УДК 519.21

В. И. Лотов

О среднем значении лестничного момента для случайных блужданий с малым сносом

Получены теоремы об асимптотическом поведении математического ожидания времени первого достижения неотрицательной полуоси для случайного блуждания, у которого снос стремится к нулю. Предполагается, что распределение скачков случайного блуждания принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (1,2)$.

Библиография: 8 наименований.

Пусть $\{\xi_n^0\}$, $n \geqslant 1$, – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{E}\,\xi_1^0 = 0$, $F(x) = \mathbf{P}\ \ (\xi_1^0 < x)$, и пусть при $x \to \infty$

$$F(-x) = \frac{a + o(1)}{x^\alpha}\, L(x), \qquad 1 - F(x) = \frac{b + o(1)}{x^\alpha}\, L(x), \tag{1}$$ {1}

где $L(x)$ – медленно меняющаяся функция, $1 < \alpha < 2$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a + b > 0$.

Известно (см., например, [1]), что последнее условие эквивалентно тому, что распределение F принадлежит области притяжения устойчивого распределения F_α, т. е. для последовательности $S_n^0 = \xi_1^0 + \dots + \xi_n^0$, $n \geqslant 1$, выполняется

$$\mathbf{P}\biggl(\frac{S_n^0}{B_n} - A_n < x\biggr) \to F_\alpha(x), \tag{2}$$ {2}

где A_n и B_n – подходящие числовые последовательности. Нетрудно видеть, что при $\mathbf{E}\,\xi_1^0 = 0$ можно положить $A_n = 0$, и тогда предельный устойчивый закон будет также иметь нулевое математическое ожидание.

Вообще говоря, устойчивые распределения образуют семейство, зависящее от четырех параметров. Пусть $\psi(t)$ – логарифм характеристической функции устойчивого распределения. Известны различные представления для $\psi(t)$; далее будет удобно пользоваться следующим из них (см. [1]): при $\alpha \in (1,2)$

$$\psi(t) = it\gamma - \lambda |t|^\alpha \exp\biggl\{-i\frac{\pi t}{2|t|}\,\beta(2-\alpha)\biggr\}. \tag{3}$$ {3}

Здесь $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\lambda > 0$ и γ – любое вещественное число. В рассматриваемом случае $\gamma = 0$, а число λ без ограничения общности можно считать равным

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00810), а также программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-8980.2006.1).

единице. Число β известным образом определяется из (1). Будем в дальнейшем использовать обозначение $F_\alpha = F_{\alpha,\beta}$.

Пусть $\xi_n = \xi_n^0 + \varepsilon$, $S_n = S_n^0 + n\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малое число. Введем лестничные моменты

$$\eta_- = \inf\{n \geqslant 1\colon S_n < 0\}, \qquad \eta_+ = \inf\{n \geqslant 1\colon S_n \geqslant 0\}$$

(здесь полагаем $\eta_+ = \infty$, если $S_n < 0$ при всех n и $\eta_- = \infty$, если все $S_n \geqslant 0$) и лестничные высоты $\chi_\pm = S_{\eta_\pm}$. Для события $\{\eta_- = \infty\}$ величину χ_- будем считать неопределенной. Обозначим $q = \mathbf{P}(\eta_- < \infty)$. Известно, что $\mathbf{E}\,\eta_+ = (1-q)^{-1}$ (ниже в доказательстве теоремы 1 содержится обоснование этого соотношения). При $\varepsilon \to 0$ эта величина может неограниченно возрастать: $\mathbf{E}\,\eta_+ = \infty$, если $\mathbf{E}\,\xi_1 = 0$ (см. обсуждение этой ситуации в работе [2], где также доказана оценка сверху для $\mathbf{E}\,\eta_+$ в более общих условиях по сравнению с ограничениями, приведенными в настоящей работе). Для рассматриваемой схемы результат из [2] имеет вид: при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ существует постоянная $C = C(\delta)$ такая, что $\mathbf{E}\,\eta_+ \leqslant C/\varepsilon^{\theta-1+\delta}$, где для краткости обозначено $\theta = \alpha/(\alpha-1)$. Кроме того, в работе [2] приведена просто получаемая оценка снизу:

$$\mathbf{E}\,\eta_+ \geqslant \frac{\mathbf{E}\,\xi_1^+}{\varepsilon}\,,$$

где $\xi_1^+ = \max(0,\xi_1)$.

Целью настоящей статьи является исследование асимптотического поведения $\mathbf{E}\,\eta_+$ при $\varepsilon \to 0$ в условиях, введенных выше. Обозначим $p = F_{\alpha,\beta}(0)$.

{t1}

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1); *тогда*

$$\mathbf{E}\,\eta_+ = \varepsilon^{-\theta p(1+o(1))}, \qquad \varepsilon \to 0.$$

{rem1}

Замечание 1. Пусть $\gamma = 0$ и $\lambda = 1$ в представлении (3). Для этого случая в [3] найдено значение величины p:

$$p = \frac{1}{2}\biggl(1 - \frac{\beta(2-\alpha)}{\alpha}\biggr).$$

Отсюда сразу же следует, что $\alpha p \leqslant 1$, поскольку $2(1-\alpha p) = (1+\beta)(2-\alpha) \geqslant 0$. Таким образом, $\theta p \leqslant \theta - 1$, и это неравенство указывает на то, что содержащаяся в [2] оценка сверху имеет, вообще говоря, завышенный порядок роста.

Доказательство теоремы 1. Пусть при $|z| \leqslant 1$, $\operatorname{Re}\mu = 0$

$$R_\pm(z,\mu) = 1 - \mathbf{E}\bigl(z^{\eta_\pm}\exp\{\mu\chi_\pm\};\ \eta_\pm < \infty\bigr).$$

Эти функции являются компонентами известной факторизации (см., например, [4])

$$1 - z\varphi(\mu) = R_+(z,\mu)R_-(z,\mu),$$

где $\varphi(\mu) = \mathbf{E}\, e^{\mu\xi_1}$. Полагая в данном тождестве $z = 1$, придем к соотношению

$$R_-(1,\mu) = \frac{1-\varphi(\mu)}{R_+(1,\mu)}\,.$$

Устремим $\mu \to 0$ и воспользуемся затем тождеством Вальда; тем самым получим равенства

$$1 - q = \frac{\varepsilon}{\mathbf{E}\,\chi_+} = (\mathbf{E}\,\eta_+)^{-1}.$$

Далее, при $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\mu = 0$ справедливо известное представление

$$R_-(z,\mu) = \exp\biggl\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\,\mathbf{E}\bigl(\exp\{\mu S_n\};\ S_n < 0\bigr)\biggr\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\eta_+ &= (1-q)^{-1} = R_-^{-1}(1,0)\\ &= \lim_{z\to 1}\exp\biggl\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\,\mathbf{P}(S_n < 0)\biggr\} = \exp\biggl\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon)}{n}\biggr\}.\end{aligned}\tag{4}$$
{4}

Таким образом, необходимо рассмотреть асимптотику ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon)}{n}$$

при $\varepsilon \to 0$. В работе [5] установлено, что в условиях теоремы 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}\bigl(|S_n^0| > n\varepsilon\bigr)}{n} = \frac{\alpha}{\alpha-1}\,|\log\varepsilon|\bigl(1+o(1)\bigr), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{5}$$
{5}

Переход к рассмотрению односторонних уклонений $\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon)$ вместо двухсторонних несущественно меняет доказательство, приведенное в [5]. По этой причине мы его повторять не будем. Для облегчения чтения отметим только, что в доказательстве используется представление

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon) = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon), \tag{6}$$
{6}

где

$$\begin{aligned}I_1(\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\biggl(\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon) - F_{\alpha,\beta}\biggl(-\frac{n\varepsilon}{B_n}\biggr)\biggr),\\ I_2(\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,F_{\alpha,\beta}\biggl(-\frac{n\varepsilon}{B_n}\biggr).\end{aligned}$$

С помощью ряда оценок устанавливается, что

$$\begin{gathered}I_1(\varepsilon) = o(|\log\varepsilon|),\\ I_2(\varepsilon) = \frac{\alpha p}{\alpha-1}\,|\log\varepsilon|\bigl(1+o(1)\bigr), \qquad \varepsilon \to 0.\end{gathered}$$

Последнее соотношение получается применением формулы Эйлера–Маклорена. Этот же прием используется ниже в доказательстве теоремы 2, которое отличается от доказательства теоремы 1 более простым оцениванием $I_1(\varepsilon)$ (вследствие наложенного в теореме 2 дополнительного условия) и более детальным исследованием асимптотики для $I_2(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Теорема 1 устанавливает асимптотическое поведение $\log \mathbf{E}\,\eta_+$. Далее мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях этот результат может быть усилен. Обозначим

$$\Delta_n = \sup_x \left| \mathbf{P}\left(\frac{S_n^0}{B_n} < x \right) - F_{\alpha,\beta}(x) \right|.$$

Для получения оценки $I_1(\varepsilon) = o(|\log \varepsilon|)$ при доказательстве теоремы 1 в работе [5] использовалась сходимость $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для получения более сильного результата об асимптотике $\mathbf{E}\,\eta_+$ нам потребуется наложить условие на скорость сходимости Δ_n к нулю. Существует ряд работ, в которых устанавливаются те или иные достаточные условия, обеспечивающие убывание величины Δ_n с нужной скоростью. Например, в [6] предложены условия в терминах свойств регулярности второго порядка для функции F, при выполнении которых Δ_n является правильно меняющейся функцией вида $\Delta_n = L(n)n^{\gamma}$ с показателем $\gamma \in [-1, 0]$ (здесь $L(n)$ – медленно меняющаяся функция).

{t2}

Теорема 2. *Пусть дополнительно к условиям теоремы* 1 *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_n}{n} < \infty.$$

Тогда существует медленно меняющаяся на бесконечности функция $l(x)$ *такая, что при* $\varepsilon \to 0$

$$\mathbf{E}\,\eta_+ = \varepsilon^{-\theta p} l(\varepsilon^{-1})\bigl(1 + o(1)\bigr).$$

Если же $L(x) \equiv \mathrm{const}$ *в формуле* (1), *то и* $l(x) \equiv \mathrm{const}$.

Точное выражение для функции $l(x)$ приведено в конце доказательства теоремы.

Доказательство. В силу (4) нам достаточно показать, что для некоторой медленно меняющейся функции $l(x)$ выполнено равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon) = -\theta p \log \varepsilon + \log l(\varepsilon^{-1}) + o(1).$$

Воспользуемся представлением (6). Вследствие условия теоремы ряд

$$I_1(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon) - F_{\alpha,\beta}\left(-\frac{n\varepsilon}{B_n} \right) \right)$$

сходится равномерно по ε, поэтому

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0} I_1(\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\lim_{\varepsilon\to0}\biggl(\mathbf{P}(S_n^0<-n\varepsilon)-F_{\alpha,\beta}\Bigl(-\frac{n\varepsilon}{B_n}\Bigr)\biggr)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\bigl(\mathbf{P}(S_n^0<0)-F_{\alpha,\beta}(0)\bigr),\end{aligned}$$

т. е. $I_1(\varepsilon)=C_1+o(1)$. Через $C, C_1, C_2, \dots$ всюду обозначаются константы (возможно, разные в разных выкладках).

Рассмотрим теперь $I_2(\varepsilon)$. При оценивании этой величины мы воспользуемся рассуждениями, приведенными в [5].

Известно, что нормирующие постоянные в (2) имеют вид $B_n = cn^{1/\alpha}L_1(n)$ при соответствующем подборе константы c, $L_1(x)$ – медленно меняющаяся функция, $L_1(1)=1$. Положим $\delta=1-1/\alpha=1/\theta$. Сходимость в (2) сохранится, если $L_1(x)$ заменить на любую асимптотически эквивалентную ей медленно меняющуюся функцию $L_0(x)$, $L_1(x)/L_0(x)\to1$ при $x\to\infty$. Поэтому $L_1(x)$ можно считать дифференцируемой (см. [8, п. 1.3.2]), а функцию $y=x^\delta/L_1(x)$ – монотонной (см. [8, п. 1.5.3]).

Пусть $\Phi(x)=F_{\alpha,\beta}(-x/c)$. Применение формулы Эйлера–Маклорена [7, п. 12.2] приводит к выражению

$$I_2(\varepsilon)=\int_1^\infty\frac{1}{x}\,\Phi\biggl(\frac{\varepsilon x^\delta}{L_1(x)}\biggr)\,dx+\frac12\,\Phi(\varepsilon)-\int_1^\infty P_1(x)\,d\biggl(\frac1x\,\Phi\biggl(\frac{\varepsilon x^\delta}{L_1(x)}\biggr)\biggr), \tag{7}$$

где $P_1(x)=[x]-x+1/2$.

Рассмотрим асимптотическое поведение каждого из трех слагаемых в правой части (7). Для первого из них сделаем замену $y=x^\delta/L_1(x)$. Тогда $x=g(y)=y^{1/\delta}L_2(y)$ (см. [8, п. 1.5.7]), где $L_2(y)$ – медленно меняющаяся функция, $L_2(1)=L_1(1)=1$. Получаем

$$\begin{aligned}\int_1^\infty\frac1x\,\Phi\biggl(\frac{\varepsilon x^\delta}{L_1(x)}\biggr)\,dx &= \int_1^\infty\frac{g'(y)}{g(y)}\,\Phi(\varepsilon y)\,dy=\int_1^\infty\Phi(\varepsilon y)\,d\log g(y)\\ &= \int_\varepsilon^\infty\Phi(t)\,d\log g\Bigl(\frac{t}{\varepsilon}\Bigr)=-\int_\varepsilon^\infty\Phi'(t)\log g\Bigl(\frac{t}{\varepsilon}\Bigr)\,dt\\ &= -\frac1\delta\int_\varepsilon^\infty\Phi'(t)\log t\,dt+\frac{\log\varepsilon}{\delta}\int_\varepsilon^\infty\Phi'(t)\,dt-\int_\varepsilon^\infty\Phi'(t)\log L_2\Bigl(\frac{t}{\varepsilon}\Bigr)\,dt.\end{aligned} \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon\to0$

$$\int_\varepsilon^\infty\Phi'(t)\log t\,dt=C_2+O(\varepsilon),\qquad \int_\varepsilon^\infty\Phi'(t)\,dt=-p+O(\varepsilon).$$

Рассмотрим последнее слагаемое в правой части (8). Если $L(x)\equiv\mathrm{const}$, то $L_1(x)\equiv1$ и $L_2(x)\equiv1$, поэтому рассматриваемый интеграл будет равен нулю. В общем случае имеем

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \Phi'(t)\log L_2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dt = \int_{\varepsilon}^{\infty}\left(\log L_2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \log L_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\Phi'(t)dt$$
$$+ \log L_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_{\varepsilon}^{\infty}\Phi'(t)\,dt = \int_{\varepsilon}^{\infty}\Phi'(t)\log\frac{L_2(t/\varepsilon)}{L_2(1/\varepsilon)}\,dt$$
$$+ \log L_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\big(-p + O(\varepsilon)\big). \tag{9}$$ {9}

Для оценки интеграла в правой части (9) воспользуемся теоремой Поттера [8, п. 1.5.4], в силу которой найдется постоянная $C_3 > 1$ такая, что при всех $x > 0,\ \ y > 0$

$$\frac{L_2(x)}{L_2(y)} \leqslant C_3 \max\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right).$$

Поэтому

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\infty}\Phi'(t)\log\frac{L_2(t/\varepsilon)}{L_2(1/\varepsilon)}\,dt\right| \leqslant \log C_3 + \int_{0+}^{1}\big|\Phi'(t)\big|\log(t^{-1})\,dt$$
$$+ \int_{1}^{\infty}|\Phi'(t)|\log t\,dt < \infty,$$

т. е. в силу теоремы о мажорируемой сходимости имеем

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\Phi'(t)\log\frac{L_2(t/\varepsilon)}{L_2(1/\varepsilon)}\,dt = \int_{0}^{\infty}\Phi'(t)\,I_{[\varepsilon,\infty)}(t)\log\frac{L_2(t/\varepsilon)}{L_2(1/\varepsilon)}\,dt \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Тем самым установлено, что для медленно меняющейся функции $l_1(x) = L_2^p(x)$ выполнено равенство

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\Phi'(t)\log L_2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dt = \log l_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + o(1).$$

Для второго слагаемого в правой части (7), очевидно, выполняется $\Phi(\varepsilon) = p + O(\varepsilon)$. И наконец, рассмотрим последнее слагаемое в правой части (7):

$$\int_{1}^{\infty}P_1(x)\,d\left(\frac{1}{x}\,\Phi\left(\frac{\varepsilon x^{\delta}}{L_1(x)}\right)\right) = -\int_{1}^{\infty}P_1(x)\,\frac{1}{x^2}\,\Phi\left(\frac{\varepsilon x^{\delta}}{L_1(x)}\right)dx$$
{10}
$$+ \int_{1}^{\infty}P_1(x)\,\frac{1}{x}\,d\Phi\left(\frac{\varepsilon x^{\delta}}{L_1(x)}\right). \tag{10}$$

Первый интеграл в правой части (10) равен $C_4 + O(\varepsilon)$ в силу равномерной по ε ограниченности функции $\Phi\big(\varepsilon x^{\delta}/L_1(x)\big)$ и сходимости интеграла

$$\int_{1}^{\infty}P_1(x)\frac{1}{x^2}\,dx.$$

Рассмотрим второй интеграл в правой части (10). После уже использовавшейся замены $y = x^{\delta}/L_1(x)$ получаем

$$\int_{1}^{\infty}P_1(x)\frac{1}{x}\,d\Phi\left(\frac{\varepsilon x^{\delta}}{L_1(x)}\right) = \int_{1}^{\infty}P_1\big(g(y)\big)\frac{1}{g(y)}\,d\Phi(\varepsilon y)$$
$$= \varepsilon\int_{1}^{\infty}P_1\big(g(y)\big)\frac{1}{g(y)}\,\Phi'(\varepsilon y)\,dy = O(\varepsilon),$$

поскольку функция $P_1\big(g(y)\big)\Phi'(\varepsilon y)$ ограничена равномерно по ε, $g(y) = y^{1/\delta}L_2(y)$ и $\delta = 1 - 1/\alpha < 1$.

Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ имеет место

$$I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) = -\theta p \log \varepsilon + \log l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + o(1),$$

где

$$l(x) = CL_2^p(x), \qquad C = \exp\left\{C_1 - \theta C_2 + \frac{p}{2} + C_4\right\},$$

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big(\mathbf{P}(S_n^0 < 0) - F_{\alpha,\beta}(0)\big), \qquad C_2 = \int_0^{\infty} \Phi'(t) \log t\, dt,$$

$$C_4 = p\int_1^{\infty} P_1(t)\frac{1}{t^2}\, dt.$$

Проводя несложные вычисления, получим

$$C_4 = p\left(C_0 - \frac{1}{2}\right),$$

где $C_0 = 0.5772\dots$ – постоянная Эйлера, т. е. в итоге имеем

$$C = \exp\{C_1 - \theta C_2 + pC_0\}.$$

Напомним, что медленно меняющаяся функция L_2 определяется из соотношения $x = y^{1/\delta}L_2(y)$, где $y = x^{\delta}/L_1(x)$; функция L_1 участвует в определении нормирующих констант в (2): $B_n = cn^{1/\alpha}L_1(n)$, $L_1(1) = 1$. Здесь $L_1(x)$ можно считать дифференцируемой, а функцию $y = x^{\delta}/L_1(x)$ – монотонной. Теорема доказана.

Ясно, что применение тождества Вальда $\mathbf{E}\,\chi_+ = \varepsilon\,\mathbf{E}\,\eta_+$ дает возможность устанавливать асимптотику также для $\mathbf{E}\,\chi_+$. Более того, мы можем получать асимптотические оценки и для $\mathbf{E}\,\chi_+^s$. Это следует из установленного в [2] (и используемого там) неравенства

$$\mathbf{E}\,\chi_+^s \leqslant C(\mathbf{E}\,\eta_+)^{s-\alpha_1+1},$$

которое в условиях настоящей работы имеет место при любых α_1 таких, что $1 < \alpha_1 < \alpha$ и $\alpha_1 - 1 < s \leqslant \alpha_1$.

Автор благодарен А. А. Боровкову, И. С. Борисову и С. В. Нагаеву за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965.
2. Лотов В. И., “О неравенствах для моментов и для распределения лестничной высоты случайного блуждания”, *Сиб. матем. журн.*, **43**:4 (2002), 816–822.

3. Золотарев В. М., “О представлении устойчивых законов интегралами”, *Тр. МИАН*, **71** (1964), 46–50.
4. Боровков А. А., *Теория вероятностей*, Наука, М., 1986.
5. Spataru A., “Precise asymptotics in Spitzer’s law of large numbers”, *J. Theoret. Probab.*, **12**:3 (1999), 811–819.
6. de Haan L., Peng L., “Exact rates of convergence to a stable law”, *J. London Math. Soc.* (2), **59** (1999), 1134–1152.
7. Крамер Г., *Математические методы статистики*, Мир., М., 1975.
8. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L., *Regular variation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

В. И. Лотов (V. I. Lotov)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
E-mail: lotov@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
21.01.2005