы предлагает ему работу без повышения заработной платы в филиале фирмы в другом городе, где цена первого блага такая же, а цены второго в два раза выше. Петров еще в университете познакомился с понятием компенсирующей и эквивалентной вариации. Оценив предложение, он ответил, что в принципе он не против, но переезд для него означал бы потерю в доходе в А рублей. Но он готов принять предложение, если его зарплата возрастет на В рублей. Чему равно А и В?

23. Покажите, что чистые потери от количественного налога на благо измеряется величиной – EV – T, где EV — эквивалентная вариация, связанная с соответствующим увеличением цены блага, а T — поступление от налога.

24. Предположим, что цена на все блага, кроме первого, постоянна. Покажите, что если эластичность маршалианского спроса по доходу на первое благо постоянна, то компенсирующая вариация является функций этой эластичности, дохода и потребительного излишка следующего вида:

$$\mathrm{CV} = R^1\left[1 + \frac{1-\eta}{R^1}\Delta\mathrm{CS}\right]^{\frac{1}{1-\eta}} - R^1$$

где $\Delta\mathrm{CS} = \int\limits_{p_1^1}^{p_1^2} x_1(\boldsymbol{p},R^1)\,\mathrm{d}p_1$ — изменение потребительского излишка.

25. Покажите, что если непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\boldsymbol{p},R) = a(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p})R,$$

то компенсирующая вариация вычисляется по так называемой формуле Сида:

$$\mathrm{CV} = \int\limits_{p^1}^{p^2} e^{-\int_{p2}^{p}\frac{\partial x}{\partial R}(p',R^1)\mathrm{d}p'} x(\boldsymbol{p},R^1)\,\mathrm{d}p.$$

Если к тому же эластичность по доходу η постоянна, то формула Сида имеет вид:

$$\mathrm{CV} = \frac{R^1}{\eta}\left[e^{\frac{\eta}{R^1}\Delta\mathrm{CS}} - 1\right].$$

С использованием этой формулы, докажите, что компенсирующая вариация и потребительский излишек равны в случае квазилинейных предпочтений.

26. Предположим, что первое благо доступно лишь в дискретных количествах, а второе благо — деньги (используемые на приобретение других благ), и функция полезности квазилинейна:

$$u(\boldsymbol{x}) = v(x^1) + x^2.$$

Пусть, далее, r^i – резервная цена приобретения i-ой единицы первого блага и определяется соотношением

$$u(i–1, x^2 – (i–1)r^i) = u(i, x^2 – ir^i).$$

(a) Покажите, что если потребитель приобретает n единиц первого блага, то цена p^1 на него удовлетворяет соотношению:

$$r_n \geqslant p^1 \geqslant r_{n–1}.$$

При каких условиях верно и обратное утверждение?

(в) Покажите, что если $v(0) = 0$, то $v(n) = \sum_i r_i$, а потребительский излишек

$$\text{CS} = v(n) + R – p^1 n$$

совпадает с “чистой” выгодой от приобретения первого блага

(c) Покажите, что потребительский излишек совпадает с суммой компенсации, при которой потребитель готов полностью отказаться от потребления первого блага, (увеличив тем самым потребление второго блага на величину компенсации).

27. Пусть предпочтения представимы функцией полезности Кобба-Дугласа. Сформулируйте определение компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка непосредственно в терминах функции спроса и функции полезности и вычислите на этой основе их величины при $l = 2$, $R^0 = R^1 = 100$, $p^0 = (1,1)$, $p^1 = (2,1)$.

28. В каком случае при изменении цены только одного блага можно гарантировать, что эквивалентная вариация совпадает с компенсирующей?

29. В каком случае при изменении цены только одного блага можно гарантировать, что эквивалентная вариация совпадает с потребительским излишком?

30. Сформулируйте определение компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка непосредственно в терминах функции спроса и функции полезности и вычислите на этой основе их величины при ($l = 2$, $R^0 = R^1 = 100$, $p^0 = (1,1)$, $p^1 = (2,1)$), когда...
(a) предпочтения представимы квазилинейной функцией полезности;
(b) блага абсолютно заменимы;
(c) блага комплементарны.

31. В условиях упражнения 30 проделайте аналогичные вычисления для случая, когда цена на первое благо падает ($l = 2$, $R^0 = R^1 = 100$, $p^0 = (2,1)$, $p^1 = (1,1)$).
Сравните результаты вычислений этого и предыдущего упражнений и объясните различия.

32. Проиллюстрируйте на графике при условиях $l = 2$, $R^0 = R^1 = \text{const}$, $p_2 = \text{const}$ поведение кривых спроса (на первое благо) Хикса и Маршалла, и укажите соответ-

ствующие фигуры, площади которых измеряют компенсирующую, эквивалентную вариацию и потребительский излишек когда

(а) предпочтения представимы функцией полезности Кобба-Дугласа;
(а) предпочтения представимы квазилинейной функцией полезности;
(а) блага вполне заменимы;
(а) блага комплементарны
в случае (I) падения и (II) роста цены первого блага.

33. Пусть $l = 2$, $p_2 = \text{const}$. Для заданной на плоскости ($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{p}$) системы кривых спроса Хикса на первое благо изобразите

(а) возможное положение кривых спроса Маршалла на это благо;
(в) соответствующие компенсирующую, эквивалентную вариацию и потребительский излишек при (I) падении и (II) росте цены первого блага.
(с) Каковы соотношения между величинами компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка в разных ситуациях, различающихся типом благ (нормальное-малоценное благо) и характером изменения цен (падение-рост).