1. Поведение потребителя в условиях риска

Предпочтения на лотереях и их представимость линейной функцией полезности

Обычная ситуация выбора, с которой сталкивается экономические агенты, — это ситуация, когда альтернативы представляют собой распределения вероятностей на некотором множестве возможных ситуаций. Будем называть это множество множеством состояний мира. С точки зрения теории вероятностей это множество элементарных исходов. Поскольку мы рассматриваем в данном случае единственного потребителя, то состояние мира можно отождествить с переменной ($\boldsymbol{x}$), описывающей его положение, а множество состояний мира — с множеством ситуаций (X), в которых он может оказаться. Это может быть, например, некоторый набор из множества допустимых потребительских наборов. Часто рассматривают случай, когда $X = \mathbb{R}$. В этом случае альтернативы обычно называют выигрышами (денежными выигрышами). В теории предпочтений на лотереях не имеет значения, какую именно природу имеют рассматриваемые выигрыши.

Определение 1.

Под простой лотереей мы будем понимать пару (X_p, $\boldsymbol{p}$), где X_p — некоторое конечное подмножество множества состояний мира X, $\boldsymbol{p}$ — вектор вероятностей их получения.

В терминах теории вероятностей простая лотерея является простой вероятностной мерой. Понятно, что по определению вероятности

$$p(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 \ (\boldsymbol{x}\in X_p) \ \text{ и } \ \textstyle\sum_{\boldsymbol{x}\in X_p} p(\boldsymbol{x}) = 1.$$

Простую лотерею можно представить следующей таблицей:

$p(\boldsymbol{x}_1)$	$p(\boldsymbol{x}_2)$	...	$p(\boldsymbol{x}_k)$
$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	...	$\boldsymbol{x}_k$

Множество всех возможных простых лотерей участника обозначим $\mathcal{P}$. Заметим, что функцию $p(.)$ можно считать заданной на всем множестве X, считая, что $p(\boldsymbol{x}) = 0$, если $\boldsymbol{x} \notin X_p$. Тогда $X_p = \{\boldsymbol{x} \in X \mid p(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ и без ограничения общности лотерею (X_p, $\boldsymbol{p}$) можно отождествлять с $\boldsymbol{p}$. В дальнейшем будем придерживаться этого упрощения.

Определение 2.

Для любой пары лотерей $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$ и числа $\alpha \in [0,1]$ определим выпуклую комбинацию $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}$ как лотерею, множеством исходов которой является объединение множеств исходов рассматриваемых лотерей ($X_p \cup X_q$), а вероятность исхода $\boldsymbol{x}$ рассчитывается по формуле

$$\begin{cases} \alpha\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)\,\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in X_p\cup X_q \\ 0, & \boldsymbol{x}\notin X_p\cup X_q \end{cases}.$$

Легко понять, что множество всех простых лотерей $\mathcal{P}$ содержит все выпуклые комбинации своих элементов.

Предложенное определение означает фактически, что оценка лотереи потребителем не зависит от способа ее реализации. То есть в оценке любой лотереи потребитель ориентируется лишь на исходы этой лотереи и вероятности, с которыми эти исходы реализуются. Так две указанные ниже лотереи эквивалентны, поскольку приводят в конечном итоге к одним и тем же исходам с одинаковыми вероятностями этих исходов и поэтому рассматриваются как одна и та же альтернатива.

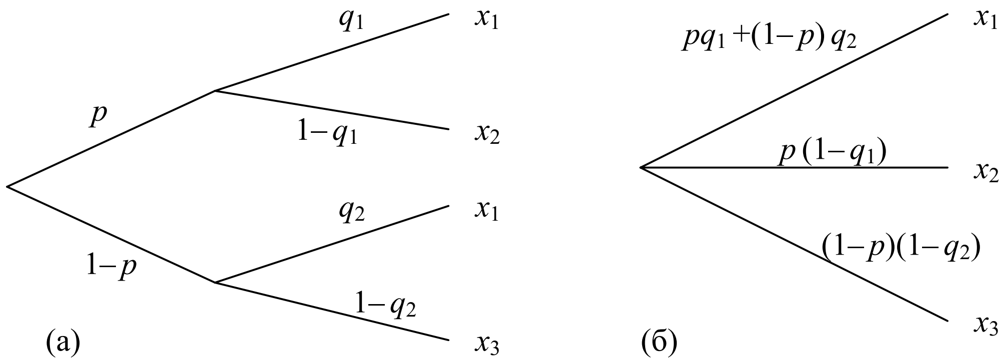


Рисунок 1. Сложная (а) и эквивалентная простая (б) лотерея

На рисунке 1(а) изображена двухэтапная лотерея. На первом этапе потребитель с вероятностью p получает право участвовать в лотерее, в которой исход $\boldsymbol{x}_1$ реализуется с вероятностью q_1, $\boldsymbol{x}_2$ — с вероятностью $1- q_1$, и с вероятностью $1–p$ получает право участвовать в лотерее, при которой с вероятностью q_2 реализуется исход $\boldsymbol{x}_1$ и с вероятностью $1–q_2$ — исход $\boldsymbol{x}_3$. На рисунке 1(б) представлен одноэтапный вариант этой лотереи.

В дальнейшем нам для упрощения выкладок понадобятся некоторые свойства операции выпуклой комбинации лотерей.

Утверждение 1.

Операция выпуклой комбинации лотерей обладает следующими свойствами:

– $\boldsymbol{p} \blacklozenge 1 \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$,
– $\boldsymbol{p} \blacklozenge 0 \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$,
– $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} \blacklozenge (1–\alpha) \blacklozenge \boldsymbol{p}$,
– $(\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}) \blacklozenge \alpha \blacklozenge (\boldsymbol{p} \blacklozenge \gamma \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p} \blacklozenge (\alpha\beta + (1–\alpha)\gamma) \blacklozenge \boldsymbol{q}$.

Доказательство:

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

■

Предположим, что (нестрогое) отношение предпочтения $\succeq$ потребителя определено не только на множестве элементарных исходов X, но и на более широком множестве простых лотерей $\mathcal{P}$. Как и выше, обозначим через $\succ$ соответствующее ему строгое отношение предпочтения, а через ~ отношение эквивалентности.

Мы предполагаем, что предпочтения участника обладают следующими свойствами:

(A1) Отношение $\succ$ отрицательно транзитивно и асимметрично.

(A2) *Аксиома независимости от посторонних альтернатив*:

Пусть $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ — произвольная лотерея. Тогда для любого α, $0 < \alpha \leqslant 1$ выполняется соотношение $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r}$.

(A3) *Аксиома исчерпания Архимеда*:

Если $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{r}$, то существуют числа α, $\beta \in [0,1]$, такие что

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{r}.$$

Определение 3.

Будем называть функцию полезности $U(.)$, представляющую предпочтения на лотереях, линейной, если для произвольных лотерей $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$ и числа $\alpha \in [0,1]$ верно соотношение

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha) U(\boldsymbol{q}).$$

Утверждение 2.

Если предпочтения на множестве лотерей представимы линейной функцией полезности ($U(.)$), то эти предпочтения удовлетворяют свойствам (A1)-(A3).

Доказательство:

(A1) Свойство (A1) очевидно.

(A2) (независимость от посторонних альтернатив)

Пусть $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$. Тогда $U(\boldsymbol{p}) > U(\boldsymbol{q})$.

Пусть $\boldsymbol{r}$ — произвольная лотерея, α — число, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha) U(\boldsymbol{r}) >$$
$$> \alpha U(\boldsymbol{q}) + (1-\alpha) U(\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{q} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r}).$$

Поэтому $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r}$.

(A3) (аксиома исчерпания Архимеда)

Пусть $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{r}$, то есть

$$U(\boldsymbol{p}) > U(\boldsymbol{q}) > U(\boldsymbol{r}).$$

Тогда если

$$\alpha > \frac{U(\boldsymbol{q}) - U(\boldsymbol{r})}{U(\boldsymbol{p}) - U(\boldsymbol{r})},$$

то $\alpha\,(U(\boldsymbol{p}) - U(\boldsymbol{r})) > U(\boldsymbol{q}) - U(\boldsymbol{r})$, откуда по свойству линейности $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q}$. Аналогично, если

$$\beta < \frac{U(\boldsymbol{q}) - U(\boldsymbol{r})}{U(\boldsymbol{p}) - U(\boldsymbol{r})},$$

то $\boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{r}$.

■

Если предпочтения участника на лотереях удовлетворяют аксиомам (A1)-(A3), то можно подобрать линейную функцию полезности, которая представляет предпочтения этого участника, притом такая линейная функция полезности единственна. Ниже мы докажем это, используя следующее вспомогательное предположение:

(A4)[1] Множество $\mathcal{P}$ содержит наихудший $\boldsymbol{w}$ и наилучший $\boldsymbol{b}$ элементы:

$$\boldsymbol{w} \succeq \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{b} \quad \forall\, \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}.$$

Для доказательства этого предварительно докажем ряд утверждений. Всюду предполагается, что выполнены свойства (A1)-(A4).

---

[1] Теорема верна и без этого предположения, см. напр. П.Фишберн. Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. Ниже предлагается доказать это утверждение самостоятельно в виде серии утверждений.

В случае, когда $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{w}$, все лотереи из множества $\mathcal{P}$ эквивалентны и построение функции полезности с нужными свойствами не вызывает труда:

$$U(\boldsymbol{p}) = \mathrm{C},$$

где С — произвольное число. (Понятно, что константа — линейная функция.) Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\boldsymbol{w} \succ \boldsymbol{b}$.

Утверждение 3.

Для любой пары лотерей $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, таких что $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$, и пары чисел $\alpha, \beta \in [0,1]$ условие

$$\beta > \alpha$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}.$$

<u>Доказательство</u>:

Докажем сначала, что из $\beta > \alpha$ следует $\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}$.

В случае $\alpha \neq 0$ рассмотрим лотерею $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} \blacklozenge \frac{\alpha}{\beta} \blacklozenge \boldsymbol{q}$. Для нее выполнено

$$\boldsymbol{r} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} = (\boldsymbol{p} \blacklozenge \frac{\alpha}{\beta} \blacklozenge \boldsymbol{q}) \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \blacklozenge \frac{\alpha}{\beta} \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}.$$

Так как $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$, то по аксиоме (A2) при $\frac{\alpha}{\beta} \in (0,1]$ выполнено

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \blacklozenge \frac{\alpha}{\beta} \blacklozenge \boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \frac{\alpha}{\beta} \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}.$$

Условие $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{r}$ при $\beta \in (0,1]$ позволяет еще раз применить (A2):

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{r} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q},$$

откуда получаем $\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}$.

В предыдущем доказательстве нам требовалось, чтобы $\frac{\alpha}{\beta} \neq 0$. В случае $\alpha = 0$ соотношение $\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}$ выполнено, так как

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \blacklozenge 0 \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}$$

и кроме того по (A2) имеем $\boldsymbol{q} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}$.

Докажем обратное. Пусть для некоторых α и β выполнено $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}$, но при этом $\alpha \geqslant \beta$. Если $\alpha > \beta$, то по только что доказанному $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}$, что противоречит асимметричности строгого отношения предпочтения. Если же $\alpha = \beta$, то $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}$, что противоречит нерефлексивности отношения $\succ$. Таким образом, утверждение доказано.

■

Будем обозначать через $\boldsymbol{f}(\alpha)$ выпуклую комбинацией лучшей и худшей лотерей с коэффициентом $\alpha \in [0,1]$, т.е

$$\boldsymbol{f}(\alpha) = \boldsymbol{b} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{w}.$$

Обозначим множество таких лотерей через $\boldsymbol{f}([0,1])$. Напомним, что мы рассматриваем только случай $\boldsymbol{b} \succ \boldsymbol{w}$. Из определения функции $\boldsymbol{f}(.)$ следует, что она задает взаимоодно-значное соответствие между отрезком [0, 1] и множеством $\boldsymbol{f}([0,1])$, поскольку при $\alpha \neq \beta$ $\boldsymbol{f}(\alpha) \neq \boldsymbol{f}(\beta)$. Следующее утверждение показывает, что на основании функции $\boldsymbol{f}(.)$ можно построить функцию полезности.

Утверждение 4.

Для любой лотереи $\boldsymbol{p}$ из $\mathcal{P}$ найдется единственное число $U(\boldsymbol{p}) \in [0,1]$ такое, что справедливо $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p})) \sim \boldsymbol{p}$. Функция $U(.)$ является функцией полезности, представляющей данные предпочтения.

<u>Доказательство</u>:

Для любой лотереи $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ нам нужно установить, что существует эквивалентная ей лотерея из $\boldsymbol{f}([0,1])$.

Когда $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{b}$ либо $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{w}$ доказательство существования числа $U(\boldsymbol{p})$ тривиально: оно равно 1 и 0 соответственно.

Рассмотрим случай $\boldsymbol{w} \prec \boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{b}$.

Обозначим множество чисел, соответствующих лотереям из $\boldsymbol{f}([0,1])$, которые лучше $\boldsymbol{p}$, через A^+:

$$A^+ = \{\alpha\in[0,1] \mid \boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{f}(\alpha)\}.$$

Аналогично множество чисел, соответствующих лотереям из $\boldsymbol{f}([0,1])$, которые хуже чем $\boldsymbol{p}$, обозначим A^-:

$$A^- = \{\alpha\in[0,1] \mid \boldsymbol{f}(\alpha) \prec \boldsymbol{p}\}.$$

Эти два множества непусты, так как $1 \in A^+$ и $0 \in A^-$.

Так как множества A^+, A^-, непусты и ограничены, то существуют числа

$$\alpha^+ = \inf A^+,\ \alpha^- = \sup A^-.$$

Для этих чисел справедливо соотношение $\alpha^- \leqslant \alpha^+$; в противном случае нашелся бы общий элемент $\alpha\in A^-$, $\alpha\in A^+$, что противоречит нерефлексивности $\succ$.

Покажем, что $\boldsymbol{f}(\alpha^+) \preceq \boldsymbol{p} \preceq \boldsymbol{f}(\alpha^-)$, т.е. $\alpha^+ \notin A^+$ и $\alpha^- \notin A^-$. Предположим противное. Пусть, например, $\boldsymbol{w} \prec \boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{f}(\alpha^+)$. В таком случае в силу (А3) существует γ, такое что для лотереи $\boldsymbol{w}\blacklozenge\gamma\blacklozenge\boldsymbol{f}(\alpha^+)$ справедливо соотношение

$$\boldsymbol{w}\blacklozenge\gamma\blacklozenge\boldsymbol{f}(\alpha^+) \succ \boldsymbol{p}.$$

Поскольку

$$\boldsymbol{w}\blacklozenge\gamma\blacklozenge\boldsymbol{f}(\alpha^+) = \boldsymbol{w}\blacklozenge\gamma\blacklozenge(\boldsymbol{b}\blacklozenge\alpha^+\blacklozenge\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{b}\blacklozenge\alpha^+(1-\gamma)\blacklozenge\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\alpha^+(1-\gamma)),$$

то это означает, что $\boldsymbol{f}(\alpha^+(1-\gamma)) \succ \boldsymbol{p}$. Значит, $\alpha^+(1-\gamma) \in A^+$, а это противоречит определению числа α^+. Итак, предположение $\boldsymbol{f}(\alpha^+) \succ \boldsymbol{p}$ неверно. Поэтому $\boldsymbol{f}(\alpha^+) \preceq \boldsymbol{p}$. Рассуждения для α^- аналогичны. Таким образом,

$$\boldsymbol{f}(\alpha^+) \preceq \boldsymbol{p} \preceq \boldsymbol{f}(\alpha^-).$$

Если сопоставить это с вытекающим из Утверждения **3** и $\alpha^- \leqslant \alpha^+$ соотношением

$$\boldsymbol{f}(\alpha^-) \preceq \boldsymbol{f}(\alpha^+),$$

то

$$\boldsymbol{f}(\alpha^-) \sim \boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{f}(\alpha^+).$$

Таким образом, мы можем выбрать $U(\boldsymbol{p}) = \alpha^+$. Существование числа $U(\boldsymbol{p})$ доказано.

Единственность числа $U(\boldsymbol{p})$ следует из Утверждения **3**.

Теперь покажем, что $U(\boldsymbol{p})$ есть функция полезности. Из Утверждения **3** следует, что из двух лотерей из $\boldsymbol{f}([0,1])$ хуже та, коэффициент которой меньше и обратно:

$$\boldsymbol{f}(\alpha) \prec \boldsymbol{f}(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

Для двух произвольных лотерей $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$ соотношение $\boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{q}$ эквивалентно тому, что $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p})) \prec \boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{q}))$. Поэтому

$$\boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{q} \Leftrightarrow U(\boldsymbol{p}) < U(\boldsymbol{q}).$$

■

Утверждение 5.

Функция полезности $U(.)$, такая что $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p})) \sim \boldsymbol{p}$, является линейной.
Эта функция — единственная (с точностью до линейного преобразования) линейная функция полезности, представляющая данные предпочтения.

<u>Доказательство</u>:

(Линейность)

Мы хотим доказать, что если $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$, $\alpha \in [0,1]$, то выполнено

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha) U(\boldsymbol{q}).$$

При $\alpha=0$ и $\alpha=1$ доказываемое очевидно.

Рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$.

Пусть утверждение теоремы неверно, например, для некоторых $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) < \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha) U(\boldsymbol{q}).$$

Тогда можно подобрать числа $0 \leqslant \beta < U(\boldsymbol{p})$ и $0 \leqslant \gamma < U(\boldsymbol{q})$, такие что

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \alpha\beta + (1-\alpha)\gamma,$$

откуда

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{f}(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma).$$

По свойствам операции комбинирования лотерей

$$\boldsymbol{f}(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) = \boldsymbol{b} \blacklozenge (\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) \blacklozenge \boldsymbol{w} =$$
$$= (\boldsymbol{b} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{w}) \blacklozenge \alpha \blacklozenge (\boldsymbol{b} \blacklozenge \gamma \blacklozenge \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}(\beta) \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma).$$

Поскольку $\beta < U(\boldsymbol{p})$, то $\boldsymbol{f}(\beta) \prec \boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p})) \sim \boldsymbol{p}$, и по аксиоме (A2) получим

$$\boldsymbol{f}(\beta) \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma).$$

Аналогичным образом, поскольку $\gamma < U(\boldsymbol{q})$, то верно соотношение $\boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{q})) \sim \boldsymbol{q}$, и по аксиоме (A2)

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}.$$

Получаем, в противоречие с нерефлексивностью отношения предпочтения $\prec$, цепочку соотношений

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{f}(\beta) \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}.$$

Аналогичным образом можно прийти к противоречию, предположив, что $U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) > \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha) U(\boldsymbol{q})$. Значит,

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha) U(\boldsymbol{q}).$$

(Единственность)

Предположим, что $V(.)$ — другая линейная функция полезности. Обозначим

$$V^*(\boldsymbol{p}) = \frac{V(\boldsymbol{p}) - V(\boldsymbol{w})}{V(\boldsymbol{b}) - V(\boldsymbol{w})}.$$

Данное преобразование является линейным. Покажем, что $V^*(\boldsymbol{p}) = U(\boldsymbol{p})$. Поскольку $V(.)$ линейна, то $V^*(\boldsymbol{p})$ также линейна. Кроме того, функции $V^*(.)$ и $U(.)$ совпадают для худшей и лучшей лотерей:

$$V^*(\boldsymbol{w}) = U(\boldsymbol{w}) = 0 \text{ и } V^*(\boldsymbol{b}) = U(\boldsymbol{b}) = 1.$$

Это означает, что функции $V^*(.)$ и $U(.)$ в силу линейности совпадают на $\boldsymbol{f}([0,1])$. Поскольку любая лотерея из $\mathcal{P}$ эквивалентна лотерее из $\boldsymbol{f}([0,1])$, то $V^*(.)$ и $U(.)$ совпадают на любой лотерее из $\mathcal{P}$.

■

Определение 4.

Функция полезности, представляющая предпочтения на лотереях, называется **функцией полезности Неймана-Моргенштерна** $U(.)$, если существует определенная на множестве исходов функция $u(.)$, такая что полезность любой лотереи рассчитывается как *ожидаемая полезность* ее исходов. Другими словами,

$$U(\boldsymbol{p}) = \sum_{x \in X_p} p(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}).$$

Функция $u(.)$ называется элементарной функцией полезности или функцией Бернулли.

Утверждение 6.
Если $U(.)$ является линейной функцией полезности, представляющей предпочтения на множестве простых лотерей $\mathcal{P}$, то она имеет вид Неймана-Моргенштерна.

***Доказательство*:**

Обозначим $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})$ лотерею в которой $\boldsymbol{x}$ является единственным исходом, т.е.

$$X_p = \{\boldsymbol{x}\}.$$

Определим функцию $u(.)$ на множестве элементарных исходов X по формуле

$$u(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})).$$

Тогда $U(\boldsymbol{p}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in X_p} p(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x})$. Докажем это утверждение по индукции.

Пусть утверждение доказано для лотерей с k исходами, и пусть $\boldsymbol{p}$ — лотерея с k+1 исходом. Пусть $\boldsymbol{x}'$ — один из этих исходов, т.е. $\boldsymbol{x}'\in X_p$. Тогда

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}')\blacklozenge p(\boldsymbol{x}')\blacklozenge \boldsymbol{q},$$

где $\boldsymbol{q}$ — лотерея с $X_q = X_p \backslash \boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})/(1-p(\boldsymbol{x}'))\ \forall \boldsymbol{x}\in X_q$.

В силу линейности функции $U(.)$

$$U(\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}')\blacklozenge p(\boldsymbol{x}')\blacklozenge \boldsymbol{q}) = p(\boldsymbol{x}')\, u(\boldsymbol{x}') + (1-p(\boldsymbol{x}')U(\boldsymbol{q}).$$

В силу предположения индукции

$$U(\boldsymbol{q}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in X_q} q(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in X_q} p(\boldsymbol{x})/(1-p(\boldsymbol{x}'))\, u(\boldsymbol{x}).$$

В итоге получим требуемый результат

$$U(\boldsymbol{p}) = (p(\boldsymbol{x}')\, u(\boldsymbol{x}') + (1-p(\boldsymbol{x}'))\, (\sum_{\boldsymbol{x}\in X_q} p(\boldsymbol{x})/(1-p(\boldsymbol{x}'))\, u(\boldsymbol{x})) =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}\in X_p} p(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}).$$

■

Функция $U(\boldsymbol{p})$ определена нами лишь на простых лотереях. Если в дополнение к свойствам **(A1)-(A3)** предположить, что отношение предпочтения $\succ$ определено на множестве всех лотерей, заданных на X, (т.е. борелевских вероятностных мер на множестве X) и непрерывно (в слабой топологии) на этом множестве, то построенную функцию $U(\boldsymbol{p})$ можно определить на любой вероятностной борелевской мере стандартным способом, поскольку множество простых мер является плотным во множестве всех борелевских мер. Читатель может доказать соответствующие утверждения самостоятельно, обращаясь, в случае необходимости, к учебникам по математическому анализу и топологии.

Будем предполагать, что во всех рассматриваемых ниже ситуациях все необходимые условия существования функции полезности Неймана-Моргенштерна выполнены. Заметим, что, в соответствии с определением функции Н.-М., ее можно записать в следующем виде

$$U(\boldsymbol{p}) = \mathsf{E}(u(\tilde{\boldsymbol{x}})),$$

где $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — случайная величина, определяемая лотереей $\boldsymbol{p}$ (принимающая значения $\boldsymbol{x} \in X_p$ с вероятностями $p(\boldsymbol{x})$), E — оператор математического ожидания. Эти обозначение будем использовать и в дальнейшем.

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Пусть отношение предпочтения на множестве лотерей $\succ$ транзитивно и выполнено свойство (A2). Покажите, что если $\boldsymbol{p}\succ\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}\succ\boldsymbol{s}$, то $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}\succ\boldsymbol{q}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{s}$ ($\alpha\in[0,1]$).

2. Пусть отношение предпочтения на множестве лотерей $\succ$ нерефлексивно и выполнено свойство (A2). Покажите, что если $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{q}$, то $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{q}$ ($\alpha\in[0,1]$).

3. Пусть $\succ$ — отношение предпочтения на множестве лотерей и выполнены свойства (A1)-(A3). Покажите, что если $\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{q}$, то найдется единственное $\alpha\in[0,1]$, такое что $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{r}$.

4. Пусть $\succ$ — отношение предпочтения на множестве лотерей и выполнены свойства (A1)-(A3). Покажите, что если $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{q}$, и $\boldsymbol{r}$ — произвольная лотерея, то $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r} \sim \boldsymbol{q}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}$ ($\alpha\in[0,1]$).

5. Покажите, что функция полезности Неймана-Моргенштерна, представляющая предпочтения на множестве лотерей, существует тогда и только тогда, когда выполнены свойства (A1)-(A3), и при этом функция единственна с точностью до линейного преобразования.
Указание: Пусть $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — две лотереи, такие что $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$. Тогда, как было показано выше, существует функция полезности Н.-М., определенная на "отрезке" $\{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{q}\}$. Пусть теперь $\boldsymbol{s}$ — любая лотерея. Тогда, по отрицательной транзитивности $\succ$, выполняется одно из трех соотношений:

$\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q} \succeq \boldsymbol{s}$.

Предположим, что функция полезности Н.-М., представляющая отношение предпочтения, определена на отрезке $\{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{q}\}$ и пусть $\boldsymbol{s}$ удовлетворяет соотношению: $\boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q}$ ($\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q} \succeq \boldsymbol{s}$) . Тогда существует (и единственно) число α (β) такое, что

$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}$ ($\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{s}$)

Определим $U(.)$ в последних двух случаях на основе соотношений:

$U(\boldsymbol{p}) = \alpha\, U(\boldsymbol{s}) + (1-\alpha)U(\boldsymbol{q})$ ($U(\boldsymbol{q}) = \beta\, U(\boldsymbol{p}) + (1-\beta)U(\boldsymbol{s})$)

Демонстрация линейности определенной таким образом функции в значительной степени воспроизводит этапы доказательства теоремы в частном случае, когда $U(.)$ определена лишь на "отрезке" $\{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{q}\}$.

Отношение к риску

В соответствии со свойствами предпочтений можно разделить экономических агентов на следующие три группы в зависимости от их отношения к риску:
– рискофилы (положительно относящиеся к риску): $\mathsf{E}(u(\tilde{x})) > u(\mathsf{E}(\tilde{x}))$,
– рискофобы (отрицательно относящиеся к риску): $\mathsf{E}(u(\tilde{x})) < u(\mathsf{E}(\tilde{x}))$,
– нейтральные по отношению к риску: $\mathsf{E}(u(\tilde{x})) = u(\mathsf{E}(\tilde{x}))$.
Здесь $\tilde{x}$ — любая "нетривиальная" случайная величина (формально это означает, что вероятность того, что она не совпадает со своим мат. ожиданием не равна нулю).

В дальнейшем мы будем рассматривать только поведение рискофоба. (Анализ поведения рискофила и потребителя, нейтрального по отношению к риску представляется читателю).

Заметим, что соотношение $\mathsf{E}(u(\tilde{x})) \leqslant u(\mathsf{E}(\tilde{x}))$ (так называемое неравенство Йенсена) выполнено тогда и только тогда, когда функция вогнута. Фактически это и есть определение вогнутой функции. Строгое неравенство $\mathsf{E}(u(\tilde{x})) < u(\mathsf{E}(\tilde{x}))$ для произвольной "нетривиальной" случайной величины $\tilde{x}$ выполнено тогда и только тогда, когда функция строго вогнута.

При анализе поведения рискофоба ограничимся рассмотрением инвестиционных решений, когда множество элементарных исходов — подмножество множества действительных чисел; элементарные исходы (выигрыши по лотереям) будем интерпретировать как денежные.

Пусть имеется два актива: безрисковый, не приносящий дохода (это могут быть, например, деньги в ситуации, когда инфляции нет и она не ожидается) и один рисковый с нормой доходности $\tilde{R}$ и ожидаемой нормой доходности $\mathsf{E}\tilde{R}$. У потребителя имеется сумма w, из которой он сумму a инвестирует в рисковый актив, а сумму $w - a$ — в безрисковый. Доходность полученного портфеля — случайная величина

$$\tilde{w} = w - a + (1+\tilde{R})\, a = w + a\,\tilde{R}.$$

Ожидаемая полезность такого портфеля равна

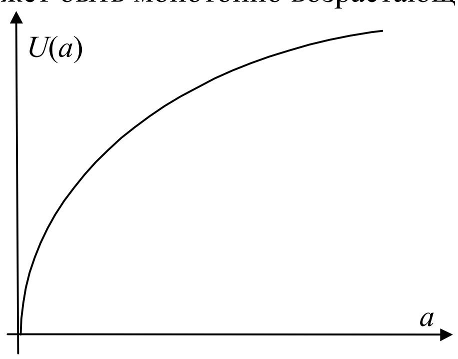
$$U(a) = \mathsf{E}(u(w + a\tilde{R})) = \sum_i p_i u_i(w + aR_i).$$

Мы предполагаем, что финансовый рынок совершенен, т.е. доходность активов не зависит от поведения рассматриваемого экономического агента, и что можно покупать активы в любых количествах без учета бюджетного ограничения («открытая» позиция по рисковым активам).

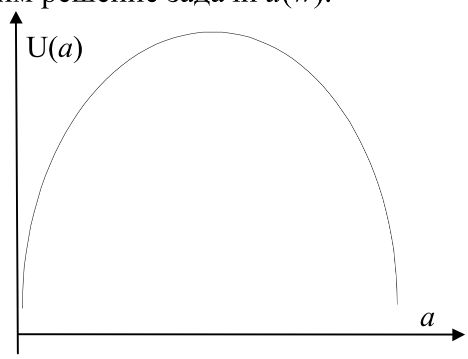
Поведение инвестора описывается следующей задачей:

$$U(a) \to \max$$
$$a \geqslant 0.$$

Кроме того, предполагается, что оптимальный портфель существует, то есть $U(a)$ не может быть монотонно возрастающей. Обозначим решение задачи $a(w)$.



1) Оптимальный портфель не существует



2) Oï òèì àëüí û é ï î ðòô åëü существует

Решение распадается на два случая: $\mathsf{E}\,\tilde{R} \leqslant 0$ и $\mathsf{E}\,\tilde{R} > 0$.

Найдем производную $U(a)$ в точке $a = 0$:

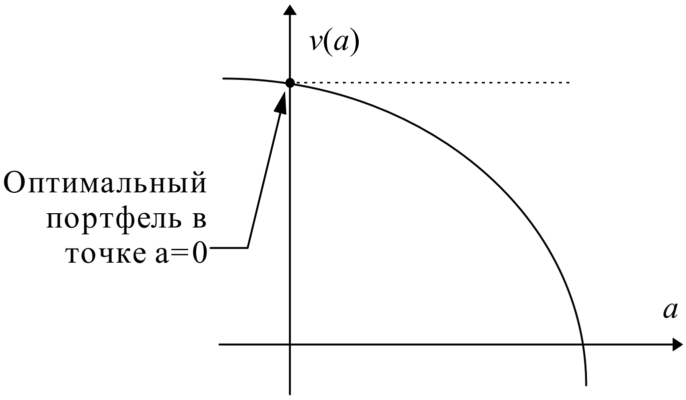
$$U'(a) = \mathsf{E}(u'(w + a\tilde{R})\tilde{R})$$

Вторая производная $U''(a) = \mathsf{E}(u''(w + a\tilde{R})\tilde{R}^2) < 0$, так как мы знаем, что вторая производная функции полезности рискофоба отрицательна в любой точке.

Если $a = 0$ — решение, то должно быть выполнено $U'(0) \leqslant 0$. Поскольку производная в нуле равна $U'(0) = \mathsf{E}(u'(w)\,\tilde{R}) = u'(w)\,\mathsf{E}\,\tilde{R}$, и $u'(w) > 0$, то $\mathsf{E}\,\tilde{R} \leqslant 0$.

С другой стороны, если $\mathsf{E}\tilde{R} \leqslant 0$, то $U'(0) \leqslant 0$. Так как $U''(a) < 0$, то $U'(a) < 0\ \forall a > 0$ и $U(a) < U(0)\ \forall a > 0$. Следовательно, $a = 0$ — решение.

Таким образом, $a(w) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{E}\,\tilde{R} \leqslant 0$.



Если $\mathsf{E}\tilde{R} > 0$, то решение (в предположении, что оно существует) должно быть во внутренней точке ($a > 0$). Так как мы рассматриваем рискофоба, то необходимое и достаточное условие оптимальности портфеля имеет вид

$$\mathsf{E}(u'(w + a\tilde{R})\tilde{R}) = 0.$$

Для оптимальных портфелей

$$\mathsf{E}(u'(w + a(w)\tilde{R})\tilde{R}) \equiv 0.$$

В зависимости от того, как меняется инвестиционное поведение при изменении имеющиеся для инвестиций средств с w_1 до w_2, можно проранжировать поведение рискофобов по их степени неприятия риска.

Рассмотрим лотерею, в которой участник получает (дополнительно к w) выигрыш x_1 с вероятностью p (где $p \in (0,1)$), и x_2 с вероятностью $1-p$. Обозначим соответствующую случайную величину через $\tilde{x}$. Имеет смысл принять участие в лотерее лишь в том случае, если

$$\mathsf{E}(u(w + \tilde{x})) \geqslant \mathsf{E}\, u(w).$$

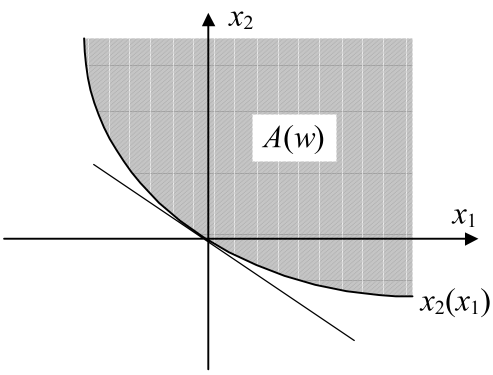
т.е.

$$p\, u(w + x_1) + (1-p)\, u(w + x_2) \geqslant u(w).$$

Обозначим множество всех таких лотерей через

$$A(w) = \{ (x_1, x_2) \mid p\, u(w + x_1) + (1-p)\, u(w + x_2) \geqslant u(w)\}.$$

Нарисуем на плоскости (x_1, x_2) множество $A(w)$. Потребитель будет участвовать во всех лотереях, расположенных в I квадранте, и точно не будет участвовать в лотереях в III квадранте, а вот в II и IV приемлемы лишь частично. Если элементарная функция полезности $u(.)$ вогнута, то множество $A(w)$ выпукло. (Докажите это.)



Для любой лотереи, лежащей на границе этого множества, выполняется:

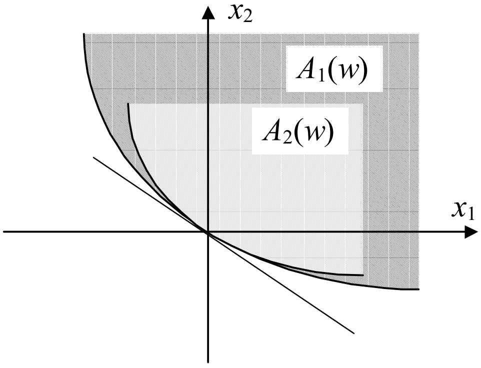
$$pu(w + x_1) + (1 - p)\, u(w + x_2) = u(\omega) \qquad (1)$$

Это уравнение задает зависимость $x_2 = x_2(x_1)$. Подставим это в (1) и продифференцируем по x_1 в точке 0. Используя, тот факт, что $x_2(0) = 0$ получим

$$pu'(w) + (1 - p)\, u'(w)\, x'_2(0) = 0,$$

Это уравнение описывает касательную к $A(w)$ в точке (0,0). Эта касательная имеет наклон $-\dfrac{p}{1-p}$. Поскольку выпуклое множество лежит выше своей касательной, то точки лежащие ниже этой касательной не принадлежат $A(w)$. Таким образом, если x_2 будет меньше, чем $-\dfrac{p}{1-p}x_1$, то участник заведомо не примет участия в такой лотереи (какова бы ни была вероятность p).

Рассмотрим двух рискофобов. Пусть первый из них принимает лотереи, принадлежащие множеству $A^1(w)$, а второй — $A^2(w)$. Если $A^2(w) \subset A^1(w)$ (строгое включение), то естественно считать, что из этих двух рискофобов второй характеризуется большим неприятием риска, чем первый.



Если ни одно из включений $A^2(w) \subset A^1(w)$ и $A^1(w) \subset A^2(w)$ не выполнено, то мы не можем проранжировать рассматриваемых участников, используя данное правило.

Продифференцируем выражение (1) по x_1 дважды в точке 0. Получаем

$$p\,u''(w) + (1-p)\,[\,u''(w)\,(x'_2(0))^2 + u'(w)\,x''_2(0)] = 0$$

Подставив $x'_2(0) = -\dfrac{p}{1-p}$, получим $x''_2(0) = -\dfrac{u''(w)}{u'(w)}\dfrac{p}{(1-p)^2}$.

Мы убедились, что уравнения границ множеств $A^1(w)$ и $A^2(w)$ по первым производным всегда совпадают, а по вторым могут различаться. Если $x''_2(0)$ у первого меньше, чем у второго, то в окрестности точки (0,0) $A^2(w)$ содержится в $A^1(w)$. (Понятно, что глобально это может не выполняться). Поэтому величину $-\dfrac{u''(w)}{u'(w)}$ можно рассматривать как локальную меру неприятия риска.

Определение 5.
Мерой отношения к риску Эрроу-Пратта называется величина

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

В терминах меры Эрроу-Пратта из двух участников можно считать, что тот участник характеризуется большим неприятием риска, у которого мера Эрроу-Пратта всегда больше.

Утверждение 7.
Если у двух участников меры неприятия риска $r^1(.)$ и $r^2(.)$ таковы, что $\forall w$ выполнено $r^1(w) < r^2(w)$, то $\forall w$ выполнено $A^2(w) \subseteq A^1(w)$.

Доказательство:
Доказательство оставляется в качестве упражнения.
■

Пусть ε — некоторая "нетривиальная" случайная величина с нулевым мат. ожиданием ($\mathsf{E}(\varepsilon) = 0$), тогда, как уже говорилось выше, для рискофоба выполнено $\mathsf{E}\, u(w+\varepsilon) < \mathsf{E}\, u(w)$. Плату за риск $\pi_u(w,\varepsilon)$ можно определить как максимальную потерю в доходе, на которую согласен данный участник, чтобы избежать риска (не участвовать в такой лотерее). Чтобы не загромождать запись, будем опускать аргумент w из записи величины платы за риск.

Определение 6.

Плата за риск $\pi_u(\varepsilon)$ определяется из соотношения

$$\mathsf{E}\, u(w+\varepsilon) = u(w - \pi_u(\varepsilon)).$$

Для любого рискофоба плата за риск — величина неотрицательная. Естественно считать, что в терминах платы за риск из двух участников тот характеризуется большим неприятием риска, у которого плата за риск всегда больше.

Можно предложить еще один способ ранжирования рискофобов по их отношению к риску — "степень вогнутости" элементарной функцией полезности. Можно считать, что $u(x)$ "более вогнута", чем $v(x)$, если существует строго вогнутая строго возрастающая функция G такая, что $u(x) = G(v(x))$, тогда участник с элементарной функцией полезности $u(x)$ характеризуется большим неприятием риска.

Оказывается, что все предложенные способы ранжирования эквивалентны, о чем свидетельствует следующее утверждение.

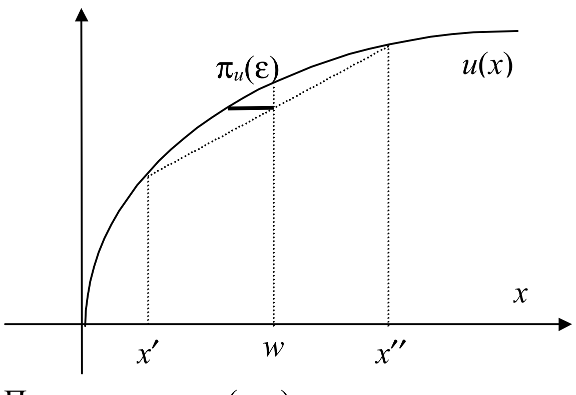
Утверждение 8. (Теорема Пратта).

Пусть два рискофоба характеризуются строго возрастающими элементарными функциями полезности $u(x)$ и $v(x)$. Тогда следующие три условия эквивалентны:

$r_u(w) > r_v(w)\ \forall w$, где $r_u(w)$, $r_v(w)$ — меры отношения к риску Эрроу-Пратта.

Существует строго вогнутая строго возрастающая функция G такая, что $u(x) = G(v(x))$.

Для всех случайных переменных ε, с нулевым мат. ожиданием ($\mathsf{E}\varepsilon = 0$) и ненулевой дисперсией ($\mathsf{E}\varepsilon^2 \neq 0$) выполнено $\pi_u(\varepsilon) > \pi_v(\varepsilon)$.



Плата за риск $\pi_u(\varepsilon,\omega)$

***Доказательство*:**

1 ⇒ 2. Определим G для любого x принадлежащего области значений функции v следующим образом:

$$G(x) = u(v^{-1}(x)).$$

(Поскольку v строго монотонна, то она обратима.)

Мы так определили функцию $G(.)$, что

$$u(w) = G(v(w)), \forall\, w \qquad (2)$$

Продифференцируем последнее соотношение:

$$u'(w) = G'(v(w))\, v'(w). \tag{3}$$

Так как $v'(w) > 0$ и $u'(w) > 0$, то $G'(v(w)) > 0$, значит G строго монотонно возрастает. Продифференцируем еще раз:

$$u''(w) = G''(v(w))\, v'(w) + G'(v(w))\, v''(w). \tag{4}$$

Поделив (4) на (3) , получим

$$-r_u(w) = -r_v(w) + \frac{G''(v(\omega))}{G'(v(\omega))}\, v'(w), \text{ то есть}$$

$$r_v(w) - r_u(w) = \frac{G''(v(\omega))}{G'(v(\omega))}\, v'(w).$$

Но $r_v(w) - r_u(w) < 0$, $v'(w) > 0$, $G'(v(w)) > 0$, следовательно, $G''(v(w)) < 0$, то есть функция G строго вогнута.

2 ⇒ 3. Напомним определение вогнутости функции: функция $f(x)$ вогнута, если для любого набора чисел $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$ верно соотношение: $f(\sum_i \alpha_i x_i) \geqslant \sum_i \alpha_i f(x_i)$. Для строго вогнутой функции для любого набора чисел $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, таких что по крайней мере два из них не равны нулю, верно соотношение: $f(\sum_i \alpha_i x_i) > \sum_i \alpha_i f(x_i)$.

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ таковы, что $u(x) = G(v(x))$. Тогда для случайной величины ε:

$$u(w - \pi_u(\varepsilon)) = \mathsf{E}\, u(w + \varepsilon) = \mathsf{E}\, G(v(w + \varepsilon)) <$$
$$G(\mathsf{E}\, v(w + \varepsilon)) = G(v(w - \pi_v(\varepsilon)) = u(w - \pi_v(\varepsilon)).$$

Здесь мы использовали неравенство Йенсена в строгой форме.

Таким образом, $u(w - \pi_u(\varepsilon)) < u(w - \pi_v(\varepsilon))$, а так как $u(x)$ монотонно возрастает, то из этого соотношения следует, что $w - \pi_u(\varepsilon) < w - \pi_v(\varepsilon)$, то есть $\pi_u(\varepsilon) > \pi_v(\varepsilon)$.

3 ⇒ 1. Пусть ε — случайная величина с нулевым мат. ожиданием ($\mathsf{E}\varepsilon = 0$). Рассмотрим семейство случайных величин $t\varepsilon$ и определим $\pi(t)$ из соотношения:

$$u(w - \pi(t)) = \mathsf{E}\, u(w + t\varepsilon) \tag{5}$$

Покажем, что для достаточно малых t $\pi(t)$ пропорциональна мере Эрроу-Пратта, что и докажет соответствующее утверждение.

Предположим, что функция $\pi(t)$ — дважды непрерывно дифференцируема. Справедливо соотношение

$$\pi(t) = \pi(0) + t\,\pi'(0) + \frac{1}{2!} t^2\, \pi''(0) + o(t^2).$$

Покажем, что первые два слагаемых в правой части равны нулю. Очевидно, что $\pi(0) = 0$. Дважды продифференцируем (5) по t:

$$-u'(w - \pi(t))\, \pi'(t) = \mathsf{E}\, u'(w + t\varepsilon)\varepsilon, \tag{6}$$

$$-u'(w - \pi(t))\, \pi''(t) + u''(w - \pi(t))\, (\pi'(t))^2 = \mathsf{E}\, u''(w + t\varepsilon)\varepsilon^2. \tag{7}$$

При $t = 0$ из (6) имеем:

$$-u'(w)\, \pi'(0) = \mathsf{E}\, u'(w)\, \varepsilon = u'(w)\, \mathsf{E}\, \varepsilon = 0.$$

Поскольку $u'(w)$ не может быть равной нулю (напомним, что мы предполагаем монотонность $u(.)$), то $\pi'(0) = 0$.

Из (7) при $t = 0$ получаем:

$$-u'(w)\, \pi''(0) = u''(w)\, \mathsf{E}\, \varepsilon^2 = u''(w)\, \sigma^2,$$

откуда $\pi''(0) = r_u(w)\, \sigma^2$.

Подставим полученные результаты в ряд Тейлора

$$\pi(t) = r_u(w)\, \frac{t^2 \sigma^2}{2} + o(t^2). \tag{8}$$

Пусть для каких-то u, v выполняется $\pi_u(\varepsilon) > \pi_v(\varepsilon)$ $\forall\varepsilon$, тогда при достаточно малом t $\pi_u(t) > \pi_v(t)$, и из (8) имеем $r_u > r_v$.

■

Введенная мера Эрроу-Пратта называется абсолютной мерой Эрроу-Пратта. Кроме того, рассматривают относительную меру Эрроу-Пратта, которая определяется по формуле:

$$-\frac{u''(w)\,w}{u'(w)}.$$

Относительная мера Эррроу-Пратта является эластичностью предельной полезности (по доходу).

Меры Эррроу-Пратта являются полезными инструментами анализа поведения инвестора в условиях риска, т.к. в их терминах получаются ответы на стандартные вопросы сравнительной статики: как изменяется структура инвестиционного портфеля при изменении размера инвестиций, доходностей активов и т.д. А к проблемам сравнительной статики сводятся многие проблемы прикладной экономики: характер спроса на деньги в портфельной теории формирования спроса на деньги, влияние налогообложения и т.д.

В терминах (абсолютной) меры Эрроу-Пратта можно охарактеризовать спрос на рисковый актив как функцию величины инвестиций в рассматриваемый портфель из двух активов. Мы предполагаем, что $\mathsf{E}\,\tilde{R} > 0$, т.е. что решение внутреннее ($a\,(w) > 0$).

Утверждение 9.

Если мера Эрроу-Пратта $r\,(w)$ убывает, то рисковый актив является нормальным благом, т.е.

$$r'(w) < 0 \Rightarrow a'(w) > 0.$$

(Аналогично можно показать, что если $r'(w) > 0$, то $a'(w) < 0$, и если $r'(w) = 0$, то $a'(w) = 0$.)

Доказательство:

Пусть $r(w)$ убывает.

Условие оптимальности портфеля имеет вид

$$\mathsf{E}\,(u'(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}) = 0.$$

Продифференцируем его по ω:

$$\mathsf{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}\,(1 + a'(w)\,\tilde{R})) = 0.$$

По свойствам оператора мат. ожидания

$$\mathsf{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}) = -\,a'(w)\,\mathsf{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}^2),$$

откуда

$$a'(w) = -\frac{\mathrm{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R})}{\mathrm{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}^2)}.$$

Ясно, что знаменатель здесь меньше нуля, так как в силу вогнутости функции полезности $u''(w + a(w)\,\tilde{R}) < 0$. Покажем, что числитель больше нуля.

Рассмотрим случайную величину $\tilde{R}$: она имеет и положительные, и отрицательные реализации. Рассмотрим случай $\tilde{R} = R > 0$. Тогда в силу убывания функции $r\,(.)$ $r\,(w + a(w)R) < r\,(w)$. По определению меры Эрроу-Пратта

$$r\,(w + a(w)R) = -\frac{u''(w\ + a(w)R)}{u'(w\ + a(w)R)} < r\,(w)$$

Умножив последнее неравенство на знаменатель и на R, получаем:

$$u''(w + a(w)R)\,R > -\,r\,(w)\,u'(w + a(w)R)\,R.$$

Легко видеть, что при $\tilde{R} = R < 0$ это неравенство тоже верно. Возьмем мат. ожидание от обеих частей:

$$\mathsf{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}) > -\,r\,(w)\,\mathsf{E}\,(u'(w\ + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}).$$

Так как из условия оптимальности $\mathsf{E}\,(u'(w\ + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}) = 0$, то имеем

$$\mathsf{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}) > 0.$$

Итак, доказано, что если $r'(w) < 0$, то $a'(w) > 0$, другими словами, рисковый актив является нормальным благом.

■

Отметим, однако, что это свойство не выполняется для случая с двумя и более рисковыми активами.

Пусть α_i — доля инвестиций в i-й рисковый актив, α_0 — доля инвестиций в безрисковый актив[2]. Пусть $\tilde{R}_i$ — доходность рискового актива, R_0 — доходность безрискового актива.

Доходность портфеля, в который инвестируется денежная сумма w, — это случайная величина, которая может быть вычислена следующим образом:

$$\tilde{w} = (\alpha_0 R_0 + \textstyle\sum \alpha_i \tilde{R}_i)\, w,$$

Если предпочтения инвестора на соответствующих лотереях представляются функцией полезности $u(.)$ и инвестор может взять взаймы под процент R_0–1 в неограниченных размерах, задача выбора оптимального портфеля будет иметь вид:

$$\mathsf{E}\, u(\alpha_0 R_0 + \textstyle\sum \alpha_i\, \tilde{R}_i)\, w) \to \max_{\alpha_0,\, \alpha_i}$$

$$\alpha_0 + \textstyle\sum \alpha_i = 1$$

$$\alpha_i \geqslant 0$$

Исключив α_0, преобразуем задачу инвестора к виду

$$\mathsf{E}\, u(R_0 + \textstyle\sum \alpha_i(\tilde{R}_i - R_0)\, w) \to \max_{\alpha_i \geqslant 0}$$

Условие оптимальности первого порядка этой задачи

$$\mathsf{E}\, u'(\tilde{w})(\tilde{R}_i - R_0) = 0,$$

или

$$\mathsf{E}\, u'(\tilde{w})\tilde{R}_i = R_0\, \mathsf{E}\, u'(\tilde{w})\ \forall i.$$

В силу свойств функции $u(.)$, оно является достаточным условием оптимальности портфеля.

По определению ковариации для двух случайных величин ξ и η выполнено $\mathsf{E}(\xi\eta) = \mathsf{cov}(\xi,\eta) + \mathsf{E}(\xi)\mathsf{E}(\eta)$. С учетом этого соотношения условия оптимальности можем записать в виде

$$\mathsf{E}\, \tilde{R}_i = R_0 - \frac{\mathsf{cov}(u'(\tilde{w}),\, \tilde{R}_i)}{\mathsf{E}\, u'(\tilde{w})}.$$

Полученное соотношение означает, что включение актива в оптимальный портфель определяется не только его доходностью, но и величиной его корреляции с доходностью всего портфеля.

Так, например, у страховых полисов ожидаемая доходность, как правило, меньше нуля, но они включаются в портфель рискофоба, так как их доходность отрицательно коррелирует с ожидаемым доходом.

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Покажите, что если абсолютная мера Эрроу-Пратта неприятия риска убывает, то $u''' \leqslant 0$. Покажите, что обратное неверно.

---

[2] Понятно, что в любой портфель рассматриваемого типа будет включен лишь один безрисковый актив (актив с максимальной доходностью). Поэтому предположение о единственности безрискового активы не ограничивает общности.

2. Приведите примеры элементарной функции полезности с возрастающей, убывающей и постоянной абсолютной и относительной мерой Эрроу-Пратта.

3. Покажите, что при увеличении объема инвестиций доля инвестиций в рисковый актив (в сумме инвестиций в оптимальный портфель) постоянна (возрастает, убывает), если относительная мера Эрроу-Пратта убывает (возрастает, постоянна).

4. Покажите, что в первом приближении премия за риск равна

$$r(w)\sigma^2/2,$$

где $r(.)$ — абсолютная мера Эрроу-Пратта, а σ^2 — дисперсия лотереи.

5. Пусть на рынке доступны лишь два актива – рисковый и безрисковый. Как изменяется величина вложений в рисковый актив при росте суммы инвестиций, если предпочтения инвестора представляются функцией полезности Н.-М. с элементарной функцией полезности $u(\omega)$?

Решить задачу при

(a) $u(w) = \sqrt{w}$; (b) $u(w) = -\mathrm{e}^{-aw}$; (c) $u(w) = -\dfrac{1}{w}$;

(d) $u(w) = \ln w$; (e) $u(w) = a\,w - b\,w^2$; (f) $u(w) = a\sqrt{w} + b\,w$.

6. Рассмотрим следующую игру: Если игрок называет число x, то получает $w + x$ с вероятностью 1/3 и $w - x$ с вероятностью 2/3. Какое число назовет рискофоб, предпочтения которого описываются функцией полезности Н.-М. с элементарной функцией полезности:

(a) $u(w) = \sqrt{w}$; (b) $u(w) = -\mathrm{e}^{-aw}$; (c) $u(w) = -\dfrac{1}{w}$;

(d) $u(w) = \ln w$; (e) $u(w) = a\,w - b\,w^2$; (f) $u(w) = a\sqrt{w} + b\,w$.

7. Некто, чьи предпочтения на лотереях описываются функцией полезности Н.-М. с элементарной функцией полезности $u(w) = \sqrt{w}$, располагает суммой денег ω рублей. Ему предлагают приобрести лотерейный билет, выигрывающий x рублей с вероятностью 1/2. Пусть p — максимальная цена, которую он готов уплатить за лотерейный билет.

(1) Чему равна p при $w = 9$ и $x = 16$?

(2) Покажите, что p

растет при увеличении величины выигрыша x.

растет при увеличении суммы денег w.

не может превышать величину $x/4$ рублей.

8. Пусть рискофоб, предпочтения которого описываются функцией полезности Неймана-Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(w) = \sqrt{w}$, владеет суммой денег w рублей и лотерейным билетом, выигрывающим x рублей с вероятностью 1/2. Покажите, что при уменьшении x цена, за которую он готов продать этот лотерейный билет, стремиться к величине ожидаемого (для данного рискофоба) выигрыша по этому билету.

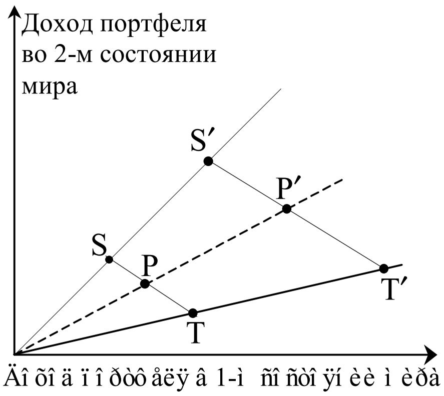
9. Пусть в ситуации с двумя активами, рассмотренной выше, $\alpha(R_0)$ — оптимальная доля вложений в рисковый актив как функция доходности безрискового актива. Покажите, что если абсолютная мера Эрроу-Пратта растет ($r'(.) > 0$) и решение внутреннее ($0 < \alpha(R_0) <$

1), то $\frac{d\alpha(R_0)}{dR_0}>0$, т.е. уменьшение доходности безрискового актива приводит к увеличению доли вложений в рисковый актив.
Указание:
Покажите, продифференцировав условие первого порядка, что

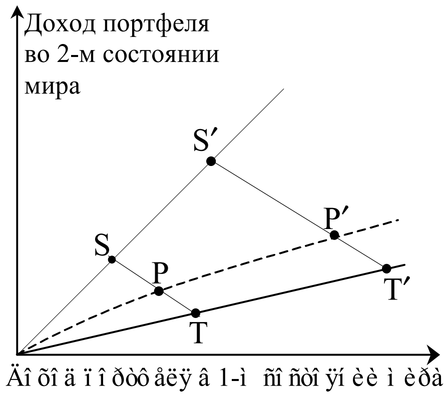
$$\frac{d\alpha(R_0)}{dR_0}=\frac{\mathsf{E}\,(u'(\tilde{w}))-w(1-\alpha(R_0))\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_0))}{w\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_0)^2)}.$$

Отсюда следует требуемый результат, поскольку $\mathsf{E}\,(u''(\tilde{\omega})(\tilde{R}-R_0))\leqslant 0$ (вследствие того, что $r'(.)>0$).

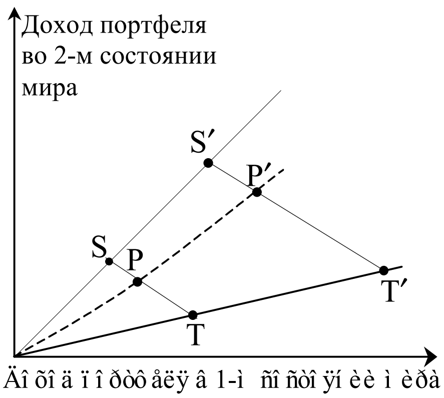
10. Предположим, что (в мире с двумя состояниями) имеется один рисковый (с нормой доходности $\tilde{R}$) и один не приносящий дохода безрисковый актив. Охарактеризуйте в терминах относительной и абсолютной меры неприятия риска Эрроу-Пратта (эластичности по богатству спроса на рисковый актив) представленные на рисунке возможные структуры оптимальных портфелей при разных уровнях богатства. Линия PP′ представляет совокупность фактических портфелей (при разных уровнях инвестиций в портфель), SS′ (TT′) — совокупность портфелей при условии, что портфели содержат лишь безрисковые (рисковые) активы. Линии ST (S′T′) представляют совокупность допустимых портфелей при данном уровне инвестиций.



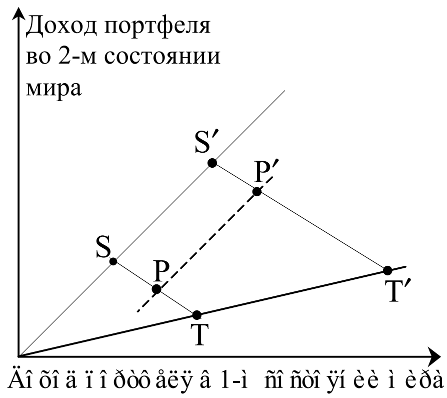
(а)



(б)



(в)



(г)

11. Как измениться структура оптимального портфеля инвестора–рискофоба, если ему доступны не приносящий дохода безрисковый актив и рисковый актив и норма доходности рискового актива изменяется следующим образом:

(а) $\tilde{R}_1=(1-h)\tilde{R}$, $h\in[0,1]$;

(б) $\tilde{R}_1=\tilde{R}+h(\tilde{R}-\bar{R})=(1+h)\tilde{R}-h\bar{R}$, где $\bar{R}=\mathsf{E}\tilde{R}$, $h\in[0,1]$

Проинтерпретируйте полученные результаты.

Проиллюстрируйте анализ для простого случая, когда есть всего два состояния природы, на диаграмме (в системе координат «богатство в первом состоянии» — «богатство во втором состоянии»)[3].

12. Докажите, что в ситуации, когда инвестору доступны приносящий доход безрисковый и рисковый активы, налог на валовой доход (от портфельных инвестиций) увеличивает (уменьшает, оставляет постоянным) частный риск, если эластичность по доходу спроса на рисковый актив положительна (отрицательна, постоянна). Проиллюстрируйте его графически для случая двух состояний природы.

Указание: Пусть h — ставка налога, а σ_w — частный риск портфеля, измеряемый среднеквадратичным отклонением валовой доходности портфеля. Тогда

$$\sigma_w = (1 - h)\, \alpha\, w\, \sigma_R.$$

Дифференцируя это соотношение, получим

$$\frac{d\sigma_\omega}{dh} = -\alpha\, w\, \sigma_R + (1 - h)\, w\, \sigma_R \frac{d\alpha}{dh}.$$

Для величины $\frac{d\alpha}{dh}$ можно получить соотношение

$$\frac{d\alpha}{dh} = \frac{\alpha R_0}{(1-h)^2} \frac{\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R} - R_0))}{\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R} - R_0)^2)}.$$

$$\frac{d\sigma_\omega}{dh} = w\, \sigma_R\, R_0 \frac{\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R} - R_0))}{\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R} - R_0)^2)}.$$

Литература: А.А.Аткинсон, Дж. Стиглиц. Лекции по экономической теории государственного сектора. — М.: Аспект-Пресс, 1995.

13. Покажите, что для элементарной функции полезности $u(w) = -\,e^{-bw}$, где b — положительное число, спрос на рисковый актив зависит только от его доходности и не зависит от уровня богатства w.

14. Покажите, что для элементарной функции полезности

$$u(w) = w^{1-\varepsilon}/(1-\varepsilon),\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon \neq 1.$$

доля инвестиций в рисковый актив (в сумме инвестиций в оптимальный портфель) не зависит от богатства.

[3] Это упражнение опирается на методы сравнительной статики, которые используются в анализе влияния налогообложения на инвестиционные решения, в том числе и на отношение к риску. Предположим, в частности, в ситуации предыдущего упражнения, пункт (a), что h – ставка налогообложения. Тогда результат предыдущего упражнения — (a $(1 - h)$ = const — означает, что уровень (частного) риска оптимального портфеля (измеряемого дисперсией дохода, получаемого его владельцем) в предположении, что он содержит оба актива, не зависит от ставки налогообложения доходов от инвестиций.

Это утверждение о постоянстве частного риска (при росте риска социального, поскольку доля рисковых инвестиций в общей сумме инвестиций, а вместе с ним и дисперсия (риск) портфеля возрастает) при введении пропорционального налога на доходы от инвестиций оказывается, вообще говоря, неверным в случае, когда доход приносит и безрисковый актив.