1. Общее равновесие

Теоремы существования общего равновесия

В этом параграфе мы проиллюстрируем ряд стандартных способов доказательства существования равновесия в двух типах экономик: экономиках обмена и экономиках Эрроу-Дебре.

Рассмотрим вначале экономику обмена. Пусть имеются l благ и n потребителей, каждый из которых характеризуется отношением предпочтения $\succeq_i$ на множестве X_i[1] (в дальнейшем всюду предполагается, что отношение предпочтения является полным, транзитивным и непрерывным, так что, в соответствие с теоремой Дебре, существует представляющая данное отношение предпочтения непрерывная функция полезности $u_i(\boldsymbol{x}_i)$, которая зависит от потребления этого участника), а также собственностью (начальными запасами) $\boldsymbol{\omega}_i$. Пусть, как и прежде, $\boldsymbol{p}$ — вектор цен на товары. Предполагается, как и ранее, что потребитель максимизирует свою полезность на бюджетном множестве, которое определяется его собственностью $\boldsymbol{\omega}_i$. Таким образом, задачу отдельного потребителя можно записать в виде:

$$u_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max_{\boldsymbol{x}_i}$$
$$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x}_i \leqslant \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_i$$
$$\boldsymbol{x}_i \in X_i.$$

Общее ограничение для экономики состоит в том, что выполнены материальные (полу-) балансы, т.е. суммарное потребление не может превышать начальных запасов благ:

$$\sum_i x_i^k \leqslant \sum_i \omega_i^k$$

Определение 1.
Под экономикой обмена мы будем понимать следующее множество

$$\mathcal{E} = \{(X_i, u_i(.))_{i\in I;}\ (\boldsymbol{\omega}_i)_{i\in I}\}.$$

Введем теперь определение равновесия для экономики обмена.

Определение 2.
Под (общим) равновесием в экономике обмена мы будем набор $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \{\bar{\boldsymbol{x}}_i\}_{i\in I}\}$, такой, что:

1. Цены благ неотрицательны: $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^l_+$.

2. Каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{x}_i \in B_i(\bar{\boldsymbol{p}},\ \boldsymbol{\omega}_i)} u_i(\boldsymbol{x}_i),$$

[1] В дальнейшем предполагается, что X_i — замкнутое и выпуклое подмножество l-мерного пространства благ, т. е $X_i \subseteq \mathbb{R}^+_l$.

где $\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i) = \{\boldsymbol{x}_i \in X_i \mid \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x}_i \leqslant \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_i\}$.

3. Выполнены полубалансы по благам, т.е. $\forall k$ выполнено

$$\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i^k \leqslant \sum_i \omega_i^k.$$

В дальнейшем для упрощения вместо $\{\bar{\boldsymbol{x}}_i\}_{i\in I}$ будем писать $\bar{\boldsymbol{x}}$.

Модель Эрроу-Дебре.

Модель Эрроу-Дебре является развитием модели обмена и включает в себя помимо потребителей, производственный сектор.

Рассмотрим, таким образом, экономику с l благами (товарами), и двумя типами экономических агентов: потребителями и производителями. Пусть в экономике n потребителей и m производителей. Пусть множества J, I, K — множества индексов товаров, потребителей и производителей соответственно.

Для каждого предприятия j задается производственное множество Y_j — множество векторов чистого выпуска, k-я компонента вектора $y_j \in Y_j$ показывает, сколько k-го блага выпускается (или затрачивается) j-м производителем.

Особенностью модели является то, что в ней специфицированы права собственности потребителей на владение фирмами, производящими продукцию. Таким образом, в модели предполагается, что все предприятия кому-то принадлежат, то есть каждый участник i владеет долей γ_{ij} j-го предприятия, причем $\sum_{i\in I} \gamma_{ij} = 1$, $\gamma_{ij} \geqslant 0$.

Условия материальной сбалансированности в экономике с производством принимают вид:

$$\sum_i x_i^k \leqslant \sum_j y_j^k + \sum_i \omega_i^k$$

Наличие производственного сектора влияет и на постановку задачи потребителя, в частности, доход потребителя складывается из того, что он может выручить от продажи начальных запасов и из его дохода от участия в прибыли. Поэтому бюджетное ограничение потребителя имеет вид:

$$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x}_i \leqslant \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j\,.$$

Определение 3.

Под экономикой Эрроу-Дебре мы будем понимать следующее множество

$$\mathcal{E}_{\mathrm{AD}} = \{(X_i, u_i(.))_{i\in I}; (Y_j)_{j\in J}; (\boldsymbol{\omega}_i)_{i\in I}; (\gamma_{ij})_{i\in I,\, j\in J}\}.$$

Введем теперь определение равновесия для экономики Эрроу-Дебре.

Определение 4.

Под равновесием в экономике Эрроу-Дебре мы будем понимать набор $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}\} = \{\bar{\boldsymbol{p}}; (\bar{\boldsymbol{x}}_i)_{i\in I}; (\bar{\boldsymbol{y}}_j)_{j\in J};\}$, такой что:

1. Цены благ неотрицательны: $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}_+^l$.

2. Каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{B}_i(\bar{\boldsymbol{p}},\, \boldsymbol{\omega}_i)} u_i(\boldsymbol{x}_i),$$

где $\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i, \gamma_{ij}) = \{\boldsymbol{x}_i \in X_i \mid \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x}_i \leqslant \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\, \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j\}$.

3. Каждый вектор $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи производителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{y}}_j \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{y}_j \in Y_j} \bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{y}_j,$$

4. Выполнены балансы по благам, т.е. $\forall k$ выполнено

$$\sum_i \bar{x}_i^k \leqslant \sum_j \bar{y}_j^k + \sum_i \omega_i^k.$$

Одним из наиболее важных вопросов, изучаемых при рассмотрении моделей общего равновесия, является вопрос существования равновесного распределения (более точно, равновесных распределений). Способы доказательства существования равновесия основаны на демонстрации того факта, что некоторое, подходящим образом построенное, отображение имеет неподвижную точку, соответствующую состоянию равновесия, что, в свою очередь, опирается на варианты теоремы Брауэра о существовании неподвижной точки непрерывного отображения некоторого компактного множества (обычно, множества цен) в себя, или на ее непосредственное обобщение — теорему Какутани о неподвижной точке точечно-множественного выпуклозначного отображения компактного множества в себя.

В наиболее простой версии доказательства построение такого отображения опирается на функцию (отображение) избыточного спроса, то есть превышение спроса над предложением. (Формальное определение избыточного спроса для различных типов экономик приводится ниже.) Доказательство существования равновесия проводится в два этапа. Сначала доказывается, что определенные свойства функции избыточного спроса гарантируют существование равновесия. Далее, для экономик различных типов указываются условия (свойства предпочтений и т.д.), которые гарантируют выполнение данных свойств избыточного спроса.

Для модели обмена функция избыточного спроса строится следующим образом. Пусть при ценах $\boldsymbol{p}$ функция спроса (или в общем случае отображение спроса) i-го участника есть $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$. Тогда значение функции избыточного спроса при этих ценах показывает излишек спроса каждого товара при ценах $\boldsymbol{p}$ по сравнению с первоначальной собственностью участника. Функция избыточного спроса экономики есть сумма функций избыточного спроса для всех потребителей.

Определение 5.

Функцией (отображением) избыточного спроса в модели обмена называется функция (отображение)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \sum_i (\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\omega}_i).$$

Аналогичным образом определяется избыточный спрос в модели Эрроу-Дебре. Кроме начальных запасов и спроса следует учитывать также предложение благ ($\boldsymbol{z}_j(\boldsymbol{p})$).

Определение 6.
Функцией (отображением) избыточного спроса в модели Эрроу-Дебре называется функция (отображение)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \sum_i (\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\omega}_i) - \sum_j \boldsymbol{z}_j(\boldsymbol{p}).$$

В ситуации, когда избыточный спрос определяется однозначно определение равновесия можно переформулировать в терминах функции избыточного спроса, поскольку, как нетрудно понять, равновесие существует тогда и только тогда, когда существует вектор цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, такой что $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \boldsymbol{0}$. Покажем это для случая экономики обмена.

Действительно, пусть $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \boldsymbol{0}$. Тогда, то пара $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{p}})\}$ по определению является равновесием. С другой стороны, если $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}\}$ — равновесие, то $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) = \sum_i (\bar{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_i) \leqslant \boldsymbol{0}$ (полубаланс по благам).

Определение 7. Законом Вальраса в теории общего равновесия называют следующее равенство:

$$\boldsymbol{p}\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i^k = \boldsymbol{p}\sum_i \omega_i^k \text{ для экономики обмена,}$$

и

$$\boldsymbol{p}\sum_i x_i^k = \boldsymbol{p}\sum_j y_j^k + \boldsymbol{p}\sum_i \omega_i^k \text{ для экономики Эрроу-Дебре.}$$

Напомним, что в теории потребителя мы называли законом Вальраса соотношение $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}) = R_i$. Более правильно называть законом Вальраса равенство для экономики в целом.

В экономике обмена $R_i = \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i$, в экономике Эрроу-Дебре $R_i = \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\, \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j$ (при $\sum_{i\in I} \gamma_{ij} = 1$, $\gamma_{ij} \geqslant 0$), поэтому закон Вальраса в терминах избыточного спроса можно переформулировать как

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = 0.$$

Заметим, что в соответствии с законом Вальраса равновесные цены благ должны быть равны нулю, если равновесное предложение этих благ превышает спрос на них:

$$\text{если } E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) < 0, \text{ то } \bar{p}^k = 0.$$

(Под $E^k(\boldsymbol{p})$ понимаем избыточный спрос на k-ое благо.)

С другой стороны, на рынках благ с положительными ценами избыточный спрос должен быть равен нулю:

если $\bar{p}^k > 0$, то $E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) = 0$.

Следующее утверждение указывает свойства функции избыточного спроса, которые гарантируют существование равновесия.

Поскольку функции спроса однородны нулевой степени, то функции избыточного спроса также однородны нулевой степени. Поэтому если $\bar{\boldsymbol{p}}$ — равновесный вектор цен, то $\lambda\bar{\boldsymbol{p}}$ ($\lambda>0$) — также равновесный вектор цен и наоборот. Т.е. равновесный вектор цен определяется с точностью до "нормировки" цен.

Будем рассматривать, поэтому, следующее множество цен $S^{l-1} = \{\boldsymbol{p} \geqslant 0 \mid \sum p^k = 1\}$. При этом каждому вектору цен $\boldsymbol{p}$ из $\mathbb{R}^l_+$ (за исключением нулевого вектора) можно сопоставит вектор $\lambda\boldsymbol{p}$ (при $\lambda>0$) из S^{l-1}. Этот способ нормировки цен удобен тем, что множество S^{l-1} компактно (что, как мы увидим ниже, позволяет непосредственно использовать теорему Брауэра).

Утверждение 1.

Предположим, что система функций $\{E^k(\boldsymbol{p})\}$, $k = 1, ..., l$ является непрерывной на множестве цен $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^l_+$, положительно однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса $\boldsymbol{pE}(\boldsymbol{p}) = 0$.

Тогда существует вектор цен $\bar{\boldsymbol{p}}\in\mathbb{R}^l_+$ такой, что $E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant 0$, $k = 1, ..., l$.

<u>Доказательство</u>:

Определим на множестве S^{l-1} следующую систему функций:

$$g^k(\boldsymbol{p}) = \frac{p^k + \max(0, E^k(\boldsymbol{p}))}{1 + \sum_i \max(0, E^i(\boldsymbol{p}))},$$

(Правило «пересчета» структуры цен

$$\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}),$$

имитирует возможную реакцию органа, ответственного за ценообразование, на неравновесия на рынках благ. В соответствии с ним цена дефицитного блага увеличивается на величину, пропорциональную дефициту. Коэффициент пропорциональности выбирается так, чтобы новый вектор цен был элементом множества S^{l-1}.)

Функция $\boldsymbol{g}(.)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Брауэра (она отображает S^{l-1} в себя по построению и является непрерывным, так как построено путем операций, сохраняющих непрерывность). Поэтому существует вектор цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, являющийся неподвижной точкой функции $\boldsymbol{g}(.)$:

$$\bar{p}^k = \frac{\bar{p}^k + \max(0, E^k(\bar{\boldsymbol{p}}))}{1 + \sum_i \max(0, E^i(\bar{\boldsymbol{p}}))}.$$

Преобразуя это выражение, получим

$$\bar{p}^k \sum_i \max(0, E^i(\bar{\boldsymbol{p}})) = \max(0, E^k(\bar{\boldsymbol{p}})).$$

Умножив эти тождества на $E^k(\bar{\boldsymbol{p}})$ и сложив, получим

$$(\textstyle\sum_i \max(0, E^i(\bar{\boldsymbol{p}}))) \sum_k \bar{p}^k E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) = \sum_k E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) \max(0, E^k(\bar{\boldsymbol{p}})).$$

В соответствии с законом Вальраса второй сомножитель левой части соотношения равен 0, поэтому

$$0 = \textstyle\sum_k E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) \max(0, E^k(\bar{\boldsymbol{p}})).$$

Величина $E^k(\bar{\boldsymbol{p}})$ max$(0, E^k(\bar{\boldsymbol{p}}))$ равна либо 0, либо $(E^k(\bar{\boldsymbol{p}}))^2$. Поскольку каждое из слагаемых неотрицательно, то сумма может быть равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Отсюда следует, что $E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant 0$.

■

Рассмотрим теперь, какие условия на предпочтения гарантируют нам выполнение предположений вышеприведенного утверждения. Непрерывность предпочтений гарантирует существование решений задач потребителя, по крайней мере, на множестве строго положительных цен ($\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$). Локальная ненасыщаемость предпочтений гарантирует выполнение закона Вальраса ($\boldsymbol{pE}(\boldsymbol{p}) = 0$). Строгая выпуклость предпочтений обеспечивает единственность решения задачи потребителя, а строгая выпуклость технологических множеств дает единственность решения задачи производителя.

Непрерывность и строгая выпуклость предпочтений в случае экономики обмена гарантирует непрерывность функции совокупного спроса на множестве цен и позволяет говорить о том, что система функций $\{E^k(\boldsymbol{p})\}$ для этой экономики является непрерывной на множестве цен $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ при $\boldsymbol{\omega}_i \gg \mathbf{0}$.

Правда, указанными свойствами функции совокупного спроса и, следовательно, функции избыточного спроса обладают только на множестве положительных цен, тогда как в доказательстве утверждения требуется выполнение аналогичных свойств на множестве всех неотрицательных цен. Описанный ниже прием позволяет в ряде случаев обойти это затруднение.

Модифицируем задачу потребителя, введя дополнительно к бюджетному ограничению количественное ограничение (квоту на потребление) по каждому продукту следующего типа:

$$x_i^k \leqslant \omega_\Sigma^k + \varepsilon \qquad i = 1, ..., m, \;\; k = 1, ..., l.$$

где $\omega_\Sigma^k = \sum_i \omega_i^k$ — суммарные запасы благ в экономике, ε — произвольная положительная константа.

Модифицированное таким образом бюджетное множество каждого потребителя оказывается компактным при любом векторе цен $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{+}$ и поэтому в случае непрерывных предпочтений всегда существует наиболее предпочитаемый потребительский набор. В случае, когда предпочтения строго выпуклы, этот набор единственный, и таким образом, оказываются определенными модифицированные функции спроса $\boldsymbol{x}_i^*(\bar{\boldsymbol{p}})$ и, следовательно, модифицированная функция избыточного спроса $\boldsymbol{E}^*(.)$. В случае, когда функция $\boldsymbol{E}^*(.)$ оказывается непрерывной, Утверждение 1 гарантирует существование вектора цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, при котором выполняется соотношение

$$\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \mathbf{0}.$$

Выполнение соотношения $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$ тогда гарантирует существование равновесия в исходной модели.

Непрерывность функции $\boldsymbol{E}^*(.)$ на $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{+}$ можно гарантировать, например, в случае, когда предпочтения участников непрерывны и строго выпуклы, а начальные запасы участников строго положительны ($\boldsymbol{\omega}_i \gg 0$). Показать это можно способом, аналогичным доказательству непрерывности функции спроса на множестве цен $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ (см. главу, посвященную задаче потребителя).

Покажем теперь, что при $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \boldsymbol{0}$ определен избыточный спрос исходной задачи $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$, и выполнено $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$, т.е. равновесные цены в модифицированной модели оказываются равновесными в исходной.

Пусть $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \boldsymbol{0}$. Тогда $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{x}^*(\bar{\boldsymbol{p}})\}$ — равновесие в модифицированной модели. Поскольку

$$x_i^{k*}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \overset{k}{\omega}_{\Sigma} - \sum_{k' \neq k} x_i^{k'*}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \overset{k}{\omega}_{\Sigma} < \overset{k}{\omega}_{\Sigma} + \varepsilon,$$

то дополнительно введенные нами ограничения несущественны, т.е. $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{x}^*(\bar{\boldsymbol{p}})\}$ — равновесие в исходной модели, и $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$. (Аналогичным образом можно показать, что если $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$).

На основе этих рассуждений получаем следующую теорему существования равновесия в модели обмена.

Утверждение 2.
Если в экономике обмена предпочтения участников локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы, а начальные запасы всех участников положительны ($\boldsymbol{\omega}_i \gg 0$), то равновесие существует.

На основе приведенной теоремы существования равновесия можно получать условия существования равновесия и в ситуациях экономики с производством, если функция предложения также является непрерывной. Так, гарантировать непрерывность функций предложения в модели Эрроу-Дербе можно лишь при некоторых условиях на технологические множества или представляющие их производственные функции. Наиболее простой и часто рассматриваемый в экономической теории тип производственной функций, гарантирующий непрерывность функции предложения, — неоклассическая производственная функция. Характерным примером этого типа функций является функция Кобба-Дугласа, зависящая только от "первичных" факторов производства, предложение которых ограничено.

Заметим, что мы, вообще говоря, не можем использовать прием, состоящий во введении количественных ограничений, в ситуации, когда начальные запасы хотя бы одного из участников не содержат хотя бы одного блага. Как показывает приведенный ниже пример, в этом случае функция избыточного спроса может не быть непрерывной на границе множества цен.

<u>Пример 1</u> (контрпример к теореме в случае нулевых начальных запасов одного из благ)

Пусть в экономике обмена есть только два блага (l=2), функции полезности участников $\forall i$ имеют вид

$$u_i(x_i^1, x_i^2) = \sqrt{x_i^1} + \sqrt{x_i^2},$$

а начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_i = (0, 1)$. Очевидно, что предпочтения рассматриваемых участников локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы.

Задача потребителя состоит в том, чтобы максимизировать $u_i(x_i^1, x_i^2)$ при следующих ограничениях:

$$p^1x_i^1 + p^2x_i^2 \leqslant p^2.$$
$$x_i^1, x_i^2 \geqslant 0.$$

При $p^1, p^2 \neq 0$ спрос участника на второе благо равен $x_i^2(p^1, p^2) = \dfrac{p^1}{p^1+p^2}$. Таким образом, $x_i^2(p^1, p^2) \to 1$ при $p^2 \to 0$. Но если $p^2 = 0$, то полезность можно сделать неограниченно большой, увеличивая x_i^2 (спрос на второе благо бесконечен). Таким образом, спрос на 2-е благо не является непрерывным при $p^2 = 0$. Покажем, что в этой экономике равновесие не существует.

При $p^1, p^2 \neq 0$ спрос участника на первое благо равен $x_i^1(p^1, p^2) = \dfrac{(p^2)^2}{p^1(p^1+p^2)}$, т.е. положителен. Значит, при положительных ценах равновесия быть не может, так как в экономике первое благо отсутствует. Если же цена на одно из благ равна 0, то соответствующий спрос бесконечен, и равновесия при этих ценах тоже нет.

Заметим, что модифицированная функция избыточного спроса не является непрерывной. При $p^1, p^2 \neq 0$ спрос участника такой же, как в исходной модели, и $x_i^2(p^1, p^2) \to 1$ при $p^2 \to 0$. Но при $p^2 = 0$, спрос на второе благо равен $1 + \varepsilon$. Таким образом, спрос на 2-е благо не является непрерывным при $p^2 = 0$, и приведенное доказательство существования "не работает".

Если в приведенном выше примере дать хотя бы одному из участников ненулевой запас первого блага, то, хотя избыточный спрос по прежнему не будет непрерывным, но равновесие существует. (Доказательство этого оставляем читателю в качестве упражнения.) Таким образом, вышеприведенные условия на избыточный спрос являются довольно ограничительными.

Ниже приводится другой вариант теоремы существования с более слабыми условиями на избыточный спрос. Доказательство этого утверждения состоит в указании правила процесса ценообразования (отличного от описанного выше), имитирующего поведение ценообразующего органа, которое порождает отображение множества цен S^{l-1} в себя, удовлетворяющее теореме Какутани (о существовании неподвижной точки выпуклозначного замкнутого отображения компактного множества в себя).

Утверждение 3.

Предположим, что функция $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет следующим условиям:

- $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ непрерывно на $S_+^{l-1} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_+^l \mid \sum p^k = 1, p^k > 0\}$.
- $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ однородно нулевой степени на S_+^{l-1}.
- Выполнено тождество $\boldsymbol{pE}(\boldsymbol{p}) = 0$ $\forall \boldsymbol{p} \in S_+^{l-1}$ (закон Вальраса).
- Функции избыточного спроса ограничены снизу, т.е. существует число t, такое что

$$E^k(\boldsymbol{p}) > t \quad \forall k, \forall \boldsymbol{p} \in S^{l-1}.$$

• Если хотя бы одна из цен стремится к нулю, то избыточный спрос хотя бы на одно благо стремится к бесконечности, т.е. если $\{\boldsymbol{p}^n\} \in S^{l-1}$ и $\boldsymbol{p}^n \to \boldsymbol{p}^0$ при $n\to\infty$, причем существует благо k, такое что $p_k^0 = 0$, то

$$\max_k (E^k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty \text{ при } n\to\infty.$$

Тогда существует вектор $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^l_{++}$, такой что $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) = 0$.

<u>Доказательство</u>:

Доказательство условно разобьем на три этапа:

1. Построение отображения единичного симплекса S^{l-1} в себя.
2. Проверка замкнутости графика и выпуклозначности построенного отображения и применение к нему теоремы о неподвижной точке.
3. Демонстрация того, что найденная неподвижная точка является вектором равновесных цен, рассматриваемой экономики.

<u>Этап 1</u>. Каждой цене $\boldsymbol{p} \in S^{l-1}_+$ сопоставим множество

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{q} \in S^{l-1} \mid \boldsymbol{qE}(\boldsymbol{p}) \geqslant \boldsymbol{q}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) \ \ \forall \boldsymbol{q}' \in S^{l-1}\},$$

и тем самым построим отображение $\boldsymbol{g}(.)$ из S^{l-1}_+ в S^{l-1}. Другими словами, значение отображения $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ ($\boldsymbol{p} \in S^{l-1}_+$) — множество всех векторов цен, максимизирующих стоимость избыточного спроса, вычисленного при старых ценах $\boldsymbol{p}$. Можно заметить, что любому неравновесному вектору цен $\boldsymbol{p} \in S^{l-1}_+$ (т.е. в данном случае вектору $\boldsymbol{p}$ такому, что $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) \neq 0$) данное отображение ставить в соответствие подмножество (грань меньшей размерности) симплекса цен, а любому равновесному вектору — весь симплекс цен.

На границе симплекса цен $S^{l-1}\setminus S^{l-1}_+$ определим $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ по правилу:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{q} \in S^{l-1} \mid \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p} = 0\} = \{\boldsymbol{q} \in S^{l-1} \mid q^k = 0, \text{ если } p^k > 0\}.$$

Отметим, что множество $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ непусто при любом $\boldsymbol{p} \in S^{l-1}$.

<u>Этап 2</u>. Выпуклозначность построенного отображения очевидна в силу того, что условия, определяющие множества $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$, линейны. Таким образом, для доказательства существования неподвижной точки остается показать, что отображение $\boldsymbol{g}(.)$ имеет замкнутый график.

Предположим, что последовательности $\{\boldsymbol{p}^n\} \in S^{l-1}$ и $\{\boldsymbol{q}^n\} \in S^{l-1}$ с пределами $\boldsymbol{p}^0$ и $\boldsymbol{q}^0$ соответственно таковы, что $\boldsymbol{q}^n \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^n)$. Покажем, что $\boldsymbol{q}^0 \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^0)$. Возможны две ситуации: (1) $\boldsymbol{p}^0 \in S^{l-1}_+$, (2) $\boldsymbol{p}^0 \in S^{l-1}\setminus S^{l-1}_+$.

В случае $\boldsymbol{p}^0 \in S^{l-1}_+$ существует N, такое, что при $n > N$ $\boldsymbol{p}^n \in S^{l-1}_+$. При $n > N$ выполнено

$$\boldsymbol{q}^n\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) \geqslant \boldsymbol{q}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) \ \ \forall \boldsymbol{q}' \in S^{l-1}.$$

Переходя к пределу, получим, что $\boldsymbol{q}^0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^0) \geqslant \boldsymbol{q}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^0)$. Тем самым мы показали, что в этом случае $\boldsymbol{q}^0 \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^0)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\boldsymbol{p}^0 \in S^{l-1} \backslash S_+^{l-1}$. Пусть k — благо, для которого $p_k^0 >$ 0. Покажем, что при достаточно больших n выполнено $q_k^n = 0$. Тем самым мы покажем, что $q_k^0 = \lim q_k^n = 0$, и, следовательно, $\boldsymbol{q}^0 \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^0)$.

Если $\boldsymbol{p}^n \in S^{l-1} \backslash S_+^{l-1}$, то по определению отображения $\boldsymbol{g}(.)$ имеем $q_k^n = 0$. Таким образом, нам осталось доказать в случае $\boldsymbol{p}^n \in S_+^{l-1}$, что если $p_k^0 > 0$, то при достаточно больших n выполнено $q_k^n = 0$. По закону Вальраса имеем

$$p_k^n E^k(\boldsymbol{p}^n) = -\sum_{k' \neq k} p_{k'}^n E^{k'}(\boldsymbol{p}^n)$$

Используя ограниченность снизу функции избыточного спроса, имеем

$$-\sum_{k' \neq k} p_{k'}^n E^{k'}(\boldsymbol{p}^n) \leqslant -t \sum_{k' \neq k} p_{k'}^n = -t\,(1-p_k^n).$$

Отсюда

$$E^k(\boldsymbol{p}^n) \leqslant -\frac{t(1-p_k^n)}{p_k^n}.$$

Поскольку p_k^n сходится к положительному пределу, это означает, что значение $E^k(\boldsymbol{p}^n)$ ограничено сверху. С другой стороны, величина $\max_s\{E^s(\boldsymbol{p}^n)\}$ стремится к бесконечности. Поэтому при достаточно больших n выполнено неравенство

$$E^k(\boldsymbol{p}^n) < \max_s\{E^s(\boldsymbol{p}^n)\}.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших n вектор $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^n)$ должен иметь $q^k=0$. Действительно, согласно определению $\boldsymbol{g}(.)$ для любого вектора $\boldsymbol{q}'$ из S^{l-1} должно быть выполнено $\boldsymbol{q}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) \leqslant \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n)$. Однако, если бы $q^k>0$, то при $E^k(\boldsymbol{p}^n) < \max_s\{E^s(\boldsymbol{p}^n)\}$ мы могли бы построить на основе вектора $\boldsymbol{q}$ вектор $\boldsymbol{q}'$ для которого $\boldsymbol{q}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) < \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n)$.

Тем самым мы полностью доказали, что отображение $\boldsymbol{g}(.)$ имеет замкнутый график.

Поскольку отображение $\boldsymbol{g}(.)$ имеет замкнутый график, выпуклозначно и отображает непустое компактное выпуклое множество S^{l-1} в себя, то к нему применима теорема Какутани, и существует неподвижная точка $\bar{\boldsymbol{p}} \in S^{l-1}$:

$$\bar{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}}).$$

Этап 3.

Покажем, что неподвижная точка отображения $\boldsymbol{g}(.)$ является вектором цен равновесия.

Неподвижная точка $\bar{\boldsymbol{p}}$ отображения $\boldsymbol{g}(.)$ не может принадлежать границе симплекса цен ($S^{l-1} \backslash S_+^{l-1}$). Этот факт следует из того, что согласно определению $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ для $\boldsymbol{p} \in S^{l-1} \backslash S_+^{l-1}$ при всех $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ должно быть выполнено равенство $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} = 0$. Если бы $\bar{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}})$, где $\bar{\boldsymbol{p}} \in S^{l-1} \backslash S_+^{l-1}$, то мы имели бы $\bar{\boldsymbol{p}} \cdot \bar{\boldsymbol{p}} = \|\bar{\boldsymbol{p}}\|^2 = 0$. Этому условию удовлетворяет только точка $\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{0}$, не принадлежащая симплексу цен.

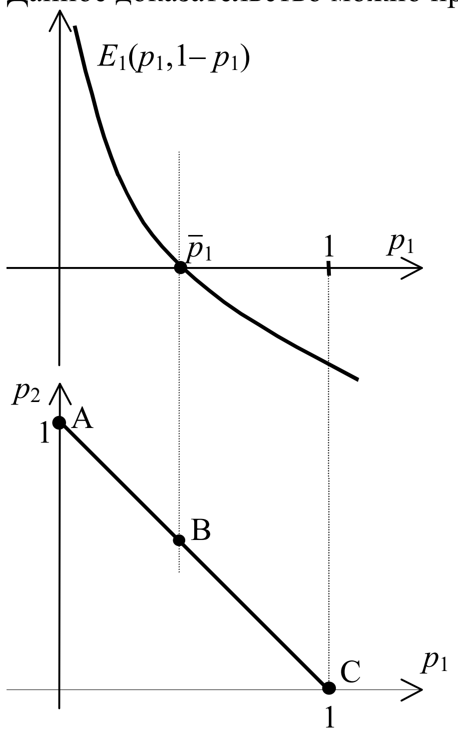
Таким образом, $\bar{\boldsymbol{p}} \gg \boldsymbol{0}$ и поэтому, как было отмечено при определении отображения, $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{0}$. Покажем это формально.

Предположим противное. В силу закона Вальраса, если $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \neq 0$ и $\bar{\boldsymbol{p}} \gg \mathbf{0}$, то существуют s и s' такие, что $E^s(\bar{\boldsymbol{p}}) > 0$ и $E^{s'}(\bar{\boldsymbol{p}}) < 0$. Поскольку $\bar{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}})$ и $\bar{\boldsymbol{p}} \gg \mathbf{0}$, то по определению $\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}})$ для любого $\boldsymbol{q} \in S^{l-1}$ должно быть выполнено $\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \geqslant \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$. Однако, так как $E^s(\bar{\boldsymbol{p}}) > E^{s'}(\bar{\boldsymbol{p}})$, то достаточно взять следующий вектор $\boldsymbol{q}$: $q^s = \bar{p}^s + \bar{p}^{s'}$, $q^{s'} = 0$, $q^k = \bar{p}^k$, $k \neq s, s'$, чтобы получить $\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) < \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$. Мы пришли к противоречию.

Тем самым мы доказали существование цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, при которых избыточный спрос равен нулю.

■

Данное доказательство можно проиллюстрировать графически.



На данном рисунке B — неподвижная точка отображения $\boldsymbol{g}(.)$. Данное отображение определено на симплексе AC, и отображает точки отрезка AB, за исключением точки B, в точку C, точки отрезка BC, за исключением точки B, — в точку A, а точку B — во весь симплекс (отрезок AC).

Опираясь на доказанное Утверждение 3, можно показать, что в моделях обмена при непрерывности, строгой выпуклости и строгой монотонности предпочтений потребителей равновесие существует, если *совокупные* начальные запасы строго положительны, т.е. $\boldsymbol{\omega}_{\Sigma} \gg 0$. Это утверждение очевидно, в силу того, что функция избыточного спроса в модели обмена при данных условиях на предпочтения участников является непрерывной, однородной первой степени и удовлетворяет закону Вальраса на S_+^{l-1}. Ограниченность избыточного спроса снизу следует из того факта, что спрос участников неотрицателен и выполнены балансы (в качестве константы t можно взять $t = -\max_k\{\omega_{\Sigma}^k\}$).

Для того, чтобы полностью продемонстрировать выполнение условий Утверждения 3 для случая непрерывных, строго выпуклых и строго монотонных предпочтений, осталось показать выполнение последнего условия теоремы: если хотя бы одна из цен стремится к нулю, то избыточный спрос хотя бы на одно благо стремится к бесконечности. Покажем это формально.

В силу того, что $\boldsymbol{p}^0 \in S^{l-1}$ и $\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$, имеем, что $\boldsymbol{p}^0 \boldsymbol{\omega}_\Sigma > 0$. Таким образом, существует потребитель i, такой, что $\boldsymbol{p}^0 \boldsymbol{\omega}_i > 0$. Следующее утверждение показывает, что спрос этого потребителя, по крайней мере, на одно из благ стремиться к бесконечности по мере того, как $\boldsymbol{p}^n$ стремиться к $\boldsymbol{p}^0$, т.е.

$$\max_k (x_i^k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty \text{ при } n \to \infty,$$

что и доказывает, что

$$\max_k (E^k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Утверждение 4.

Пусть $\{\boldsymbol{p}^n\} \in S^{l-1}$ — последовательность цен, причем $\boldsymbol{p}^n \to \boldsymbol{p}^0$ при $n \to \infty$, и существует благо k, такое что $p_k^0 = 0$.

Предположим, что:

- Потребитель имеет строго монотонные непрерывные предпочтения.
- Начальные запасы потребителя $\boldsymbol{\omega}$ таковы, что $\boldsymbol{p}^0 \boldsymbol{\omega} > 0$.

Тогда

$$\max_k (x^k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

<u>Доказательство</u>:

Предположим противное. Пусть спрос потребителя на все товары, ограничен, т.е. существует некоторое число $\boldsymbol{K}$, такое, что $0 \leqslant \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}) \leqslant \boldsymbol{K}$. В силу того, что бесконечная последовательность на компакте имеет точки сгущения, найдется некоторая подпоследовательность $\{\boldsymbol{p}^{n_l}\}$, такая, что:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) \to \bar{\boldsymbol{x}}.$$

Так как $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$ — оптимальное решение задачи потребителя, а предпочтения строго монотонны, то при ценах $\boldsymbol{p}^{n_l}$ выполняется закон Вальраса, т.е.

$$\boldsymbol{p}^{n_l}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) = \boldsymbol{p}^{n_l}\boldsymbol{\omega}.$$

Переходя в этом тождестве к пределу, получим, $\boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{\omega}$. Пусть $p_k^0 = 0$. Тогда в силу строгой монотонности предпочтений $\bar{\boldsymbol{x}} + \sigma\boldsymbol{e}^k \succ \bar{\boldsymbol{x}}$, где σ — некоторое строго положительное число. В силу того, что предпочтения потребителей непрерывны, найдется такое $\delta>0$, что $\hat{\boldsymbol{x}} \succ \bar{\boldsymbol{x}}$, где $\hat{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}} + \sigma\boldsymbol{e}^k - \delta\boldsymbol{e}^s$, а s — номер товара, для которого $\boldsymbol{p}_s^0 > 0$. Очевидно также, что

$$\boldsymbol{p}^0\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}} + \sigma p_k^0 - \delta p_s^0 = \boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}} - \delta p_s^0 < \boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}}.$$

В силу непрерывности отношения предпочтения имеем, что существует N такое, что для каждого $l > N$ $\hat{\boldsymbol{x}} \succ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$.

Так как $\boldsymbol{p}^{n_l} \to \boldsymbol{p}^0$ и $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) \to \bar{\boldsymbol{x}}$, то

$$\lim \boldsymbol{p}^{n_l}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) - \hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{p}^0(\bar{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}) > 0.$$

Из определения предела следует, что найдется число M такое, что для каждого l большего M справедливо, что $\boldsymbol{p}^{n_l}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) - \hat{\boldsymbol{x}}) > 0$, т.е.

$$\boldsymbol{p}^{n_l}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) > \boldsymbol{p}^{n_l}\hat{\boldsymbol{x}}$$

Таким образом, мы получили, что при $l > \max\{M, N\}$ набор $\hat{\boldsymbol{x}}$ строго лучше набора $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$ и при этом стоит дешевле. Тем самым мы получили противоречие с оптимальностью набора $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$. Таким образом, не существует $\boldsymbol{K}$ такого, что $0 \leqslant \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}) \leqslant \boldsymbol{K}$, т.е. $\max_k (x_k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty$ при $n \to \infty$.

■

Резюмируя проделанные выше рассуждения, сформулируем утверждение о существовании равновесия в экономике обмена при более слабых, чем ранее, предположениях.

Утверждение 5.

Если в экономике обмена предпочтения участников локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы, а совокупные начальные запасы положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$), то равновесие существует.

В ситуации, когда предпочтения не являются строго монотонными (и в частности, если соответствующее отображение избыточного спроса $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ не является ограниченным снизу), мы можем воспользоваться следующим утверждением, устанавливающим условия существования равновесия в модели Эрроу-Дебре.

Введем сначала следующее вспомогательное понятие.

Определение 8.

Состояние $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \{\bar{\boldsymbol{p}}; (\bar{\boldsymbol{x}}_i)_{i\in I}; (\bar{\boldsymbol{y}}_j)_{j\in J}\}$ экономики Эрроу-Дебре

$$\mathcal{E} = \{(\succsim_i, (Y_j)_{j\in J}; (\boldsymbol{\omega}_i)_{i\in I}; (\gamma_{ij})_{i\in I, j\in J}\}$$

называется **квазиравновесием**, если выполняются следующие условия:

1. Для каждого потребителя $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ удовлетворяет условиям

- $\bar{\boldsymbol{x}}_i \in X_i$,
- $\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{y}})$,
- $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ и не хуже, чем любой другой набор $\boldsymbol{x}_i \in X_i$, который стоит (в равновесных ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$) дешевле, чем $\beta_i(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{y}})$.

2. $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ максимизирует прибыль j-го производителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, т.е. решает следующую задачу:

$$\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{y}_j \to \min$$
$$\boldsymbol{y}_j \in Y_j.$$

3. Выполнены полубалансы:

$$\sum_i \bar{x}_i^k \leqslant \sum_j \bar{y}_j^k + \sum_i \omega_i^k \quad \forall k.$$

Заметим, что когда предпочтения $\succsim_i$ локально ненасыщаемы, вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, удовлетворяющий условию 1 определения квазиравновесия, минимизирует затраты (в равновесных ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$) на достижение уровня благосостояния, определяемого вектором $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, т.е. решает следующую задачу

$$\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}_i \to \min$$
$$\boldsymbol{x}_i \succsim_i \bar{\boldsymbol{x}}_i,$$

а для каждого потребителя выполнено соотношение:

$$\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{x}}_i = \sum_j \gamma_{ij}\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{y}}_j + \bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\omega}_i \quad \forall i.$$

(Докажите это.)

Условия существования квазиравновесия оказываются особенно простыми и описываются в приведенном ниже Утверждении **6**. С другой стороны состояние квазиравновесия является при некоторых предположениях о предпочтениях состоянием равновесия. Поэтому представляется удобным вначале установить условия существования квазиравновесия, а затем использовать их вместе с дополнительными предположениями, для доказательства существования равновесия в конкретных моделях экономики.

Утверждение 6.

Предположим, что:

1) $Z = (\sum_j Y_j + \sum_i \boldsymbol{\omega}_i) \cap \mathbb{R}^l_+$ непусто, замкнуто и ограничено, (т.е. существует N такое, что если $\boldsymbol{z} \in Z$, то $z^k \leqslant N$, $k = 1, ..., l$).

2) Предпочтения $\succsim_i$ выпуклы, непрерывны и локально ненасыщаемы, X_i — выпуклое замкнутое множество, $\mathbf{0} \in X_i$, $\boldsymbol{\omega}_i \geqslant \mathbf{0}$, $i = 1, ..., n$.

3) Y_j — выпуклое множество и $\mathbf{0} \in Y_j$, $j = 1, ..., m$.

Тогда в этой экономике существует квазиравновесие.

<u>Доказательство</u>:

Как и в предыдущих доказательствах, мы будем искать квазиравновесие как неподвижную точку некоторого специальным образом сконструированного отображения из множества $\Theta = \prod_{i=1}^{m} \hat{X}_i \times \prod_{j=1}^{n} \hat{Y}_j \times S^{l-1}$ в себя. Здесь

$$\hat{X}_i = \{\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^l_+ \mid \boldsymbol{x}_i \leqslant N+\varepsilon\},$$
$$\hat{Y}_j = \{\boldsymbol{y}_j \in Y_j \mid |\boldsymbol{y}_j| \leqslant N+\varepsilon\},$$
$$S^{l-1} = \{\boldsymbol{p} \geqslant 0 \mid \sum_k p^k = 1\}.$$

Заметим, что каждое из этих множеств непусто, замкнуто и ограничено, поэтому их произведение Θ тоже непусто, замкнуто и ограничено.

Определим отображение $\boldsymbol{g}(.)$: $\Theta \to \Theta$ следующим образом:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_{xi}(\boldsymbol{\theta}) \times \prod_{j=1}^{n} \boldsymbol{g}_{yj}(\boldsymbol{\theta}) \times \boldsymbol{g}_{p}(\boldsymbol{\theta}).$$

Где компоненты отображения $\boldsymbol{g}(.)$ определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{g}_{xi}(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{x}_i' \in \hat{X}_i \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i' \leqslant \beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}_i' \succsim \boldsymbol{x}_i'' \ \forall \ \boldsymbol{x}_i'' \in \hat{X}_i\colon \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i'' < \beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\},$$

где

$$\beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}) = \max\{0, \textstyle\sum_j \gamma_{ij}\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j\} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i,$$

$$\boldsymbol{g}_{yj}(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{y}_j' \in \hat{Y}_j \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j' \geqslant \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j'' \ \forall\, \boldsymbol{y}_j'' \in \hat{Y}_j\},$$

$$\boldsymbol{g}_p(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{p}' \in S^{l-1} \mid (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'')(\sum_i \boldsymbol{x}_i - \sum_j \boldsymbol{y}_j - \sum_i \boldsymbol{\omega}_i) \geqslant 0 \ \forall\, \boldsymbol{p}'' \in S^{l-1}\}.$$

Заметим, что такое определение бюджета гарантирует непустоту бюджетного множества $\{\boldsymbol{x}_i' \in \hat{X}_i \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i' \leqslant \beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\}$ при любых ценах $\boldsymbol{p}$ и производственных планах $\boldsymbol{y}$.

Пусть $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \{\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{p}}\}$ — неподвижная точка отображения $\boldsymbol{g}(.)$, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} \in \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{\theta}}).$$

Докажем, что $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ является квазиравновесием рассматриваемой экономики.

Поскольку каждый производственный план $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ максимизирует прибыль при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и $\boldsymbol{0} \in \hat{Y}_j$, то $\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant 0$ и поэтому $\beta_i(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \sum_j \gamma_{ij}\bar{\boldsymbol{p}}\,\bar{\boldsymbol{y}}_j + \bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\omega}_i$.

Далее, по определению множества $\boldsymbol{g}_{xi}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$ набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ не хуже любого набора $\boldsymbol{x}_i \in \hat{X}_i$, удовлетворяющего строгому ограничению $\bar{\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{x}_i < \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{y}})$, поэтому из локальной ненасыщаемости $\bar{\boldsymbol{p}}\,\bar{\boldsymbol{x}}_i = \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{y}}) = \sum_j \gamma_{ij}\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i$ (см. аналогичные рассуждения в Части 1).

Сложив эти равенства по всем потребителям, получим, что для экономики в целом выполнено соотношение:

$$\bar{\boldsymbol{p}}\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i = \bar{\boldsymbol{p}}\sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j + \bar{\boldsymbol{p}}\sum_i \boldsymbol{\omega}_i.$$

Покажем теперь, что выполняются балансовые соотношения

$$\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i - \sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j - \sum_i \boldsymbol{\omega}_i \leqslant 0$$

Действительно, если хотя бы одна из компонент данного вектора была положительна, то положительной была бы и стоимость дефицита — величина $\bar{\boldsymbol{p}}\,(\sum \bar{\boldsymbol{x}}_i - \sum \bar{\boldsymbol{y}}_j - \sum \boldsymbol{\omega}_i)$ (поскольку цены $\bar{\boldsymbol{p}}$, выбраны ценообразующим органом так, чтобы максимизировать эту величину). Но мы только что доказали, что данная величина равна нулю.

Остается показать, что количественные ограничения в условиях, определяющих отображения $\boldsymbol{g}_{xi}(.)$ и $\boldsymbol{g}_{yj}(.)$ несущественны, в то смысле, что решения соответствующих задач потребителя и производителя одни и те же, как при наличии ограничений

$$\boldsymbol{x}_i \leqslant N + \varepsilon, \ |\boldsymbol{y}_j| \leqslant N + \varepsilon,$$

так и при их отсутствии.

Пусть это не так, и существует, например, такой набор $\hat{\boldsymbol{x}}_i \in X_i$, что $\bar{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{x}}_i < \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{y}})$ и $\hat{\boldsymbol{x}}_i \succ_i \bar{\boldsymbol{x}}_i$.

Поскольку выполняются соотношения

$$\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j + \sum_i \boldsymbol{\omega}_i \leqslant N,$$

то дополнительное количественное ограничение в точке $\bar{\boldsymbol{x}}_i^k$ должно быть выполнено как строгое неравенство:

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i^k < N + \varepsilon.$$

На отрезке, соединяющем $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ и $\hat{\boldsymbol{x}}_i$, найдется набор $\boldsymbol{x}_i'$ (достаточно близкий к $\bar{\boldsymbol{x}}_i$), такой что $\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}_i' < \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{y}})$и $\boldsymbol{x}_i' \leqslant N+\varepsilon$. Поскольку отношение $\succeq_i$ выпукло, то $\boldsymbol{x}_i' \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i$, а это противоречит тому, что $\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \boldsymbol{g}_{xi}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$.

Похожим образом доказывается, что $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ максимизирует прибыль на всем множестве Y_j.

Таким образом, $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ действительно является квазиравновесием.

Для доказательства теоремы осталось проверить, что построенное отображение множества Θ в себя имеет замкнутый график, что устанавливается рассуждениями, аналогичными уже проделанным ранее (в Частях 1, 2).

■

Данное утверждение гарантирует существование равновесия в модели обмена с выпуклыми, локально ненасыщаемыми и непрерывными предпочтениями в случаях, когда начальные запасы каждого участника строго положительны. Если предпочтения участников строго монотонны, то для существования равновесия достаточно положительности суммарных начальных запасов. И, наконец, в ситуации с леонтьевскими предпочтениями, квазиравновесие всегда является равновесием. (Проверку выполнения условий теоремы существования в каждом из этих трех случаев оставляем читателю в качестве упражнения).

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают.
Гарантирует ли выпуклость предпочтений существование равновесия? Аргументируйте свой ответ.

2. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают.
Гарантирует ли выпуклость предпочтений единственность равновесия
(если оно существует)? Аргументируйте свой ответ.

3. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений единственность равновесия (если оно существует)? Аргументируйте свой ответ.

4. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают.
Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений существование равновесия? Аргументируйте свой ответ.

5. Предположим, что предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают, а совокупное производственное множество содержит нулевой вектор чистых

выпусков. Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений тот факт, что равновесные распределения (если существуют) совпадают с начальными запасами? Аргументируйте свой ответ.

6. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают и содержат все блага в положительном количестве. Будет ли равновесное распределение (если существует) совпадать с начальными запасами? Аргументируйте свой ответ.

7. Напомним, что в экономике распределения (в отличие от экономики обмена) задается вектор совокупных начальных запасов $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ и доход R_i каждого потребителя, т.е.

$$\mathcal{E} = \{(X_i, u_i(.))_{i\in I;}\ \boldsymbol{\omega}_\Sigma, (R_i)_{i\in I}\}$$

Под (общим) равновесием в экономике распределения мы будем понимать пару $\{\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}\}=\{\boldsymbol{p}, \{\bar{\boldsymbol{x}}_i\}_{i\in I}\}$, такую, что:

— $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_+$,

— каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i)} u_i(\boldsymbol{x}_i),$$

где $\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{p}, R_i) = \{\boldsymbol{x}_i \in X_i \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \leqslant R_i\}$.

— выполнены полубалансы по благам, т.е. $\forall k$ выполнено

$$\sum_i \bar{x}_i^k \leqslant \sum_i \omega_i^k.$$

— $\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_\Sigma = \sum_i R_i$

Показать, что в экономике распределения с двумя благами и двумя участниками, предпочтения которых описываются следующими функциями полезности

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = \min\{x_{11}, x_{12}\}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22}$$

не существует равновесия при $R_1 = 1$, $R_2 = 0$, и $\boldsymbol{\omega}_\Sigma = (2, 1)$.

8. Показать, что в экономике обмена с двумя благами и двумя участниками, описываемыми следующими функциями полезности

$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}$, $\quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22}$,

не существует равновесия при $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, 1)$.

9. Показать, что в экономике распределения, состоящей из 3 участников и двух товаров, спрос третьего участника в окрестности точки равновесия обладает эффектом Гиффена. Целевые функции участников имеют вид:

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11},$$
$$u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22},$$
$$u_3(x_{31}, x_{32}) = 28x_{31} + 28x_{32} - 2x_{31}^2 - 3x_{31}x_{32} - 2x_{32}^2.$$

В экономике общие запасы товаров представлены вектором $\omega = (4, 4)$, а денежные ресурсы участников равны 4, 12 и 12 денежных единиц соответственно.

10. Рассмотрим экономику обмена с двумя товарами и тремя потребителями, которые имеют следующие функции полезности и начальные запасы.

$u_1(x_1, y_1) = \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1}$ $\qquad \boldsymbol{\omega}_1 = (1, 2)$

$u_2(x_2, y_2) = \min\{x_2, y_2\}$ $\qquad \boldsymbol{\omega}_2 = (3, 4)$

$u_3(x_3, y_3) = y_3\, e^{x_3}$ $\qquad \boldsymbol{\omega}_3 = (1, 1)$

Найдите функции спроса участников, опишите их свойства. Найдите равновесие в этой экономике.

11. Рассмотрим экономику обмена с двумя товарами и двумя потребителями, которые имеют следующие функции полезности и начальные запасы.

$$u_1(x_1, y_1) = -\frac{1}{x_1^{\,2}} - \left(\frac{12}{37}\right)^3 \frac{1}{y_1^{\,2}} \qquad \omega_1 = (1, 0),$$

$$u_2(x_2, y_2) = -\left(\frac{12}{37}\right)^3 \frac{1}{x_2^{\,2}} - \frac{1}{y_2^{\,2}} \qquad \omega_2 = (0, 1).$$

Найдите равновесие в этой экономике. Единственно ли оно?

12. Пусть функция избыточного спроса имеет вид

$$E_1(p_1, p_2) = -\frac{p_2}{p_1 + p_2} \qquad\qquad E_2(p_1, p_2) = -\frac{p_1}{p_1 + p_2}$$

Является ли она однородной?
Является ли она непрерывной?
Может ли быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

13. Пусть функция избыточного спроса имеет вид

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{pa}}{\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{pb}}{\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{a}.$$

Является ли она однородной? Является ли она непрерывной? Выполняется ли для нее закон Вальраса?

14. Пусть функции избыточного спроса на первые два товара в трехтоварной экономике имеют вид

$$E_1(\boldsymbol{p}) = -p_1/p_3 + p_2/p_3 + 1 \quad \text{и} \quad E_2(\boldsymbol{p}) = p_1/p_3 - 2p_2/p_3 + 2.$$

Найдите избыточный спрос на третий товар.
Может ли быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

15. Пусть экономика состоит из двух потребителей, и в ней обращаются два товара. Функции полезности потребителей имеют вид

$$u_1(x_1,y_1) = x_1^{\alpha} y_1^{1-\alpha} \quad \text{и} \quad u_2(x_2,y_2) = x_2^{\beta} y_2^{1-\beta}.$$

Потребители обладают начальными запасами в размере

$$\omega_1 = (a,b) \quad \text{и} \quad \omega_2 = (c,d).$$

Найдите равновесные цены и спрос участников. Найдите полезности участников в точке равновесия как функции параметров a, b, c, d.

16. Вычислите квазиравновесия в следующей модели обмена:

В экономике есть только два блага (l=2), функции полезности участников $\forall i$ имеют вид

$$u_i(x_i^1, x_i^2) = \sqrt{x_i^1} + \sqrt{x_i^2},$$

а начальные запасы равны $\omega_i = (0, 1)$.

Основные положения экономики благосостояния

Введем в рассмотрение множество (физически) допустимых состояний $\mathcal{D}(\omega_\Sigma)$:

$$\mathcal{D}(\omega_\Sigma) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i \leqslant \sum_{j\in J} \boldsymbol{y}_j + \omega_\Sigma, \quad \boldsymbol{x}_i \geqslant \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{y}_j \in Y_j\}$$

Здесь и далее под $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ понимается $(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n; \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$. ω_Σ обозначает общие начальные запасы благ в экономике.

Определение 9. Говорят, что допустимое состояние экономики $\{\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}\}$ строго доминирует (по Парето) состояние $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, если $\bar{\boldsymbol{x}}_i \succ_i \boldsymbol{x}_i$ для любого потребителя i.

Определение 10. Говорят, что точка $\{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}\}$ принадлежит слабой границе Парето ($\mathcal{WP}$), если не существует строго доминирующей ее допустимой точки, т.е.

$$\mathcal{WP} = \{(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{D}(\omega_\Sigma) \mid \nexists (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{D}(\omega_\Sigma) : \boldsymbol{x}_i \succ \hat{\boldsymbol{x}}_i \ \forall\, i \in I\}$$

Определение 11. Говорят, что допустимое состояние экономики $\{\bar{\boldsymbol{x}}_1, ..., \bar{\boldsymbol{x}}_n; \bar{\boldsymbol{y}}_1, ..., \bar{\boldsymbol{y}}_m\}$ доминирует (по Парето) другое допустимое состояние $\{\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n; \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m\}$, если $\bar{\boldsymbol{x}}_i \succeq_i \boldsymbol{x}_i$ для любого потребителя i и существует i_0 такой, что $\bar{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \boldsymbol{x}_{i_0}$.

Определение 12. Допустимую точку $\{\hat{\boldsymbol{x}}_1, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_n; \hat{\boldsymbol{y}}_1, ..., \hat{\boldsymbol{y}}_m\}$ называют Парето-оптимальным состоянием экономики, если не существует доминирующей ее другой допустимой точки. Множество Парето-оптимальных состояний называют (сильной) границей Парето ($\mathcal{P}$):

$$\mathcal{P} = \{(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{D}(\omega_\Sigma) \mid \nexists (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{D}(\omega_\Sigma): \boldsymbol{x}_i \succeq \hat{\boldsymbol{x}}_i \ \forall\, i \in I, \ \exists\, i_0 \in I: \boldsymbol{x}_{i_0} \succ \hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}\}.$$

Утверждение 7.

1) Если предпочтения каждого участника строго монотонны и непрерывны, то сильная граница Парето совпадает со слабой: $\mathcal{P} = \mathcal{WP}$.

2) Если предпочтения каждого участника полустрого монотонны[2] и непрерывны, то все точки сильной границы Парето, компоненты которых строго положительны, также принадлежат и слабой границе Парето.

Доказательство:

1) Очевидно, что по определению границы Парето $\mathcal{P}$ и слабой границы Парето $\mathcal{WP}$ имеем включение $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{WP}$. Таким образом нам остается показать, что $\mathcal{WP} \subseteq \mathcal{P}$. Пусть это не так, т.е. существует допустимое распределение $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$ и $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \notin \mathcal{P}$. По определению границы Парето существует другое допустимое распределение $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ такой, что $\tilde{\boldsymbol{x}}_i \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i \;\; \forall\, i \in I$ и $\exists\; i_0 \in I \;\; \tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Заметим, что $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} \neq \mathbf{0}$,т. е существует k такой, что $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0k} > 0$. (По свойству строгой монотонности не существует $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^l_+$ такого, что $\mathbf{0} \succ \boldsymbol{z}$.) Пусть ε – вектор, где на месте k стоит 1, а на остальных местах 0. Рассмотрим теперь перераспределение

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{i_0}(n) = \tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} - \frac{1}{n}\varepsilon$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(n) = \tilde{\boldsymbol{x}}_i + \frac{1}{n(n-1)}\varepsilon \;\; \forall\; i \neq i_0$$

По свойству строгой монотонности, имеем $\dot{\boldsymbol{x}}_i(n) \succ_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i(n) \;\forall i \neq i_0 \;\forall n$, отметим, что по свойству непрерывности предпочтений найдется такое n^* такое, что $\dot{\boldsymbol{x}}_{i_0}(n^*) \succ_{i_0} \bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Таким образом, мы нашли допустимое распределение $(\dot{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ которое строго доминирует допустимое распределение $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, чего быть не может, так $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ принадлежит слабой границе Парето.

2) Доказательство этого утверждения оставляется в качестве упражнения.

■

Утверждение 8. (Первая теорема благосостояния)

Вальрасовское равновесие $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{p})$ всегда принадлежит слабой границе Парето $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$.

Вальрасовское равновесие $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{p})$ при условии локальной ненасыщаемости предпочтений всегда принадлежит сильной границе Парето: $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{P}$.

Доказательство:

1. Эта часть теоремы доказывается по аналогии со 2-й частью и оставляется в качестве упражнения.

2. Предположим, что $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \notin \mathcal{P}$. Тогда существует допустимое состояние экономики $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$, такое что $\tilde{\boldsymbol{x}}_i \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i \forall i$ и существует потребитель i_0, такой что $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$.

Поскольку $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$, то $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} > \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$, поскольку $\bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$ — решение задачи потребителя, чего не могло бы быть, если бы набор $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0}$ был допустимым.

Покажем теперь, что из $\tilde{\boldsymbol{x}}_i \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i \forall i$ следует, что $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i \geqslant \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i$. Пусть это не так и для некоторого потребителя i $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i < \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i$. Существует достаточно малая окрестность точки $\tilde{\boldsymbol{x}}_i$, для точек которой все еще выполнено $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i < \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i$. По локальной ненасыщаемо-

[2] Предпочтения называются полустрого монотонными, если из $\boldsymbol{x} \gg \boldsymbol{y}$ следует, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

сти в этой окрестности существует набор $\check{\boldsymbol{x}}_i$, такой что $\check{\boldsymbol{x}}_i \succ_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i$. Это противоречит тому, что $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — оптимум в задаче потребителя.

Просуммируем полученные неравенства по всем i:

$$\sum_i \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i > \sum_i \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i.$$

Поскольку $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ максимизирует прибыль на Y_j, то $\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{y}}_j$. Просуммируем эти неравенства по всем j:

$$\sum_j \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant \sum_j \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

При локальной ненасыщаемости выполнен закон Вальраса (бюджетное ограничение выходит на равенство). Так как $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя, то:

$$\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \gamma_{ij}\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j.$$

Просуммировав по всем потребителям, получим

$$\sum_i \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i = \sum_i (\boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \gamma_{ij}\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j) = \sum_i \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j (\sum_i \gamma_{ij})\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j =$$
$$= \sum_i \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j.$$

В результате получим цепочку соотношений

$$\sum_i \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i > \sum_i \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i = \sum_i \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant \sum_i \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

С другой стороны, состояние $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ допустимо и выполнены материальные балансы:

$$\sum_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \sum_i \boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

Домножив на (неотрицательные) цены, получим

$$\sum_i \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \sum_i \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

Получили противоречие. Значит, $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{P}$.

■

Утверждение 9. (Вторая теорема благосостояния)

Пусть предпочтения потребителей выпуклы, непрерывны и локально ненасыщаемы, технологические множества каждого производителя выпуклы и по крайней мере одно удовлетворяет свойству свободы расходования.

Тогда если $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — оптимальное по Парето состояние и $\hat{\boldsymbol{x}}_i \gg \mathbf{0}$ $\forall i$, то существуют цены $\boldsymbol{p}$, такие что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{p})$ является равновесием Вальраса при некотором распределении собственности $\boldsymbol{\omega}_i$ и γ_{ij}.

<u>Доказательство</u>:

Введем ряд обозначений которые нам понадобятся в дальнейшем для доказательства этого утверждения.

Обозначим множество лучших чем $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ точек (для потребителя i) через

$$L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i) = \{\boldsymbol{x}_i \geqslant \mathbf{0} \mid \boldsymbol{x}_i \succ_i \hat{\boldsymbol{x}}_i\}.$$

Поскольку предпочтения потребителей выпуклы, то, как несложно показать, $L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$ также выпуклы и, значит, их сумма

$$L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_i L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i) = \{\sum_i \boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{x}_i \geqslant \mathbf{0}, \boldsymbol{x}_i \succ_i \hat{\boldsymbol{x}}_i\}$$

выпукла. Кроме того, $L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$ непусты по локальной ненасыщаемости, значит и $L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ непусто.

Множество

$$Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma = \sum_j Y_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma = \{\sum_j \boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \mid \boldsymbol{y}_j \in Y_j\}.$$

тоже является выпуклым в силу выпуклости технологических множеств и непустым, так как ему принадлежит точка $\sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$.

Поскольку $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — оптимум Парето, то множества $L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ и $Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ не имеют общих точек:

$$L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}) \cap (Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma) = \varnothing.$$

Предположим, что существует общая точка $\boldsymbol{z} \in L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ и $\boldsymbol{z} \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Это означало бы, что существует состояние экономики $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, такое что $\boldsymbol{x}_i \in X_i$, $\boldsymbol{x}_i \succ_i \hat{\boldsymbol{x}}_i\ \forall i$, $\boldsymbol{y}_j \in Y_j$ $\forall j$, $\sum_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{z}$ и $\sum_j \boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma = \boldsymbol{z}$. Тем самым мы нашли бы допустимое состояние экономики, которое доминирует оптимальное по Парето состояние $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$, чего быть не может.

Поскольку множества $L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ и $Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ выпуклы, непусты и не пересекаются, к ним применима теорема об отделимости. Поэтому существует вектор $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l$, $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ и число $r \in \mathbb{R}$, такие что

$$\boldsymbol{pz} \geqslant r, \text{ если } \boldsymbol{z} \in L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$$

и

$$\boldsymbol{pz} \leqslant r, \text{ если } \boldsymbol{z} \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma.$$

Пусть $\boldsymbol{x}$ — такой набор допустимых потребительских наборов, что $\boldsymbol{x}_i \succeq_i \hat{\boldsymbol{x}}_i\ \forall i$. Покажем, что $\boldsymbol{p}\sum_i \boldsymbol{x}_i \geqslant r$.

Из локальной ненасыщаемости $\succeq_i$ следует, что для любого натурального числа n в окрестности $\boldsymbol{x}_i$ существует набор $\boldsymbol{x}_i^n$, такой, что $\boldsymbol{x}_i^n \succ \boldsymbol{x}_i$ и $\boldsymbol{x}_i^n \in V_{1/n}(\boldsymbol{x}_i)$, где $V_{1/n}(\boldsymbol{x}_i)$ — шар с центром $\boldsymbol{x}_i$ и радиусом $1/n$. Заметим, что последовательность $\boldsymbol{x}_i^n$ сходится к $\boldsymbol{x}_i$. Поскольку $\boldsymbol{x}_i^n \succ \boldsymbol{x}_i \succeq \hat{\boldsymbol{x}}_i$, то $\boldsymbol{p}\sum_i \boldsymbol{x}_i^n \geqslant r$. Переходя к пределу по n, имеем $\boldsymbol{p}\sum_i \boldsymbol{x}_i \geqslant r$.

Покажем, что $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{0}$. Пусть это не так, и существует благо k, такое что $p_k<0$. Рассмотрим некоторый вектор $\bar{\boldsymbol{z}} \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Существуют $\bar{\boldsymbol{y}}_j \in Y_j$, такие что $\sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j = \bar{\boldsymbol{z}}$. По условию теоремы существует предприятие j_1, технологическое множество которого характеризуется свободой расходования. Для этого предприятия $\bar{\boldsymbol{y}}_{j_1} - t\boldsymbol{e}^k \in Y_{j_1}$, где $\boldsymbol{e}^k$ — k-й единичный орт, t — положительное число. Поэтому $\bar{\boldsymbol{z}} - t\boldsymbol{e}^k \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Для $\bar{\boldsymbol{z}}$ выполнено $\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{z}} \leqslant r$. Можно подобрать достаточно большое t, так что $\boldsymbol{p}(\bar{\boldsymbol{z}} - t\boldsymbol{e}^k) > r$. Но это противоречит тому, что $\bar{\boldsymbol{z}} - t\boldsymbol{e}^k \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$.

Поскольку $\hat{\boldsymbol{x}}_i \succeq \hat{\boldsymbol{x}}_i\ \forall i$ (по рефлексивности отношения предпочтения), то $\boldsymbol{p}\sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \geqslant r$. С другой стороны, так как $\sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$, то $\boldsymbol{p}\sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_\Sigma \leqslant r$.

Поскольку состояние $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является допустимым, то $\sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Домножив на $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{0}$ имеем

$$\boldsymbol{p}\sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \boldsymbol{p}\sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_\Sigma.$$

Получим цепочку неравенств

$$r \leqslant \boldsymbol{p} \sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \boldsymbol{p} \sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{p\omega}_\Sigma \leqslant r.$$

откуда $\boldsymbol{p}\sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{p}\,(\sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma) = r$.

Возьмем $\boldsymbol{p}$ в качестве цен равновесия и покажем, что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{p})$ является равновесием.

Покажем сначала, что при этих ценах прибыль каждого предприятия j_0 максимальна в точке $\hat{\boldsymbol{y}}_{j_0}$. Пусть $\boldsymbol{y}_{j_0} \in Y_{j_0}$. Тогда $\boldsymbol{y}_{j_0} + \sum_{j\neq j_0} \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ и выполнено

$$\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{y}_{j_0} + \textstyle\sum_{j\neq j_0} \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma) \leqslant \boldsymbol{p}\,(\sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma) = r.$$

Отсюда $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_{j_0} \leqslant \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{y}}_{j_0}$.

Теперь покажем, что при ценах $\boldsymbol{p}$ полезность каждого потребителя i_0 максимальна в точке $\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Пусть $\boldsymbol{x}_{i_0} \in X_{i_0}$ и $\boldsymbol{x}_{i_0} \succ_{i_0} \hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Покажем, что этот лучший набор стоит дороже, чем $\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$ в ценах $\boldsymbol{p}$.

Так как $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, ..., \boldsymbol{x}_{i_0}, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_n)$ не хуже для каждого потребителя, чем $\hat{\boldsymbol{x}}$, то

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_{i_0} + \boldsymbol{p}\textstyle\sum_{i\neq i_0} \hat{\boldsymbol{x}}_i \geqslant r = \boldsymbol{p}\sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i.$$

Поэтому $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_{i_0} \geqslant \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Нам нужно показать, что неравенство здесь строгое. Предположим, что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_{i_0} = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Поскольку $\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0} \gg \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{p}\geqslant\neq\boldsymbol{0}$, то существует допустимый набор $\boldsymbol{x}'_{i_0}$, такой что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'_{i_0} < \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_{i_0} = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$ (например, $\boldsymbol{x}'_{i_0} = \alpha\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$, $0<\alpha<1$). Рассмотрим выпуклые комбинации $\alpha\boldsymbol{x}'_{i_0} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_{i_0}$, $\alpha\in[0,1]$. По непрерывности предпочтений найдется достаточно малое положительное α, такое что

$$\boldsymbol{x}''_{i_0} = \alpha\boldsymbol{x}'_{i_0} + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}_{i_0} \succ_{i_0} \hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}.$$

Набор потребительских наборов $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, ..., \boldsymbol{x}''_{i_0}, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_n)$ не хуже для каждого потребителя, чем $\hat{\boldsymbol{x}}$, откуда $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}''_{i_0} + \boldsymbol{p}\sum_{i\neq i_0} \hat{\boldsymbol{x}}_i \geqslant r = \boldsymbol{p}\sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$. Но, с другой стороны, $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'_{i_0} < \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Получили противоречие. Значит, $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_{i_0} > \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$.

Таким образом, мы доказали, что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{p})$ является равновесием Вальраса. В качестве распределения собственности можно взять, например,

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i}{\boldsymbol{p}\sum_s \hat{\boldsymbol{x}}_s}\boldsymbol{\omega}_\Sigma \qquad \text{и} \qquad \gamma_{ij} = \frac{\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i}{\boldsymbol{p}\sum_s \hat{\boldsymbol{x}}_s}\ \forall j.$$

■

<u>Замечание:</u> Отметим, что утверждение теоремы остается справедливым, если заменить свободу расходования для технологического множества некоторого производителя на монотонность предпочтений некоторого потребителя.

Пусть предпочтения индивидуума задаются непрерывными функциями полезности. Сопоставим каждому индивидууму такое неотрицательное число α_i, такое, что

$\sum_{i\in I}\alpha_i = 1$. Введем в рассмотрение функцию $u^{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\in I}\alpha_i u_i(\boldsymbol{x}_i)$ Рассмотрим теперь следующую экстремальную задачу:

Задача поиска оптимума Парето.

$$u^{\alpha}(\boldsymbol{x}) \to \max_{\boldsymbol{x},\mathbf{y}}$$

$$\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i \leqslant \sum_{j\in J}\boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{\omega}_{\Sigma}, \qquad (*)$$

$$\boldsymbol{y}_j \in Y$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqslant \mathbf{0}.$$

Утверждение 10.

(1) Если $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ – решение задачи (*), то $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$, а если, кроме того, $\alpha_i \gg 0$, то $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{P}$.

(2) Пусть функции полезности $u_i(.)$ непрерывны и вогнуты, технологические множества Y_j выпуклы. Тогда если $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$, то найдутся такие неотрицательные α_i ($\sum_{i\in I}\alpha_i = 1$), что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ будет решением задачи (*).

Доказательство:

(1) Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ – решение задачи (*) и $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \notin \mathcal{WP}$. Тогда найдется такое допустимое состояние $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma})$ (отметим, что $\mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma})$ есть допустимое множество для задачи (*)), что $u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) > u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)\ \forall\ i\in I$. По определению функции $u^{\alpha}(.)$ имеем, что $u^{\alpha}(\bar{\boldsymbol{x}}) > u^{\alpha}(\hat{\boldsymbol{x}})$. Таким образом, получили противоречие с тем, что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ – решение задачи (*). Доказательство для случая $\alpha_i \gg 0$ полностью аналогично.

(2) Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$. Введем обозначение $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}_1),..., u_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}}))'$. Введем в рассмотрение следующее множество:

$$U = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma}) \colon \boldsymbol{v} \leqslant \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\}.$$

Множество U непусто, так как $\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) \in U$. Покажем, что U — выпуклое множество. Пусть $\boldsymbol{v}' \in U$ и $\boldsymbol{v}'' \in U$. Это означает, что существуют допустимые состояния экономики $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma})$ и $(\boldsymbol{x}'', \boldsymbol{y}'') \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma})$, такие что $\boldsymbol{v}' \leqslant \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}')$ и $\boldsymbol{v}'' \leqslant \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}'')$. Покажем, что

$$\beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'' \in U, \text{ где } \beta \in (0,1).$$

Несложно показать, что

$$(\beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{x}'', \beta\boldsymbol{y}' + (1-\beta)\boldsymbol{y}'') \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma}).$$

Так как $u_i(.)$ — вогнутые функции, то

$$\boldsymbol{u}(\beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{x}'') \geqslant \beta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}') + (1-\beta)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}'').$$

Это означает, что $\beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'' \leqslant \boldsymbol{u}(\beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{x}'')$, т.е. $\beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'' \in U$.

Множество $\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v}_i > u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)\ \forall i\}$ также является непустым и выпуклым.

Поскольку $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$, то $U \cap (\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}) = \varnothing$, в противном случае мы нашли бы допустимое состояние экономики, в котором каждый потребитель имел бы большую полезность, чем в $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$.

По теореме об отделимости существует разделяющая эти два множества гиперплоскость, т.е. существуют вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ и число b, такие что

$\boldsymbol{a}\boldsymbol{v} \leqslant b$ при $\boldsymbol{v} \in U$

и $\boldsymbol{a}\boldsymbol{v} \geqslant b$ при $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$.

Покажем, что $\boldsymbol{a} \geqslant 0$. Предположим, что существует i, для которого $a_i < 0$. Тогда если $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$, то $\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{e}^i \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$, где t — положительное число, $\boldsymbol{e}^i$ — i-й орт. Мы всегда можем подобрать достаточно большое t, чтобы выполнялось $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{e}^i) < b$. Но это противоречит тому, что $\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{e}^i \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$.

Рассмотрим последовательность $\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + 1/n\ \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — вектор, состоящий из единиц. Поскольку $\boldsymbol{v}_n \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++} \forall n$, то $\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}_n \geqslant b$. Переходя к пределу, получим $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) \geqslant b$. С другой стороны, $\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) \in U$ и $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) \leqslant b$, т.е. $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) = b$.

Возьмем в качестве $\boldsymbol{\alpha}$ вектор $\boldsymbol{a}/\sum a_i$. Не существует пары $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_\Sigma)$, такой что $\sum \alpha_i u_i(\boldsymbol{x}_i) > \sum \alpha_i u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$. Действительно, для любой пары $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_\Sigma)$ выполнено $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in U$, откуда $\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \leqslant b = \boldsymbol{a}\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})$. Разделив это неравенство на $\sum a_i$, получим $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})$. Это означает, что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является решением задачи (*).

■

Удобным инструментом для иллюстрации введенных понятий является «ящик Эджворта». Ящик Эджворта — это диаграмма, которая позволяет наглядно представить экономику с 2 потребителями, 2 благами, в которой множества допустимых потребительских наборов имеют вид $\boldsymbol{x}_1 \geqslant \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{x}_2 \geqslant \mathbf{0}$. На этой диаграмме потребление 1-го участника (x_1^1, x_1^2) представляется в обычной системе координат, а потребление 2-го участника (x_2^1, x_2^2) — в перевернутой с центром в точке $(\omega_\Sigma^1, \omega_\Sigma^2)$, если смотреть из системы координат 1-го участника. Если балансы по благам в рассматриваемой точке $\boldsymbol{x}$ выполнены, то точка (x_1^1, x_1^2) в первой системе координат совпадет с точкой (x_2^1, x_2^2) во второй системе координат, что позволяет изобразить $\boldsymbol{x}$ одной точкой на данной диаграмме.

Чтобы можно было представить себе структуру равновесия, удобно воспользоваться графиками кривых безразличия и множеств лучших точек участников.

Напомним, что кривая безразличия i-го участника, соответствующая точке $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, есть множество $I_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) = \{\boldsymbol{x}_i \geqslant 0 \mid u_i(\boldsymbol{x}_i) = u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)\}$. Множество точек, не худших, чем точка $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, есть множество $\overset{+}{L}_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) = \{\boldsymbol{x}_i \geqslant 0 \mid u_i(\boldsymbol{x}_i) \geqslant u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)\}$.

В терминах этих кривых точка $\hat{\boldsymbol{x}}$ есть Парето-оптимум рассматриваемой экономики, если не существует допустимой точки $\boldsymbol{x}$, такой что $\boldsymbol{x}_1 \in \overset{+}{L}_1(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$, $\boldsymbol{x}_2 \in \overset{+}{L}_2(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$ и выполнено *по крайне мере одно* из соотношений $\boldsymbol{x}_1 \notin I_1(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$, $\boldsymbol{x}_2 \notin I_2(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$.

Точка $\hat{\boldsymbol{x}}$ принадлежит слабой границе Парето, если не существует допустимой точки $\boldsymbol{x}$, такой что $\boldsymbol{x}_1 \in \overset{+}{L}_1(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$, $\boldsymbol{x}_2 \in \overset{+}{L}_2(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$, $\boldsymbol{x}_1 \notin I_1(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$ и $\boldsymbol{x}_2 \notin I_2(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$.

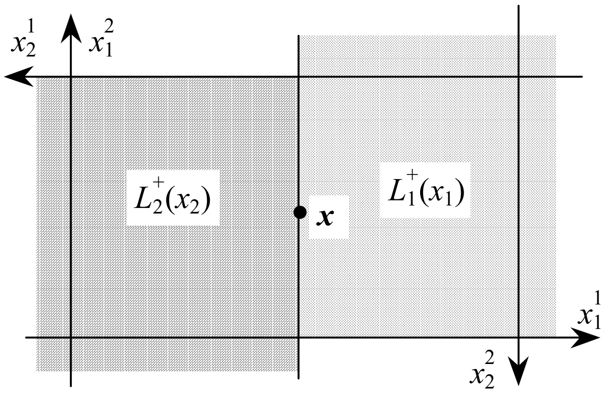
Для того, чтобы точку $\bar{\boldsymbol{x}}$ можно было реализовать как равновесие, необходимо (но в общем случае недостаточно), чтобы существовала прямая, проходящая через эту точку, такая что она разделяет множества $L_1^+(\bar{\boldsymbol{x}}_1)$ и $L_2^+(\bar{\boldsymbol{x}}_2)$. Наклон этой прямой равен отношению цен. Сама эта прямая является общим для обоих потребителей бюджетным ограничением.

Рассмотрим несколько примеров модели экономики обмена (или распределения) на ящике Эджворта. В каждом из них построим слабую и сильную границы Парето и рассмотрим взаимосвязь между ними.

Пример 1. Оба потребителя ценят только первое благо:

$$u_1 = x_1^1 \quad \text{и} \quad u_2 = x_2^1$$

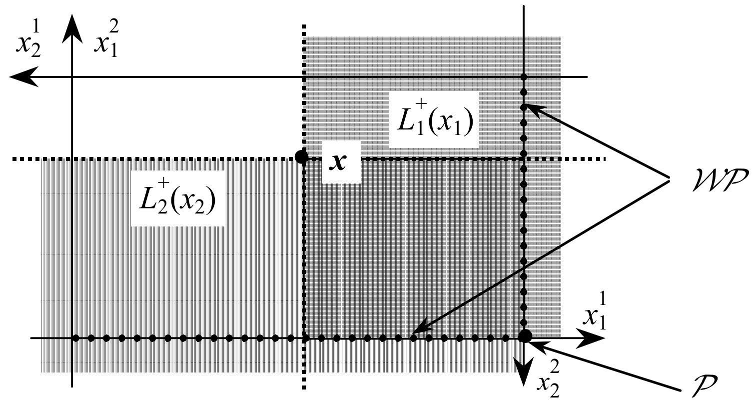
В этом случае любая точка ящика Эджворта принадлежит слабой и сильной границе Парето.



Каждую из точек можно реализовать как равновесие, при этом p^2=0.

Пример 2. Первый потребитель ценит только первое благо, второй — только второе:

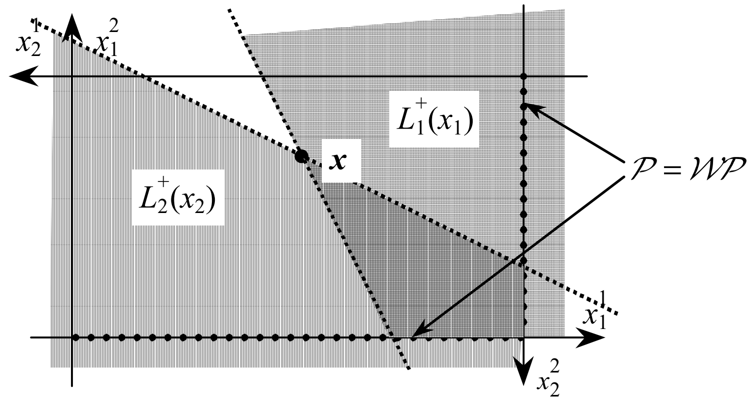
$$u_1 = x_1^1 \quad \text{и} \quad u_2 = x_2^2$$

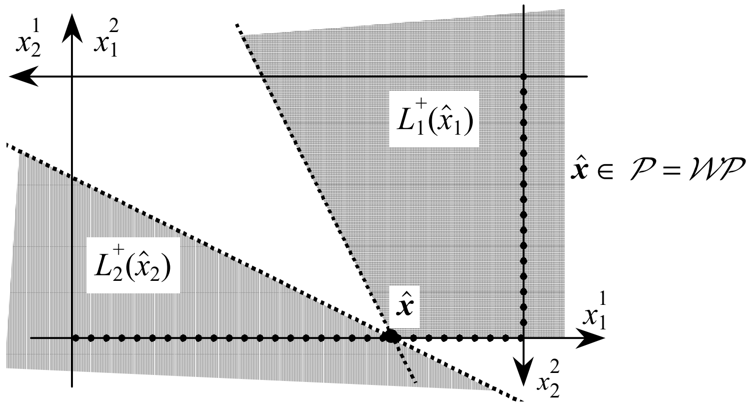


В этом случае правая и нижняя стороны ящика Эджворта составляют слабую границу Парето, а правый нижний угол — сильную Парето-границу. Сильную границу Парето можно реализовать как равновесие при любых ценах.

Пример 3. Потребители имеют линейные функции полезности с положительными коэффициентами:

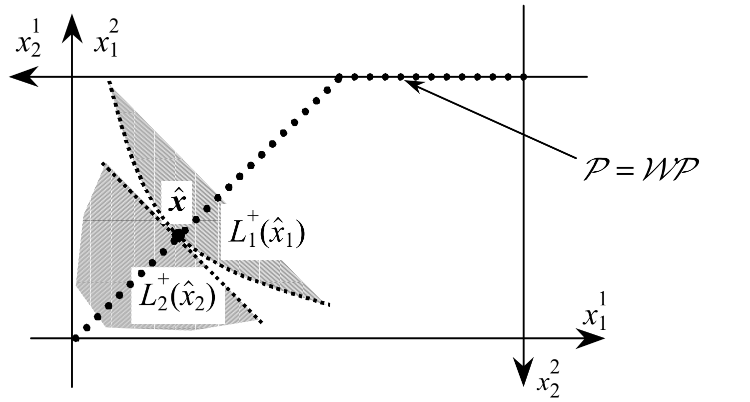
$$u_1 = 2x_1^1 + x_1^2 \qquad \text{и} \qquad u_2 = x_2^1 + 2x_2^2.$$





Пример 4. Потребители имеют функции полезности

$$u_1 = \ln x_1^1 + \ln x_1^2 \qquad \text{и} \qquad u_2 = x_2^1 + x_2^2.$$

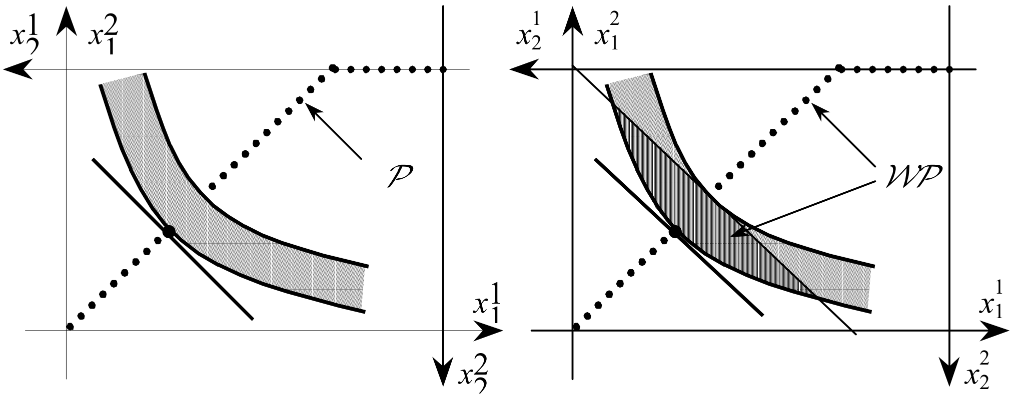


Пример 5. Первый потребитель имеет функцию полезности с "толстой" кривой безразличия

$$u_1 = \begin{cases} x_1^1 x_1^2 & x_1^1 x_1^2 < 2 \\ 2 & 2 \leqslant x_1^1 x_1^2 \leqslant 3 \\ x_1^1 x_1^2 - 1 & x_1^1 x_1^2 \geqslant 3 \end{cases}$$

и

$$u_2 = x_2^1 + x_2^2.$$



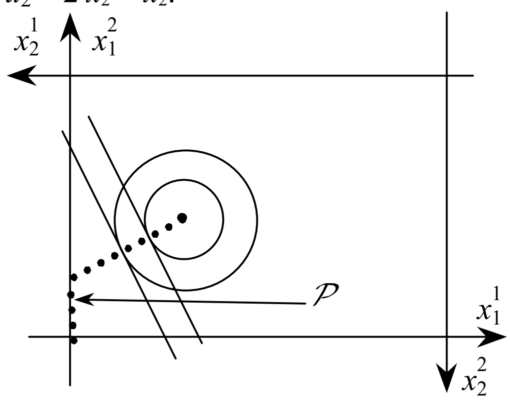
Данная ситуация представляет собой контрпример к 1-й теореме благосостояния и показывает важность условия локальной ненасыщаемости. Точки в заштрихованной области правого рисунка можно реализовать как равновесие, но они не являются Парето-оптимальными.

Пример 6. Первый потребитель насыщаем

$$u_1 = -(x_1^1 - 1)^2 - (x_1^2 - 1)^2$$

и

$$u_2 = 2\, x_2^1 + x_2^2.$$

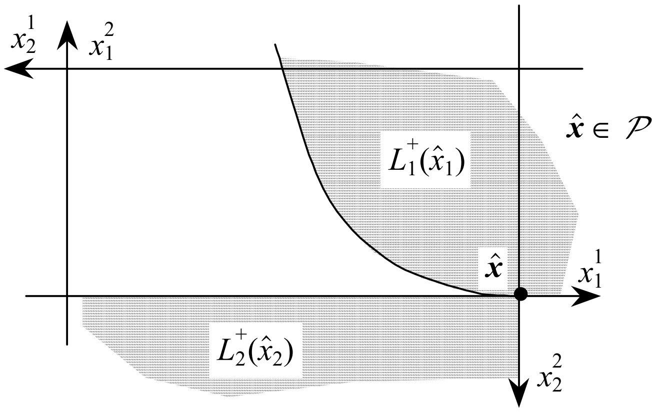


Пример 7. Потребители имеют функции полезности

$$u_1 = x_1^1 + \sqrt{x_1^2}$$

и

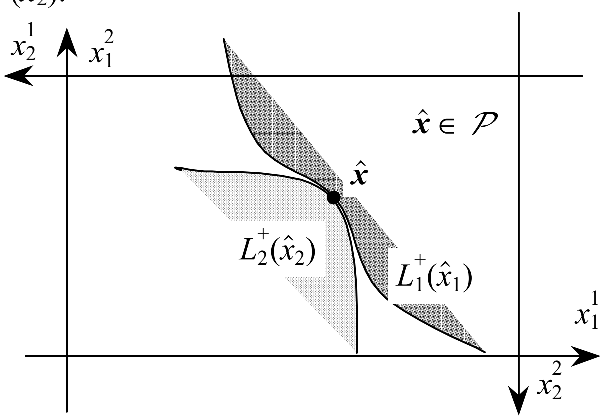
$$u_2 = x_2^2.$$



Эта экономика представляет собой контрпример ко 2-й теореме благосостояния, когда оптимум Парето не внутренний. Правый нижний угол ящика Эджворта ($\hat{\boldsymbol{x}}$) представляет собой оптимум Парето, но не может быть реализован как равновесие ни при каких ценах. Разделяющая гиперплоскость существует: $z_2 = 0$, но при ценах p_1=0 и p_2>0 набор $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ не является решением задачи 1-го потребителя, так как полезность не ограничена сверху.

<u>Пример 8</u>. Контрпример ко 2-й теореме благосостояния.

1-й потребитель имеет невыпуклые предпочтения и Парето-оптимальную точку $\hat{\boldsymbol{x}}$ нельзя реализовать как равновесие — не существует прямой, которая бы разделяла $L_1^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$.



<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Пусть в ситуации Примера 1 ($u_1 = x_1^1$, $u_2 = x_2^1$) совокупные начальные запасы экономики положительны $\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$. Покажите формально, что:

а) Любая точка ящика Эджворта ($\boldsymbol{x}_1 \in [0, \omega_\Sigma^1] \times [0, \omega_\Sigma^2]$) принадлежит слабой и сильной границе Парето.

б) Каждую из точек ящика Эджворта можно реализовать как равновесие, и при этом p^2=0.

2. Пусть в ситуации Примера 2 ($u_1 = x_1^1$, $u_2 = x_2^2$) совокупные начальные запасы экономики положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$). Покажите формально, что:

а) Правая ($x_1^1 = \omega_\Sigma^1$, $x_1^2 \in [0, \omega_\Sigma^2]$) и нижняя ($x_1^1 \in [0, \omega_\Sigma^1]$, $x_1^2 = 0$) стороны ящика Эджворта составляют слабую границу Парето, а правый нижний угол ($\boldsymbol{x}_1 = (\omega_\Sigma^1, \omega_\Sigma^2)$) — сильную Парето-границу.

б) Сильную границу Парето можно реализовать как равновесие при любых неотрицательных ценах.

3. Пусть, как и в Примере 3, потребители имеют линейные функции полезности с положительными коэффициентами,

$$u_1 = \alpha_1 x_1^1 + \beta_1 x_1^2 \qquad \text{и} \qquad u_2 = \alpha_2 x_2^1 + \beta_2 x_2^2,$$

совокупные начальные запасы экономики положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$). Продемонстрируйте формально, что сильная и слабая граница Парето совпадают в этой экономике. Найдите их в зависимости от значений коэффициентов.

4. Пусть в ситуации Примера 4 ($u_1 = \ln x_1^1 + \ln x_1^2$, $u_2 = x_2^1 + x_2^2$) совокупные начальные запасы экономики положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$). Продемонстрируйте формально, что сильная и слабая граница Парето совпадают в этой экономике. Найдите их в зависимости от величины начальных запасов.

5. В ситуации Примера 5 при достаточно больших совокупных начальных запасах найдите формально сильную и слабую границы Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие. Как соотносятся между собой эти три множества?

6. В ситуации Примера 6 ($u_1 = -(x_1^1 - 1)^2 - (x_1^2 - 1)^2$, $u_2 = 2\,x_2^1 + x_2^2$) при достаточно больших совокупных начальных запасах найдите формально границу Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие.

7. В ситуации Примера 7 ($u_1 = x_1^1 + \sqrt{x_1^2}$, $u_2 = x_2^2$) при положительных совокупных начальных запасах найдите формально границу Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие.

8. Покажите, что в экономике обмена прирост начальных запасов потребителя может привести к падению его полезности в точке равновесия.
Указание. Рассмотрите экономику с двумя товарами и двумя потребителями с одинаковыми предпочтениями, описываемыми следующей квазилинейной функцией полезности

$$u(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1} + x_2,$$

рассмотрите сравнительную статику потребителя 1 в зависимости от изменения начальных запасов ω_1 и ω_2.

9. Предположим, что в экономике обмена с непрерывными, строго выпуклыми и строго монотонными квазилинейными сепарабельными предпочтениями происходит перераспределение начальных запасов. Покажите, что если начальные запасы потребителя возрастают, то его полезность не может упасть.

а) Рассмотрим снова передачу ресурсов от первого потребителя ко второму, как и выше, но на этот раз предпочтения не квазилинейные предположите, что передаваемое количество мало и что изменение (относительное) равновесной цены мало. Покажите, что полезность потребителя 1 может упасть. Проинтерпретируйте с точки зрения соотношения между эффектом замены и эффектом дохода.

б) Покажите, что в экономике с двумя товарами и двумя потребителями этот парадокс может произойти только в случае единственности равновесия. (Подсказка: Покажите, что если передача начальных запасов потребителя 1 ведет к уменьшению его полезности тогда в первоначальной ситуации должно существовать еще одно равновесие с еще более низким уровнем полезности у потребителя 1).