Оглавление

Глава 1

Модели с авторегрессионной условной гетероскедастичностью

Традиционные модели временных рядов, такие как модель ARMA, не могут адекватно учесть все характеристики, которыми обладают финансовые временные ряды, и требуют расширения. Одна из характерных черт финансовых рынков — это то, что присущая рынку неопределенность изменяется во времени. Как следствие, наблюдается «кластеризация волатильности». Под этим имеется в виду то, что могут чередоваться периоды, когда финансовый показатель ведет себя непостоянно, и относительно спокойные периоды. На Рис. 32 для иллюстрации этого явления показаны темпы прироста индекса РТС за несколько лет. На графике период 1 сравнительно спокойный, период 2 более «бурный», период 3 опять спокойный. Термин «волатильность» (*volatility* — англ. изменчивость, непостоянство) используется, как правило, для неформального обозначения степени вариабельности, разброса переменной. Формальной мерой волатильности служит дисперсия (или среднеквадратическое отклонение). Эффект кластеризации волатильности отмечен для, таких рядов как изменение цен акций, валютных курсов, доходности спекулятивных активов.

1.1 Модель ARCH

Модель ARCH, т.е. модель с авторегрессионной условной гетероскедастичностью (autoregressive conditional heteroskedasticity), предложена Р. Энглом в 1982 г. для моделирования кластеризации волатильности. Процесс ARCH q-го порядка, $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$, задается следующими соотношениями:

$$\varepsilon_t|\Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2),$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \gamma_q\varepsilon_{t-q}^2.$$

Рисунок 32

Здесь $\Omega_{t-1} = (\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$ — предыстория процесса ε_t, а σ_t^2 — условная по предыстории дисперсия ε_t, т.е. $\sigma_t^2 = Var(\varepsilon_t|\Omega_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2|\Omega_{t-1})$. Условную дисперсию часто называют волатильностью процесса. Для того, чтобы условная дисперсия оставалась положительной, требуется выполнение соотношений $\omega > 0$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_q \geqslant 0$.

Данный процесс можно записать несколько по-другому:

$$\xi_t \sim NID(0,1),$$
$$\varepsilon_t = \xi_t \sigma_t,$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \gamma_q \varepsilon_{t-q}^2.$$

Аббревиатура *NID* означает, что ξ_t нормально распределены и независимы. Такая запись удобна тем, что этот нормированный случайный процесс ξ_t не зависит от предыстории.

Смысл модели ARCH состоит в том, что если абсолютная величина ε_t оказывается большой, то это приводит к повышению условной дисперсии в последующие периоды. В свою очередь, при высокой условной дисперсии более вероятно появление больших (по абсолютной величине) значений ε_t. Наоборот, если значения ε_t в течение нескольких периодов близки к 0, то это приводит к понижению условной дисперсии в последующие периоды практически до уровня ω. В свою очередь, при низкой условной дисперсии более вероятно появление малых (по абсолютной величине) значений ε_t. Таким образом, ARCH-процесс характеризуется инерционностью условной дисперсии (кластеризацией волатильности).

Несложно показать, что процесс ARCH не автокоррелирован:

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = E\left(E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}|\Omega_{t-1})\right) = E\left(\varepsilon_{t-j} E(\varepsilon_t|\Omega_{t-1})\right) = 0.$$

Поскольку процесс имеет постоянное (нулевое) математическое ожидание и не автокоррелирован, то он является слабо стационарным в случае, если у него есть дисперсия.

Если обозначим разницу между величиной ε_t^2 и ее условным математическим ожиданием, σ_t^2, через η_t, то получим следующую эквивалентную запись процесса ARCH:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \gamma_q \varepsilon_{t-q}^2 + \eta_t.$$

Поскольку условное математическое ожидание η_t равно 0, то безусловное математическое ожидание также равно 0. Кроме того, как можно показать, η_t не автокоррелирован. Следовательно, квадраты процесса ARCH(q) следуют авторегрессионному процессу q-го порядка.

Если все корни характеристического уравнения

$$1 - \gamma_1 x + \ldots + \gamma_q x^q = 0$$

лежат за пределами единичного круга, то у процесса ARCH(q) существует безусловная дисперсия, и он является слабо стационарным. Поскольку коэффициенты γ_j неотрицательны, то это условие эквивалентно условию $\sum_{j=1}^{q} \gamma_j < 1$.

Для того, чтобы вычислить безусловную дисперсию стационарного ARCH-процесса, которую мы обозначим через σ^2, возьмем сначала математическое ожидание от обеих частей уравнения условной дисперсии:

$$E(\sigma_t^2) = \omega + \gamma_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \ldots + \gamma_q E(\varepsilon_{t-q}^2).$$

Заметим, что $E(\sigma_t^2) = E\left(E(\varepsilon_t^2|\Omega_{t-1})\right) = E(\varepsilon_t^2) = Var(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$, т.е. математическое ожидание условной дисперсии равно безусловной дисперсии. Следовательно,

$$\sigma^2 = \omega + \gamma_1 \sigma^2 + \ldots + \gamma_q \sigma^2$$

или

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \gamma_1 - \ldots - \gamma_q}.$$

Таким образом, все ε_t имеют одинаковую безусловную дисперсию, т.е. имеет место гомоскедастичность. Однако условная дисперсия меняется, поэтому одновременно имеет место **условная гетероскедастичность**[1] .

Если не все корни приведенного выше характеристического уравнения лежат за пределами единичного круга, т.е. если $\sum_{j=1}^{q} \gamma_j \geqslant 1$, то безусловная дисперсия не существует, и поэтому ARCH-процесс не будет слабо стационарным[2] .

Еще одно свойство ARCH-процессов состоит в том, что безусловное распределение ε_t имеет более высокий куртозис (т.е. более толстые хвосты и острую вершину), чем нормальное распределение. У ARCH(1) эксцесс равен

$$\frac{E(\varepsilon_t^4)}{\sigma_t^4} - 3 = \frac{6\gamma_1^2}{1 - 3\gamma_1^2},$$

причем при $3\gamma_1^2 \geqslant 1$ четвертый момент распределения не существует (эксцесс равен бесконечности). Это свойство ARCH-процессов хорошо соответствует финансовым временным рядам, которые обычно характеризуются толстыми хвостами.

Получить состоятельные оценки коэффициентов ARCH-процесса можно используя вышеприведенное представление квадратов ARCH-процесса в виде авторегрессии. Более эффективные оценки получаются при использовании метода максимального правдоподобия.

При применении ARCH-моделей к реальным данным было замечено, что модель ARCH(1) не дает достаточно длительных кластеров волатильности, а только порождает большое число выбросов. Для корректного описания данных требуется довольно большая длина лага q, что создает трудности при оценивании. В частности, зачастую нарушается условие неотрицательности оценок

[1] Она называется авторегрессионной, поскольку динамика квадратов ARCH-процесса описывается авторегрессией.

[2] При этом у ARCH-процессов есть интересная особенность: они могут быть строго стационарны, не будучи слабо стационарны. Дело в том, что определение слабой стационарности требует существования конечных первых и вторых моментов ряда. Строгая же стационарность этого не требует, поэтому даже если условная дисперсия бесконечна (и, следовательно, ряд не является слабо стационарным), ряд все же может быть строго стационарным.

коэффициентов γ_j. Поэтому Энгл наложил на коэффициенты лага ограничение, состоящее в том, что они линейно убывают до нуля. Веса лага при этом задаются соотношением

$$w_j = \frac{q+1-j}{0.5q(q+1)},$$

так, чтобы их сумма равнялась 1, а коэффициенты берутся равными $\gamma_j = \gamma w_j$. Получается следующая модель с двумя параметрами, ω и γ:

$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma\left(w_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + w_q\varepsilon_{t-q}^2\right).$$

1.2 Модель GARCH

Модель GARCH (generalized ARCH — обобщенная модель ARCH), предложенная Т. Боллерслевом, является альтернативной модификацией модели ARCH, позволяющей получить более длинные кластеры при малом числе параметров. Модель ARMA зачастую позволяет получить более «сжатое» описание временных зависимостей для условного математического ожидания, чем модель AR. Подобным же образом модель GARCH дает возможность обойтись меньшим количеством параметров по сравнению с моделью ARCH, если речь идет об условной дисперсии. В дальнейшем мы проведем прямую аналогию между моделями GARCH и ARMA.

Для того, чтобы вывести модель GARCH, используем в модели ARCH бесконечный геометрический лаг:

$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma\sum_{j=1}^{\infty}\delta^{j-1}\varepsilon_{t-j}^2 = \omega + \frac{\gamma}{1-\delta L}\varepsilon_{t-1}^2.$$

Применяя преобразование Койка, получим

$$\sigma_t^2 = (1-\delta)\omega + \delta\sigma_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2.$$

Поменяв очевидным образом обозначения, получим модель GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \omega + \delta\sigma_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2.$$

Модель GARCH(p,q) обобщает эту формулу:

$$\sigma_t^2 = \omega + \delta_1\sigma_{t-1}^2 + \ldots + \delta_p\sigma_{t-p}^2 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \gamma_q\varepsilon_{t-q}^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p}\delta_j\sigma_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q}\gamma_j\varepsilon_{t-j}^2.$$

При этом предполагается, что $\omega > 0$, $\delta_1,\ldots,\delta_p \geqslant 0$ и $\gamma_1,\ldots,\gamma_q \geqslant 0$. На практике, как правило, достаточно взять $p=1$ и $q=1$. Изредка используют GARCH(1,2) или GARCH(2,1).

Как и в модели ARCH, σ_t^2 служит условной дисперсией процесса:

$$\varepsilon_t|\Omega_t \sim N(0,\sigma_t^2).$$

Рассчитаем безусловную дисперсию GARCH-процесса, предполагая, что он стационарен. Для этого возьмем математические ожидания от обеих частей уравнения для условной дисперсии:

$$E(\sigma_t^2) = \sum_{j=1}^{p} \delta_j E(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j E(\varepsilon_{t-j}^2),$$

откуда

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{p} \delta_j \sigma^2 + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j \sigma^2$$

и

$$\sigma^2 = \frac{1}{1 - \sum\limits_{j=1}^{p} \delta_j - \sum\limits_{j=1}^{q} \gamma_j}.$$

Таким образом, с точки зрения безусловной дисперсии GARCH-процесс гомоскедастичен.

Для того, чтобы дисперсия была конечной, требуется $\sum\limits_{j=1}^{p} \delta_j + \sum\limits_{j=1}^{q} \gamma_j < 1$. В частности, для модели GARCH(1,1) требуется $\delta_1 + \gamma_1 < 1$.

Процесс GARCH можно записать в эквивалентной форме, если, как и выше, обозначить $\eta_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{m} (\delta_j + \gamma_j) \varepsilon_{t-j}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^{p} \delta_j \eta_{t-j},$$

где $m = \max(p, q)$. (В этой записи подразумевается $\delta_j = 0$ при $j > p$ и $\gamma_j = 0$ при $j > q$). Такая форма записи позволяет увидеть, что квадраты GARCH-процесса подчиняются модели ARMA(m, p).

Этот факт позволяет получить автокорреляционную функцию квадратов GARCH-процесса. В частности, для GARCH(1,1) автокорреляционная функция квадратов имеет вид

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1(1 - \delta_1^2 - \delta_1\gamma_1)}{1 - \delta_1^2 - 2\delta_1\gamma_1},$$
$$\rho_k = (\delta_1 + \gamma_1)^{k-1} \rho_k, \quad k > 1.$$

Условие существования безусловного четвертого момента у отдельного наблюдения процесса GARCH(1,1) состоит в том, что $3\gamma_1^2 + 2\gamma_1\delta_1 + \delta_1^2 < 1$. Если это условие выполняется, то эксцесс равен

$$\frac{E(\varepsilon_t^4)}{\sigma_t^4} - 3 = \frac{6\gamma_1^2}{1 - \delta_1^2 - 2\delta_1\gamma_1 - 3\gamma_1^2},$$

и является положительным. Т.е. GARCH-процесс (как и его частный случай — ARCH-процесс) имеет более высокий куртозис, чем нормальное распределение. В то же время безусловное распределение отдельного наблюдения

GARCH-процесса является симметричным, поэтому все нечетные моменты, начиная с третьего, равны нулю.

Стандартным методом оценивания для моделей GARCH является метод максимального правдоподобия. Условно по предыстории Ω_{t-1} отдельное наблюдение GARCH-процесса распределено нормально: $\varepsilon_t|\Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$. Функция правдоподобия для ряда $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T$, подчиняющегося GARCH-процессу, вычисляется как произведение плотностей этих условных нормальных распределений:

$$L = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

Максимизируя эту функцию правдоподобия по неизвестным параметрам, получим оценки максимального правдоподобия для GARCH-процесса.

При оценивании условную дисперсию σ_t^2 следует считать функцией параметров модели и вычислять по приведенной выше рекуррентной формуле. Для этих вычислений требуются «довыборочные» значения самого процесса и его условной дисперсии, а они неизвестны. Для решения этой проблемы можно использовать различные приемы. Самый простой, по-видимому, состоит в том, чтобы заменить условные дисперсии в начале ряда ($t = 1, \ldots, m$) оценкой безусловной дисперсии, т.е. величиной

$$s^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2.$$

Оценки максимального правдоподобия являются состоятельными и асимптотически эффективными.

На практике модель GARCH дополняют какой-либо моделью, описывающей поведение условного или безусловного среднего наблюдаемого ряда. Например, Можно предположить, что наблюдается не ε_t, а ε_t плюс константа, т.е. что наблюдаемый ряд x_t имеет постоянное безусловное математическое ожидание β, к которому добавляется ошибка ε_t в виде процесса GARCH:

$$x_t = \beta + \varepsilon_t.$$

Можно моделировать безусловное математическое ожидание с помощью линейной регрессии, т.е.

$$x_t = \mathbf{Z}_t\alpha + \varepsilon_t.$$

Это позволяет учитывать линейный тренд, детерминированные сезонные переменные и т.п. При оценивании в функции правдоподобия вместо ε_t используют $x_t - \mathbf{Z}_t\alpha$.

С точки зрения прогнозирования перспективной является модель, сочетающая ARIMA с GARCH. Модель ARIMA в этом случае используется для моделирования поведения условного математического ожидания ряда, а GARCH — для моделирования условной дисперсии.

Важнейшим выводом, который следует из анализа модели ARCH, состоит в том, что наблюдаемые изменения в дисперсии (волатильности) временного ряда могут иметь эндогенный характер, то есть порождаться определенной нелинейной моделью, а не какими-то внешними структурными сдвигами.

1.3 Прогнозы и доверительные интервалы для модели GARCH

Одна из важнейших целей эконометрических моделей временных рядов — построение прогнозов. Какие преимущества дают модели с авторегрессионной условной гетероскедастичностью с точки зрения прогнозирования временных рядов по сравнению с моделями линейной регрессии или авторегрессии — скользящего среднего? Оказывается, что прямых преимуществ нет, но есть ряд опосредованных преимуществ, которые в некоторых случаях могут иметь большое значение.

Рассмотрим модель линейной регрессии,

$$x_t = \mathbf{Z}_t \alpha + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

в которой ошибка представляет собой GARCH-процесс. Поскольку ошибка не автокоррелирована и гомоскедастична, то, как известно, оценки наименьших квадратов являются наилучшими в классе линейных по x несмещенных оценок. Однако наличие условной гетероскедастичности позволяет найти более эффективные (т.е. более точные) оценки среди нелинейных и смещенных оценок. Действительно, метод максимального правдоподобия дает асимптотически эффективные оценки, более точные, чем оценки МНК. Когда мы делаем прогноз на следующий, $(T+1)$-й, период, то в ошибку прогноза вносит свой вклад, во-первых, ошибка ε_{T+1}, а, во-вторых, разница между оценками параметров и истинными значениями параметров. Использование более точных оценок позволяет уменьшить в некоторой степени вторую составляющую ошибки прогноза.

В обычных моделях временного ряда с неизменными условными дисперсиями (например, ARMA) неопределенность ошибки прогноза — это некоторая возрастающая функция горизонта прогноза, которая (если не учитывать разницу между оценками параметров и истинными значениями параметров, о которой шла речь в предыдущем абзаце) не зависит от момента прогноза. Однако в присутствии ARCH-ошибок точность прогноза будет нетривиально зависеть от текущей информации и, следовательно, от момента прогноза. Поэтому для корректного построения интервалов ошибки прогноза требуется иметь оценки будущих условных дисперсий ошибки.

Кроме того, в некоторых случаях полезно иметь прогнозы не только (условного) математического ожидания изучаемой переменной, но и ее (условной) дисперсии. Это важно, например, при принятии решений об инвестициях в финансовые активы. В этом случае дисперсию (волатильность) доходности естественно рассматривать как меру рискованности финансового актива. Таким образом, сами по себе прогнозы условной дисперсии могут иметь практическое применение.

Покажем, что доверительный интервал прогноза зависит от предыстории

$$\Omega_T = (x_T, x_{T-1}, \ldots, x_1, \ldots).$$

(Реально прогноз делается на основе имеющегося ряда $(x_1, \ldots, x_T)$, а не всей предыстории, однако различие это не столь существенно). При этом мы будем исходить из того, что нам известны истинные параметры процесса. Прогноз на k периодов — это математическое ожидание прогнозируемой величины x_{T+k}, условное относительно имеющейся на момент t информации Ω_T. Он равен

$$x^p_{T+k} = E(x_{T+k}|\Omega_T) = E(\mathbf{Z}_{T+k}\alpha + \varepsilon_{T+k}|\Omega_T) = \mathbf{Z}_{T+k}\alpha.$$

Здесь мы учли, что, поскольку информация Ω_T содержится в информации Ω_{T+k-1} при $k \geqslant 1$, то по правилу повторного взятия ожидания выполнено

$$E(\varepsilon_{T+k}|\Omega_T) = E\left(E\left(\varepsilon_{T+k}|\Omega_{T+k-1}\right)|\Omega_T\right) = 0.$$

Таким образом, если известны истинные параметры, присутствие GARCH-ошибок не отражается на том, как строится точечный прогноз, — он оказывается таким же, как для обычной линейной регрессии. Ошибка предсказания равна

$$d_k = x_{T+k} - x^p_{T+k} = \varepsilon_{T+k}.$$

Условная дисперсия ошибки предсказания равна

$$\sigma^2_{d_k} = E\left(d_k^2|\Omega_T\right) = E\left(\varepsilon^2_{T+k}|\Omega_T\right).$$

Из этого следует, что она зависит, как от горизонта прогноза, k, так и от предыстории Ω_T.

Заметим, что при $t > T$ выполнено $E\left(\varepsilon^2_t|\Omega_T\right) = E\left(\sigma^2_t|\Omega_T\right)$ поскольку

$$E\left(\varepsilon^2_t - \sigma^2_t|\Omega_T\right) = E\left(E\left(\varepsilon^2_t - \sigma^2_t|\Omega_{t-1}\right)|\Omega_T\right) = 0.$$

Здесь мы учли, что $E\left(\varepsilon^2_t - \sigma^2_t|\Omega_{t-1}\right) = 0$, что информация Ω_T содержится в информации Ω_{t-1} при $t > T$ и применили правило повторного взятия ожидания. Значит,

$$\sigma^2_{d_k} = E\left(\varepsilon^2_{T+k}|\Omega_T\right) = E\left(\sigma^2_{T+k}|\Omega_T\right).$$

Таким образом, фактически дисперсия прогноза x_{T+k} — это прогноз волатильности на k шагов вперед.

Возьмем от обеих частей рекуррентного уравнения для GARCH-процесса математическое ожидание, условное относительно Ω_T. Получим

$$E\left(\sigma^2_t|\Omega_T\right) = \omega + \sum_{j=1}^{p} \delta_j E\left(\sigma^2_{t-j}|\Omega_T\right) + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j E\left(\varepsilon^2_{t-j}|\Omega_T\right). \tag{1.1}$$

Можно использовать эту рекуррентную формулу для расчета $E\left(\sigma^2_t|\Omega_T\right)$ при $t > T$. При этом следует учесть, что $E\left(\varepsilon^2_t|\Omega_T\right) = \varepsilon^2_t$ при $t \leqslant T$, поскольку информация о ε_t содержится в информационном множестве Ω_T, и по аналогичной причине $E\left(\sigma_t^2|\Omega_T\right) = \sigma_t^2$ при $t \leqslant T+1$. Кроме того, как мы только что доказали $E\left(\varepsilon_t^2|\Omega_T\right) = E\left(\sigma_t^2|\Omega_T\right)$ при $t > T$.

Таким образом, имеются все данные для того, чтобы с помощью формулы (1.1) рассчитать дисперсию ошибки прогноза для x_{T+k} в модели GARCH. При $k = 1$ можно сразу записать, без применения (1.1), что

$$\sigma_{d_1}^2 = E\left(\sigma_{T+1}^2|\Omega_T\right) = \sigma_{T+1}^2,$$

где σ_{T+1}^2 рассчитывается по обычному правилу. В модели GARCH(1,1) при $k > 1$ по формуле ()

$$E\left(\sigma_{T+k}^2|\Omega_T\right) = \omega + (\delta_1 + \gamma_1)E\left(\sigma_{T+k-1}^2|\Omega_T\right),$$

т.е.

$$\sigma_{d_k}^2 = \omega + (\delta_1 + \gamma_1)\sigma_{d_{k-1}}^2$$

Отсюда следует, что общее выражение для GARCH(1,1) (не подходящее только для случая $\delta_1 + \gamma_1 = 1$) имеет вид

$$\sigma_{d_k}^2 = \omega\frac{1 - (\delta_1 + \gamma_1)^{k-1}}{1 - \delta_1 - \gamma_1} + (\delta_1 + \gamma_1)^{k-1}\sigma_{T+1}^2.$$

В пределе в ситуации стационарности (т.е. при $\delta_1 + \gamma_1 < 1$) условная дисперсия ошибки прогноза сходится к безусловной дисперсии процесса GARCH(1,1):

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{d_k}^2 = \frac{\omega}{1 - \delta_1 - \gamma_1}.$$

Хотя мы получили общее выражение для дисперсии ошибки прогноза, но этого, вообще говоря, недостаточно для корректного построения доверительных интервалов, поскольку условное относительно Ω_T распределение ε_{T+k}, а, следовательно, и распределение ошибки прогноза d_k, имеет более толстые хвосты, чем нормальное распределение. Чтобы обойти эту проблему, можно использовать, например, прогнозные интервалы в виде плюс/минус двух среднеквадратических ошибок прогноза без выяснения того, какой именно доверительной вероятности это соответствует[3] .

Чтобы проиллюстрировать зависимость доверительных интервалов прогнозов от предыстории мы сгенерировали ряд GARCH(1,1) длиной 100 с параметрами $\delta_1 = 0.3$ и $\gamma_1 = 0.3$ и построили теоретические доверительные интервалы при $T = 20$ и $T = 40$. Прогноз везде равен нулю. Рис.33 показывает условные доверительные интервалы прогнозов для нашего процесса GARCH(1,1), а также сам ряд. Интервал для $T = 20$ постепенно сужается, а для $T = 40$ — расширяется до уровня, соответствующего безусловной дисперсии. Такое поведение объясняется тем, что при $T = 21$ волатильность (условная дисперсия) была относительно высокой, а при $T = 41$ — относительно низкой. Очевидна способность условных прогнозных интервалов приспосабливаться к изменениям в волатильности. Примечательно то, что интервалы прогнозов могут сужаться с ростом горизонта прогнозов, если прогноз делается в момент, соответствующий высокому уровню волатильности. Это объясняется тем, что в будущем следует ожидать снижения (ожидаемого) уровня волатильности.

[3] Ясно, что для нормального распределения это примерно 95% -й двусторонний квантиль.

Рисунок 33

На практике следует внести изменения в приведенные выше формулы, которые выведены в предположении, что истинные параметры процесса известны. Все параметры заменяются соответствующими оценками. Можно также добавить к дисперсии прогноза поправку, связанную с тем, что при прогнозировании используются оценки a, а не истинные коэффициенты регрессии α. Это добавка равна приблизительно

$$Z_{T+k} Var(a)^{-1} Z'_{T+k}.$$

Вместо неизвестной ковариационной матрицы оценок коэффициентов, $Var(a)$, следует взять ее оценку, получаемую в методе максимального правдоподобия.

1.4 Разновидности моделей ARCH

Существует огромное количество модификаций классической модели GARCH. Дадим обзор только важнейших направлений, в которых возможна модификация модели. Все эти модели включают в себя какие-либо авторегрессионно условно гетероскедастичные процессы. Формально процесс ε_t с нулевым условным математическим ожиданием ($E(\varepsilon_t|\Omega_t) = 0$) является **авторегрессионно условно гетероскедастичным**, если его условная относительно предыстории дисперсия,

$$\sigma_t^2 = E(\varepsilon_t^2|\Omega_t) = Var(\varepsilon_t|\Omega_t),$$

нетривиальным образом зависит от предыстории Ω_t.

1.4.1 Функциональная форма динамики условной дисперсии

Модели авторегрессионно условно гетероскедастичных процессов могут различаться тем, какой именно функцией задается зависимость условной дисперсии от своих лагов и лагов ε_t. Например, в логарифмической GARCH-модели условная дисперсия задается уравнением

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p} \delta_j \ln \sigma_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j \ln \varepsilon_{t-j}^2.$$

В такой модели условная дисперсия всегда положительна вне зависимости от значений коэффициентов.

Следующая нелинейная GARCH-модель включает в себя как частный случай обычную GARCH-модель:

$$\sigma_t^\lambda = \omega + \sum_{j=1}^{p} \delta_j \sigma_{t-j}^\lambda + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j |\varepsilon_{t-j}|^\lambda.$$

Кроме того, логарифмическая GARCH-модель является предельным частным случаем этой модели (после небольших изменений) при $\lambda \to 0$.

В приведенных моделях условная дисперсия не зависит от знаков лагов ε_t, только от их абсолютной величины. Это может быть серьезным ограничением, поскольку в реальных финансовых данных часто наблюдается «эффект левереджа». Снижение рыночной стоимости акционерного капитала увеличивает отношение заемных средств к собственным и, следовательно, повышает рискованность вложений в фирму. Последнее проявляется увеличением волатильности. В результате, будущие значения волатильности отрицательно коррелируют с текущей доходностью. Это дало толчок к развитию разного рода асимметричных по ε_t моделей. Самой известной является экспоненциальная модель GARCH (EGARCH), предложенная Д. Нельсоном. Она имеет следующий вид:

$$\xi_t \sim NID(0,1),$$
$$\varepsilon_t = \xi_t \sigma_t,$$
$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p} \delta_j \ln \sigma_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j g(\xi_{t-j}),$$
$$g(\xi_t) = \theta \xi_t + \gamma(|\xi_t| - E|\xi_t|).$$

Таким образом, в EGARCH σ_t^2 зависит и от величины, и от знака лагов ε_t. Логарифм условной дисперсии, $\ln \sigma_t^2$, описывается процессом ARMA(p, q) с обычными для ARMA условиями стационарности.

Эффект левереджа можно также учесть в нелинейной GARCH-модели, введя дополнительный параметр сдвига κ:

$$\sigma_t^\lambda = \omega + \sum_{j=1}^{p} \delta_j \sigma_{t-j}^\lambda + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j |\varepsilon_{t-j} - \kappa|^\lambda.$$

1.4.2 Отказ от нормальности

Как уже говорилось, финансовые ряды обычно характеризуются большой величиной куртозиса. Модель GARCH частично учитывает это, поскольку в ней безусловное распределение GARCH-процесса имеет толстые хвосты. Это является результатом стохастического характера условной дисперсии. Однако, как показывает опыт, этот эффект не полностью улавливается моделью GARCH, что проявляется в том, что нормированные остатки модели, соответствующие $\xi_t = \varepsilon_t / \sigma_t$, все еще характеризуются большой величиной куртозиса. Таким образом, не выполняется одно из предположений модели GARCH — о том, что ε_t условно по предыстории имеет нормальное распределение.

Это создает трудности при использовании метода максимального правдоподобия для оценивания модели. Допустим, на самом деле ошибки распределены не нормально, но мы максимизируем функцию правдоподобия, основывающуюся на нормальности, т.е. используем так называемый метод квазимаксимального правдоподобия. Что при этом произойдет? Во-первых, при нарушении предположения о нормальности оценки хотя и будут состоятельными, но уже не будут асимптотически эффективными (т.е. наиболее точными в пределе). Во-вторых, стандартные методы оценивания ковариационной матрицы оценок максимального правдоподобия уже не годятся. Требуется скорректированная оценка ковариационной матрицы.

Альтернативой методу квазимаксимального правдоподобия служат модели, в которых в явном виде делается предположение о том, что $\xi_t = \varepsilon_t/\sigma_t$ имеет распределение, отличающееся от нормального. Наиболее часто используется t-распределение Стьюдента, поскольку это распределение при малых степенях свободы имеет большой куртозис. При этом количество степеней свободы рассматривается как неизвестный параметр, причем непрерывный (формула плотности t-распределения подходит и в случае, когда берется нецелое количество степеней свободы). Можно использовать и другие распределения, например, так называемое обобщенное распределение ошибки (GED).

Часто распределение ξ_t является также скошенным вправо. Для учета этого следует использовать асимметричные распределения с толстыми хвостами. Например, можно использовать нецентральное t-распределение, известное из статистики. Другой вариант, более простой в использовании — это так называемое скошенное t-распределение, которое «склеивается» из двух половинок t-распределений, которые по-разному масштабированы.

1.4.3 GARCH-M

В модели GARCH-M непосредственно в уравнение регрессии добавляется условная дисперсия:

$$x_t = \mathbf{Z}_t\alpha + \pi g(\sigma_t^2) + \varepsilon_t,$$

где $g(\cdot)$ — некоторая возрастающая функция. Эта новая компонента вводится для того, чтобы отразить влияние волатильности временного ряда на зависимую переменную. Дело в том, что из многих финансовых моделей следует, что доходность актива должна быть положительно связана с рискованностью этого актива.

В качестве $g(\cdot)$ обычно используют $g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2$, $g(\sigma_t^2) = \sqrt{\sigma_t^2} = \sigma_t$ или $g(\sigma_t^2) = \ln\sigma_t^2$.

1.4.4 Стохастическая волатильность

В рассмотренных моделях с авторегрессионной гетероскедастичностью условная дисперсия однозначно определяется предысторией. Это не оставляет места для случайных влияний на волатильность, помимо влияний лагов самого процесса. Однако авторегрессионная гетероскедастичность может возникнуть по-другому. Примером является модель авторегрессионной стохастической волатильности, в которой логарифм условной дисперсии описывается авторегрессионным процессом. Модель авторегрессионной стохастической волатильности 1-го порядка имеет следующий вид:

$$\xi_t \sim NID(0,1),$$
$$\eta_t \sim NID(0,\sigma_\eta^2),$$
$$\varepsilon_t = \xi_t \sigma_t,$$
$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \delta \ln \sigma_{t-1}^2 + \eta_t.$$

Эта модель по структуре проще, чем модель GARCH, и лучше обоснована теоретически, с точки зрения финансовых моделей, однако ее широкому использованию мешает сложность эффективного оценивания. Проблема состоит в том, что для нее, в отличие от моделей типа GARCH, невозможно в явном виде выписать функцию правдоподобия. Таким образом, перед тем, кто решил применить модели стохастической волатильности, стоит дилемма: либо использовать алгоритмы, которые дают состоятельные, но неэффективные оценки (например, метод моментов), либо использовать алгоритмы, которые требуют сложных расчетов (например, алгоритмы, использующие метод Монте-Карло для интегрирования многомерной плотности).

Несложно придумать модели, которые бы объединяли черты моделей типа GARCH и моделей стохастической волатильности. Но здесь опять встает проблема оценивания.

1.4.5 ARCH-процессы с долгосрочной памятью

Для многих финансовых данных оценка $\sum_{j=1}^{p} \delta_j + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j$, оказывается очень близкой к единице. Это дает эмпирическое обоснование для так называемой интегрированной модели GARCH, сокращенно IGARCH. Это обычные модели GARCH, в которых характеристическое уравнение для условной дисперсии имеет корень равный единице, и, следовательно, $\sum_{j=1}^{p} \delta_j + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j = 1$. В частности, процесс IGARCH(1,1) можно записать следующим образом:

$$\sigma_t^2 = \omega + (1-\gamma)\sigma_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2$$

IGARCH-процессы могут быть строго стационарны, однако не имеют ограниченной безусловной дисперсии и поэтому не являются слабо стационарными.

В модели IGARCH(1,1) прогноз волатильности на k шагов вперед (или, что то же самое, дисперсия прогноза самого процесса на k шагов вперед) равен

$$E(\sigma_{T+k}^2 | \Omega_T) = \sigma_{d_k}^2 = \omega(k-1) + \sigma_{T+1}^2.$$

Следовательно, шок условной дисперсии инерционен в том смысле, что он влияет на будущие прогнозы всех горизонтов.

В последние годы получило распространение понятие так называемой дробной интегрированности. Дробно-интегрированный процесс (ARFIMA) с параметром интегрированности $d \in (0,1)$ занимает промежуточное положение между стационарными процессами ARMA ($d=0$) и интегрированными ($d=1$).

Такие процессы имеют автокорреляционную функцию, которая затухает гиперболически, в то время как автокорреляционная функция стационарного процесса ARMA затухает экспоненциально, т.е. более быстро. В связи с этим принято говорить, что дробно-интегрированные процессы характеризуются долгосрочной памятью. Это явление было обнаружено как в уровнях, так и в дисперсиях многих финансовых рядов. В связи с этим появились модели дробно-интегрированных ARCH-процессов, такие как FIGARCH, HYGARCH.

1.4.6 Многомерные модели волатильности

Часто из экономической теории следует, что финансовые временные ряды должны быть взаимосвязаны, в том числе и через волатильность: краткосрочные и долгосрочные процентные ставки, валютные курсы двух валют, выраженные в одной и той же третьей валюте, курсы акций фирм, зависящих от одного и того же рынка, и т.п. Кроме того, условные взаимные ковариации таких финансовых показателей могут меняться со временем. Ковариация между финансовыми активами играет существенную роль в моделях поиска оптимального инвестиционного портфеля. С этой точки зрения, многомерные модели авторегрессионной условной гетероскедастичности являются естественным расширением одномерных моделей.

Общее определение многомерного ARCH-процесса не представляет никакой теоретической сложности: рассматривается m-мерный наблюдаемый случайный вектор x_t, m-мерный вектор его условного математического ожидания, условная ковариационная матрица размерностью $m \times m$. Предложено множество подобных моделей разной степени сложности. Оценивание многомерной ARCH-модели, однако, сопряжено со значительными трудностями. В частности, эти трудности связаны с необходимостью максимизации по большому количеству неизвестных параметров. Поэтому в прикладных исследованиях отдается предпочтение таким многомерным моделям волатильности, в которых количество параметров мало. В то же время для таких «компактных» моделей (например, для факторных моделей волатильности) может не существовать явной формулы для функции правдоподобия, что создает дополнительные трудности при оценивании.

1.5 Литература

Baillie, Richard T. and Tim Bollerslev (1992), "Prediction in Dynamic Models with Time Dependent Conditional Variances,"*Journal of Econometrics*, 52, 91-113.

Bera, A.K. and Higgins, M.L. (1993), "ARCH Models: Properties, Estimation and Testing,"*Journal of Economic Surveys*, 7, 305-362.

Bollerslev, T., R.F. Engle, and D.B. Nelson, "ARCH Models,"*Handbook of Econometrics*, Vol. IV, Ch. 49, Elsevier Science, 1994, 2959-3038.

Bollerslev, Tim (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,"*Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

Bollerslev, Tim, Ray Y. Chou and Kenneth F. Kroner (1992), "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence,"*Journal of Econometrics*, 52, 5-59.

Diebold, Francis X. and Jose A. Lopez, "Modeling Volatility Dynamics,"*Macroeconometrics: Developments, Tensions and Prospects*, Kluwer Academic Press, 1995, 427-472.

Engle, Robert F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation,"*Econometrica*, 50, 987-1008.

Hamilton, James D. *Time Series Analysis*, Ch. 21, Princeton University Press, 1994, 657-676.

Предтеченский А.Г., "Построение моделей авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH) некоторых индикаторов российского финансового рынка"(дипломная работа), ЭФ НГУ, 2000

[http://www.nsu.ru/ef/tsy/ecmr/garch/predtech/index.htm]