

Экзамен по микроэкономике для студентов 5 курса

(1998 год)

Первый вариант

1. Покажите, что функция прибыли сепарабельна тогда и только тогда, когда сепарабельна функция спроса.

2. Является ли функция $c(y, w) = y(w_1 - (w_1 w_2)^{1/2} + w_2)$ функцией издержек для некоторой технологии.

Если да, то какой?

3. Рассмотрим мир с двумя потребителями, двумя состояниями и двумя (физическими) благами, начальные запасы которых в первом состоянии мира у первого потребителя, а во втором — у второго. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана-Моргенштерна следующего вида

$$u_i(x_i) = \sum_j \pi_i^j u_i(x_i^j)$$

с элементарной функцией полезности $u_i(x_i^j) = \ln x_i^j$. Предположим также, что оценки вероятностей соответствующих состояний природы у потребителей совпадают т.е. $\pi_i^j = \pi_k^j, i, k = 1, \dots, n$. Какими в данном случае будут:

(а) равновесия Эрроу-Дебре

(в) равновесия Раднера в случае, когда существует полная система рынков условно случайных благ на основе одного из двух рассматриваемых благ

(с) равновесия Раднера в случае, когда не существует рынков условно случайных благ.

(d) Парето-оптимальные состояния?

4. Рассмотрим модель с начальными запасами, которые не зависят от состояний природы, строго положительны, а предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана-Моргенштерна (со строго вогнутой элементарной функцией полезности) следующего вида

$$u_i(x_i) = \sum_j \pi_i^j u_i(x_i^j)$$

Предположим также, что оценки вероятностей соответствующих состояний природы у потребителей совпадают т.е. $\pi_i^j = \pi_k^j, i, k = 1, \dots, n$.

(а) Какими будут Парето-оптимальные состояния в этой модели обмена?

(в) Покажите, что равновесие Эрроу-Дебре в данной модели можно реализовать как равновесие Раднера даже в том случае, когда не существует рынков условно случайных благ.

(с) Покажите, что, вообще говоря, не все равновесия Раднера в этой модели Парето-оптимальны, если не существуют рынки условно случайных благ.

5. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли выпуклость предпочтений существование равнове-

сия? Аргументируйте свой ответ.

6. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей строго выпуклы, а начальные запасы принадлежат границе Парето. Покажите, что любые равновесия в этой модели (если равновесия существуют) могут различаться только векторами равновесных цен, т.е. если $(p, x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $(p', x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$, то $x_i = x'_i, i = 1, \dots, m$. Покажите, что условие строгой выпуклости необходимо для справедливости утверждения. Какие дополнительные условия гарантируют:

- единственность равновесия (если оно существует);
- существование равновесия?

7. Покажите, что в модели обмена (с m потребителями) и совпадающими и строго выпуклыми предпочтениями потребителей эгалитарное распределение

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \omega_i.$$

принадлежит границе Парето. При каких дополнительных предположениях относительно параметров модели и каких ценах его можно реализовать как равновесие?

8. В модели найма контракт называется оптимальным первого порядка, если он обеспечивает собственнику максимальный уровень полезности среди достижимых без учета ограничений участия

Покажите, что в модели найма вообще говоря не существует оптимального контракта первого ранга. Однако если менеджер — нейтрален по отношению к риску, то любой оптимальный контракт является оптимальным первого ранга. Приведите пример такого контракта.

9. Покажите, что в модели найма (с конечным числом действий и исходов). оплата менеджера (в соответствие с оптимальным контрактом) вообще говоря не является монотонно возрастающей функцией от исхода.

10. Частичная информация о поведении потребителя (в экономике с двумя благами) представлена в следующей таблице.

Наблюдение	Цена первого блага	Цена второго блага	Объем покупок первого блага	Объем покупок второго блага
1	10	10	10	10
2	10	8	12	?

При каких объемах покупок первого блага

(а) это поведение не совместимо с моделью рационального поведения (максимизации полезности при бюджетном ограничении) в предположении, что предпочтения локально ненасыщаемы и строго выпуклы?

(в) потребительский набор при первом наблюдении предпочитается потребителю набору при втором?

(с) потребительский набор при втором наблюдении предпочитается потребителю набору при первом?

11. Покажите, что если функция (отображение) спроса $x(p, Y)$ удовлетворяет

закону Вальраса и слабой аксиоме выявленных предпочтений, то $x(p, Y)$ положительно однородна первой степени.

12. Пусть прибыль каждого из двух производителей зависит не только от объема использованного им ресурса, но и от объема ресурса, использованного другим, т.е..

$$p_1(a, b) = a^{1/3} b^{1/3} - a,$$

$$p_2(a, b) = a^{1/3} b^{1/3} - b,$$

Предположим также, что рынки ресурсов и производимых продуктов конкурентные.

Каким тогда будут

- оптимальные объемы использования ресурсов;

- равновесные объемы?

Какие известные вам меры могут преодолеть фиаско рынка в данном случае?

Аргументируйте свой ответ, приводя соответствующие выкладки.

Второй вариант

1. Восстановите прямую функцию полезности потребителя на основе его не прямой функции полезности

$$v(p_1, \dots, p_n, Y) = \ln Y - \sum_i a_i \ln p_i.$$

2. Вычислите функцию прибыли и функцию издержек для технологии, определяемой производственной функцией Кобба-Дугласа

$$f(\mathbf{x}) = \prod x_i^{\alpha_i}$$

и прямым вычислением покажите, что в данном случае выполняется лемма Шепарда и лемма Хотеллинга.

3. Покажите, что функция $\pi(\mathbf{p})$ является функцией прибыли некоторой технологии тогда и только тогда, когда она выпуклая и положительно однородная первой степени.

4. Покажите, что квазилинейной функции полезности соответствует не прямая функция полезности, которая имеет форму Гормана

$$v(\mathbf{p}, Y) = a(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})Y$$

и является выпуклой функцией цен.

5. Покажите, что если в модели обмена не прямые функции полезности потребителей квазилинейны то равновесие, если существует, единственно.

6. Покажите, что в модели обмена с двумя товарами и двумя потребителями с функциями полезности

$$u^1(\mathbf{x}^1) = x_1^1 + x_2^1$$

$$u^2(\mathbf{x}^2) = x_1^2$$

и начальными запасами $\omega^1 = (0, 1)$ и $\omega^2 = (1, 0)$ не существует равновесия. Какие изменения в условиях задачи (параметрах модели) будут гарантировать существование равновесия?

7. Рассмотрим модель обмена с одним благом, двумя потребителями, предпочтения которых описываются следующими функцией полезности Неймана-

Моргенштерна с вогнутой элементарной функцией полезности

$$u_i(x_i) = \sum_j \pi_i^j u_i(x_i^j)$$

а начальные запасы условно случайных благ одинаковы у обоих потребителей и строго положительны. Каким будет равновесие, если один из потребителей рискофоб а другой нейтрален по отношению к риску,

(а) случае если оценки вероятностей соответствующих состояний природы у обоих потребителей совпадают т.е.

$$\pi_1^j = \pi_2^j.$$

(в) эти оценки различаются

(с) каким будет равновесие в ситуации (а) и (в), если оба потребителя нейтральны по отношению к риску.

8. Рассмотрим модель с начальными запасами, которые не зависят от состояний природы, строго положительны, а предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана-Моргенштерна со строго вогнутой элементарной функцией полезности следующего вида

$$u_i(x_i) = \sum_j \pi_i^j u_i(x_i^j)$$

9. Предположим также, что оценки вероятностей соответствующих состояний

природы у потребителей совпадают т.е.

$$\pi_i^j = \pi_k^j, i, k = 1, \dots, n.$$

(а) Какими будут в данном случае Парето-оптимальные состояния?

(б) Покажите, что в данном случае, равновесие Эрроу-Дебре будем и равновесием Раднера даже и при отсутствии рынков условно-случайных благ.

(в) Покажите, что если рынков условно-случайных благ нет, то в данном случае могут существовать равновесия Раднера, которые не являются равновесиями Эрроу-Дебре.

10. Какое соотношение между потребительским излишком, компенсирующей и эквивалентной вариацией при изменении только одной цены?

11. Покажите, что если отношение предпочтения ассиметрично и отрицательно транзитивно, то оно ациклично.

12. Покажите, что если функция выбора на множестве альтернатив определяется ассиметричным и отрицательно транзитивным отношением предпочтения, то она удовлетворяет аксиоме Хаутеккера (выявленных предпочтений). Верно ли обратное утверждение? Приведите соответствующие контрпримеры.

13. Предположим, что сообщество любителей быстрой езды состоит из двух автомобилистов. У быстрой езды есть, однако, обратная сторона — с увеличением скорости увеличивается риск аварии. Пусть $p(x^1, x^2)$ вероятность аварии, если скорости первого и второго автомобиля составляют, соответственно, x^1 и x^2 . Пусть функция полезности автомобилиста i имеет вид

$$u_i(x^1, x^2) = v(x^i) + p(x^1, x^2)c^i$$

где c^i — его издержки, связанные с аварией. Каковы при этом издержки каждого автомобилиста (включающие и штраф).

Покажите, что каждый автомобилист заинтересован ехать слишком быстро (с общественной точки зрения).

Каким должен быть штраф t^i в случае аварии, чтобы интернизировать экстерналии? Каковы при этом издержки каждого автомобилиста (включающие и штраф)? Как следует интернировать экстерналии в случае, если полезность автомобилиста будет равна

$$v(x^i)$$

если авария не произойдет и

$$-p(x^1, x^2)c^i$$

если произойдет?

14. Для модели найма (с двумя возможными действиями) покажите, что

(а) Если собственник нейтрален по отношению к риску, а менеджер — рискофоб, причем действия менеджера наблюдаемы собственником, то в интересах собственника полностью застраховать менеджера, связав оплату его услуг с его действиями. Другими словами, оплата услуг менеджера не будет зависеть от дохода предприятия. Какой в таком случае будет схема стимулирования (оплата услуг менеджера)?

(б) Если собственник нейтрален по отношению к риску, а менеджер — рискофоб, причем интересы собственника и менеджера не совпадают (для действия b , предпочитаемого собственником, выполняется соотношение $c(b) > c(a)$), то оба ограничения будут существенными, т.е. оплата услуг менеджера будет зависеть от дохода предприятия. Какой в таком случае будет схема стимулирования (оплата услуг менеджера)?

(в) Как будет выглядеть оптимальный контракт найма, если $c(b) \leq c(a)$?

15. Предположим, что в аукционе принимает участие n ($n > 2$) покупателей и i -ый участник аукциона оценивает выставленный на аукцион товар в $v(i)$ рублей

(а) Какая цена будет заплачена на этот товар и какой участник аукциона его приобретет, если аукцион английский? (На английском аукционе ставки повышаются на 1 д.е. начиная с минимальной цены, объявленной аукционщиком, а выставленный на аукцион товар продается тому, кто в конечном счете назовет наибольшую цену).

(б) Какая цена будет выплачена за товар и кто его приобретет, если аукцион американский, а его победитель — покупатель товара — заплатит цену за приобретенный товар, равную максимальной среди названных остальными участниками аукциона цен? (На американском аукционе предлагаемая i -ый участником цена подается аукционщику в запечатанном конверте и не известна другим участникам аукциона до момента объявления всех предложенных цен).

16. Охарактеризуйте соотношения между кривыми средних, переменных средних и предельных издержек.

Что из нижеследующего верно:

- (1) Средние постоянные издержки при росте выпуска не возрастают
- (2) Средние совокупные издержки всегда не ниже средних переменных издержек.
- (3) Если предельные издержки возрастают, то средние не убывают.