

ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ ТОЖДЕСТВА  
ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ  
СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ В ПОЛОСЕ

В. И. Лотов

**Аннотация.** Найдены факторизационные представления для производящей функции совместного распределения времени, проведенного траекторией случайного блуждания за конечное число шагов в полосе и в полуплоскости, и положения блуждающей частицы в последний момент времени.

**Ключевые слова:** случайное блуждание, время пребывания в полосе, факторизационные тождества.

Пусть  $\{X_n, n \geq 1\}$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,  $S_n = X_1 + \dots + X_n, n \geq 1$ . Для произвольного борелевского множества  $D \subset R$  введем

$$T_n = T_n(D) = \sum_{k=1}^n I_{\{S_k \in D\}},$$

где  $I_A(\omega) = 1$ , если  $\omega \in A$ , и  $I_A(\omega) = 0$  в противном случае;  $T_n$  есть число точек  $k, 1 \leq k \leq n$ , таких, что  $S_k \in D$ .

Задача состоит в изучении совместного распределения  $\mathbf{P}(T_n = k, S_n \in A)$ .

Мы не будем касаться обзора многочисленных работ, посвященных ситуации  $D = (0, \infty)$  и связанного с ней закона арксинуса (см. по этому поводу, например, [1]). Наибольший интерес для нас представляет случай конечного интервала  $D = [a, b]$ , а также множеств вида  $(-\infty, b], [a, \infty)$ . Далее везде предполагается, что  $a \leq 0 \leq b$ , хотя это не принципиально ввиду очевидного соотношения  $T_n(D) = n - T_n(\overline{D})$ . Отметим, что предельное распределение для  $T_n([a, b])$  при  $n \rightarrow \infty$  и при фиксированных  $a$  и  $b$  хорошо известно (см. [2, 3].) В этой же ситуации в [4] получены асимптотические разложения вероятностей  $\mathbf{P}(T_n = k), \mathbf{P}(T_n \geq k)$  при  $n \rightarrow \infty$  и при различных ограничениях на скорость роста  $k = k(n)$  в следующих предположениях:

- 1)  $X_n$  принимает только целочисленные значения;
- 2) выполнено условие Крамера:  $\mathbf{E}|t|^{X_1} < \infty$  для  $1 - \delta < |t| < 1 + \delta, \delta > 0$ .

Основная идея работы [4] состоит в следующем. Случайная величина  $T_n$  представляется в виде

$$T_n = \min\{k \geq 1 : Y_1 + \dots + Y_k > n\} - 1,$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00962) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-3695.2008.1).

где  $Y_1, Y_1 + Y_2, \dots$  — последовательные моменты времени, когда блуждающая частица пребывает в  $[a, b]$ . Случайные величины  $Y_1, Y_2, \dots$  не являются одинаково распределенными: распределение интервала времени, требуемого для перехода из точки  $i \in [a, b]$  в точку  $j \in [a, b]$ , зависит от  $i, j$ . По этой причине задача сводится к рассмотрению случайного блуждания, определенного на цепи Маркова с множеством состояний  $\mathcal{X} = \{a, a + 1, \dots, b\}$ . Использование этого подхода приводит к необходимости знать распределение случайных величин  $Y_k$ , что является весьма сложной задачей, которая не затрагивалась в [4]. Асимптотические разложения в [4] получены применением факторизационного метода, в своих общих чертах состоящего из нескольких этапов. На первом этапе строятся факторизационные представления для двойных (или даже тройных) преобразований Лапласа — Стилтеса над искомыми распределениями. Для случайного блуждания, определенного на цепи Маркова с множеством состояний  $\mathcal{X}$ , размерность участвующих в факторизации матриц равна  $b - a + 1$ , что сильно усложняет дальнейшее исследование вероятностей.

Позже в [5] было найдено некоторое альтернативное факторизационное матричное представление для производящей функции пары  $(T_n, S_n)$  в случае конечного интервала  $D$ . Впрочем оказалось, что процесс его вычисления весьма сложен даже для полунепрерывных случайных блужданий (см. [6]).

По этой причине в качестве первого этапа мы ставим задачу нахождения производящей функции искомого распределения без использования матричной факторизации.

Для переменных  $|z| < 1, |uz| < 1, \operatorname{Re} \lambda = 0$  введем функции  $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X_1}$ ,

$$Q_0(z, u, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n u^k \int_D e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx),$$

$$Q(z, u, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n u^k \int_{\overline{D}} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx).$$

**Теорема 1.** Для произвольного борелевского множества  $D \subset R$  и для указанных значений переменных  $u, z$  и  $\lambda$  имеет место тождество

$$uQ(z, u, \lambda)(1 - z\varphi(\lambda)) + (1 + Q_0(z, u, \lambda))(1 - zu\varphi(\lambda)) = 1. \quad (1)$$

**Доказательство.** Для всякой траектории, заканчивающейся в момент времени  $n$  и удовлетворяющей свойству  $\{T_n = k\}$ , добавим еще один скачок случайного блуждания. Тогда в момент времени  $n + 1$  блуждающая частица либо окажется вне множества  $D$  и в этом случае  $T_{n+1} = T_n = k$ , либо  $S_{n+1} \in D$  и, следовательно,  $T_{n+1} = k + 1$ . В терминах преобразований Лапласа — Стилтеса это будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx) \\ = \int_D e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_{n+1} = k + 1, S_{n+1} \in dx) + \int_{\overline{D}} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_{n+1} = k, S_{n+1} \in dx). \end{aligned}$$

Умножим это равенство на  $u^{k+1}z^{n+1}$  и просуммируем по  $k$  от 0 до  $n$  и по  $n$  от 1 до бесконечности. Тогда

$$\begin{aligned} zu\varphi(\lambda)(Q_0(z, u, \lambda) + Q(z, u, \lambda)) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1} \sum_{k=0}^n u^{k+1} \int_D e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_{n+1} = k+1, S_{n+1} \in dx) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1} \sum_{k=0}^n u^{k+1} \int_{\bar{D}} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_{n+1} = k, S_{n+1} \in dx) \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} z^m \sum_{i=1}^m u^i \int_D e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_m = i, S_m \in dx) \\ &+ u \sum_{m=2}^{\infty} z^m \sum_{k=0}^{m-1} u^k \int_{\bar{D}} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_m = k, S_m \in dx). \end{aligned}$$

Воспользовавшись тем, что  $\mathbf{P}(T_m = 0, S_m \in A) = 0$  при  $A \subset D$  и  $\mathbf{P}(T_m = m, S_m \in A) = 0$  при  $A \subset \bar{D}$ , заменим в правой части  $\sum_{i=1}^m$  на  $\sum_{i=0}^m$  и  $\sum_{k=0}^{m-1}$  на  $\sum_{k=0}^m$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} zu\varphi(\lambda)(Q_0(z, u, \lambda) + Q(z, u, \lambda)) &= Q_0(z, u, \lambda) - zu \int_D e^{\lambda x} \mathbf{P}(X_1 \in dx) \\ &+ u \left( Q(z, u, \lambda) - z \int_{\bar{D}} e^{\lambda x} \mathbf{P}(X_1 \in dx) \right) = Q_0(z, u, \lambda) + uQ(z, u, \lambda) - zu\varphi(\lambda), \end{aligned}$$

что совпадает с утверждением теоремы. Теорема доказана.

Из тождества (1) сразу следует, что

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) &= 1 + Q(z, u, \lambda) + Q_0(z, u, \lambda) \\ &= (1 - zu\varphi(\lambda))^{-1} (1 + (1 - u)Q(z, u, \lambda)). \quad (2) \end{aligned}$$

Стало быть, для нахождения стоящего в левой части (2) тройного преобразования над распределением пары  $(T_n, S_n)$  достаточно найти функцию  $Q(z, u, \lambda)$ .

Предположим теперь, что  $D = [a, b]$  при некоторых  $a \leq b$ , и пусть

$$Q(z, u, \lambda) = Q_1(z, u, \lambda) + Q_2(z, u, \lambda),$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(z, u, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n u^k \int_{(-\infty, a)} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx), \\ Q_2(z, u, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n u^k \int_{(b, \infty)} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx). \end{aligned}$$

Займемся нахождением функций  $Q_i(z, u, \lambda)$ ,  $i = 1, 2$ .

Введем лестничные моменты  $\eta_{\pm}$  и лестничные высоты  $\chi_{\pm}$ :

$$\eta_- = \inf\{n \geq 1 : S_n < 0\}, \quad \eta_+ = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}, \quad \chi_{\pm} = S_{\eta_{\pm}}.$$

Здесь полагаем  $\eta_+ = \infty$ , если  $S_n \leq 0$  при всех  $n$ , и  $\eta_- = \infty$ , если  $S_n \geq 0$  при всех  $n$ . На событиях  $\{\eta_{\pm} = \infty\}$  величины  $\chi_{\pm}$  будем считать неопределенными.

Пусть при  $|z| \leq 1$ ,  $\operatorname{Re} \lambda = 0$

$$R_{\pm}(z, \lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_{\pm}} \exp\{\lambda \chi_{\pm}\}; \eta_{\pm} < \infty).$$

Эти функции являются компонентами известной факторизации (см., например, [7])

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_+(z, \lambda)R_-(z, \lambda)R_0(z), \quad (3)$$

где

$$R_0(z) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}(S_n = 0) \right\}.$$

Известно также, что при  $|z| < 1$ ,  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  справедливы представления

$$R_-(z, \lambda) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}(\exp\{\lambda S_n\}; S_n < 0) \right\},$$

$$R_+(z, \lambda) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}(\exp\{\lambda S_n\}; S_n > 0) \right\}.$$

Перегруппируем слагаемые в (1) так, чтобы привести это тождество к виду

$$(1 + (1 - u)Q(z, u, \lambda))(1 - z\varphi(\lambda)) = \left(1 + \frac{u-1}{u}Q_0(z, u, \lambda)\right)(1 - zu\varphi(\lambda)),$$

и воспользуемся факторизацией функций  $1 - z\varphi(\lambda)$  и  $1 - zu\varphi(\lambda)$ , принимая во внимание, что  $R_{\pm}(z, \lambda) \neq 0$  при  $|z| < 1$ :

$$\frac{(1 + (1 - u)(Q_1(z, u, \lambda) + Q_2(z, u, \lambda)))R_+(z, \lambda)}{R_+(zu, \lambda)} = \left(1 + \frac{u-1}{u}Q_0(z, u, \lambda)\right) \frac{R_-(zu, \lambda)R_0(zu)}{R_-(z, \lambda)R_0(z)}. \quad (4)$$

Будем в дальнейшем писать  $g(\lambda) \in S(A)$ , если при  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  функция  $g$  имеет вид

$$g(\lambda) = \int_A e^{\lambda x} dG(x), \quad \text{где} \quad \int_A |dG(x)| < \infty.$$

Кроме того, будет использоваться обозначение

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dG(x) \right]^A = \int_A e^{\lambda x} dG(x).$$

Очевидно, для функций переменной  $\lambda$  из (2) выполняются соотношения

$$R_+^{\pm 1}(z, \lambda) \in S([0, \infty)), \quad R_-^{\pm 1}(z, \lambda) \in S((-\infty, 0]),$$

$$1 + \frac{u-1}{u}Q_0(z, u, \lambda) \in S(\{0\} \cup D),$$

$$Q_1(z, u, \lambda) \in S((-\infty, a)), \quad Q_2(z, u, \lambda) \in S((b, \infty)).$$

Поэтому при  $a \leq 0 \leq b$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( 1 + \frac{u-1}{u} Q_0(z, u, \lambda) \right) \frac{R_-(zu, \lambda) R_0(zu)}{R_-(z, \lambda) R_0(z)} \right]^{(b, \infty)} \equiv 0, \\ & \left[ \frac{Q_2(z, u, \lambda) R_+(z, \lambda)}{R_+(zu, \lambda)} \right]^{(b, \infty)} = \frac{Q_2(z, u, \lambda) R_+(z, \lambda)}{R_+(zu, \lambda)}, \\ & \left[ \frac{R_+(z, \lambda)}{R_+(zu, \lambda)} \right]^{(b, \infty)} + (1-u) \left[ \frac{Q_1(z, u, \lambda) R_+(z, \lambda)}{R_+(zu, \lambda)} \right]^{(b, \infty)} + (1-u) \frac{Q_2(z, u, \lambda) R_+(z, \lambda)}{R_+(zu, \lambda)} = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} Q_2(z, u, \lambda) &= \frac{R_+(zu, \lambda)}{(u-1)R_+(z, \lambda)} \left[ \frac{R_+(z, \lambda)}{R_+(zu, \lambda)} \right]^{(b, \infty)} \\ &\quad - \frac{R_+(zu, \lambda)}{R_+(z, \lambda)} \left[ \frac{R_+(z, \lambda)}{R_+(zu, \lambda)} Q_1(z, u, \lambda) \right]^{(b, \infty)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть для краткости  $s = zu$ . Для всякой функции  $g$  вида

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dG(x), \quad \text{где } \int_{-\infty}^{\infty} |dG(x)| < \infty,$$

определим операторы  $L_{\pm}$ , которые действуют следующим образом:

$$\begin{aligned} (L_+g)(z, s, \lambda) &= \frac{R_+(s, \lambda)}{R_+(z, \lambda)} \left[ \frac{R_+(z, \lambda)}{R_+(s, \lambda)} g(\lambda) \right]^{(b, \infty)}, \\ (L_-g)(z, s, \lambda) &= \frac{R_-(s, \lambda)}{R_-(z, \lambda)} \left[ \frac{R_-(z, \lambda)}{R_-(s, \lambda)} g(\lambda) \right]^{(-\infty, a)}. \end{aligned}$$

Введенные таким образом операторы сами зависят от  $z$  и  $s$ , однако для краткости записи мы не отражаем этот факт в обозначениях операторов. Кроме переменной  $\lambda$  функция  $g$  также может зависеть от переменных  $z$  и  $s$ , чаще всего именно эта ситуация будет встречаться в дальнейшем изложении.

Обозначив  $h(\lambda) \equiv (u-1)^{-1}$ , соотношение (5) перепишем так:

$$Q_2(z, u, \lambda) = (L_+h)(z, s, \lambda) - (L_+Q_1)(z, s, \lambda).$$

Симметричные рассуждения приводят к тождеству

$$Q_1(z, u, \lambda) = (L_-h)(z, s, \lambda) - (L_-Q_2)(z, s, \lambda),$$

откуда получаем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $D = [a, b]$ ,  $a \leq 0 \leq b$ . Тогда при  $|z| < 1$ ,  $|uz| < 1$ ,  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ ,  $s = zu$  справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} Q_1(z, u, \lambda) &= (L_-h)(z, s, \lambda) - (L_-L_+h)(z, s, \lambda) + (L_-L_+Q_1)(z, s, \lambda), \\ Q_2(z, u, \lambda) &= (L_+h)(z, s, \lambda) - (L_+L_-h)(z, s, \lambda) + (L_+L_-Q_2)(z, s, \lambda). \end{aligned} \quad (6)$$

**Следствие 1.** Для  $D = [a, \infty)$ ,  $a \leq 0$ , имеем

$$Q_1(z, u, \lambda) = (L_-h)(z, s, \lambda) \quad (7)$$

и аналогично для  $D = (-\infty, b]$ ,  $b \geq 0$ ,

$$Q_2(z, u, \lambda) = (L_+h)(z, s, \lambda). \quad (8)$$

Применяя (2), немедленно получаем

**Следствие 2.** Если  $D = [a, \infty)$ ,  $a \leq 0$ , то

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \frac{1 + (1-u)(L_-h)(z, s, \lambda)}{1 - s\varphi(\lambda)}. \quad (9)$$

Если  $D = (-\infty, b]$ ,  $b \geq 0$ , то

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \frac{1 + (1-u)(L_+h)(z, s, \lambda)}{1 - s\varphi(\lambda)}. \quad (10)$$

Заметим, что

$$(u-1)(L_+h)(z, s, \lambda) = 1 - \frac{R_+(s, \lambda)}{R_+(z, \lambda)} \left[ \frac{R_+(z, \lambda)}{R_+(s, \lambda)} \right]^{[0, b]}$$

и, следовательно, для  $D = (-\infty, b]$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \frac{R_+(s, \lambda)}{(1 - s\varphi(\lambda))R_+(z, \lambda)} \left[ \frac{R_+(z, \lambda)}{R_+(s, \lambda)} \right]^{[0, b]}.$$

Ясно, что нахождение последнего множителя в правой части этого равенства в общем случае сопряжено с трудностями. Однако вычисление оператора  $L_+$  сильно упрощается, если  $b = 0$ . Действительно, в этом частном случае

$$\left[ \frac{R_+(z, \lambda)}{R_+(s, \lambda)} \right]^{\{0\}} = 1$$

и, следовательно, для  $D = (-\infty, 0]$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \frac{R_+(s, \lambda)}{(1 - s\varphi(\lambda))R_+(z, \lambda)}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{n-T_n(\bar{D})} e^{\lambda S_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(v^{T_n(\bar{D})} e^{\lambda S_n}),$$

где обозначено  $v = u^{-1}$ , т. е. для  $\bar{D} = (0, \infty)$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(v^{T_n(\bar{D})} e^{\lambda S_n}) = \frac{R_+(s, \lambda)}{(1 - s\varphi(\lambda))R_+(sv, \lambda)} = \frac{1}{R_0(s)R_-(s, \lambda)R_+(sv, \lambda)}.$$

Этот результат содержится в [1].

Вычисление выражений вида  $(L_{\pm}g)(z, s, \lambda)$  для произвольных значений  $a$  и  $b$  производится весьма просто в случае, когда соответствующая компонента факторизации является дробно-линейной функцией. Приведем необходимые утверждения.

**Лемма 1.** Пусть функция  $g$  имеет вид

$$g(\lambda) = \int_c^{\infty} e^{\lambda t} dG(t), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad \operatorname{Var} G < \infty, \quad c \geq a.$$

Тогда для любого  $\beta < 0$

$$\left[ \frac{g(\lambda)}{\lambda - \beta} \right]^{(-\infty, a)} = g(\beta) \frac{e^{(\lambda - \beta)a}}{\lambda - \beta}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \left[ \frac{g(\lambda)}{\lambda - \beta} \right]^{(-\infty, a)} &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} \left( \int_{\max(c, t)}^{\infty} e^{-\beta(t-y)} dG(y) \right) dt \right]^{(-\infty, a)} \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda - \beta)t} dt \int_{\max(c, t)}^{\infty} e^{\beta y} dG(y) \right]^{(-\infty, a)} = g(\beta) \int_{-\infty}^a e^{(\lambda - \beta)t} dt. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается следующий факт.

**Лемма 2.** Пусть функция  $g$  имеет вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^c e^{\lambda t} dG(t), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad \operatorname{Var} G < \infty, \quad c \leq b.$$

Тогда для любого  $\beta > 0$

$$\left[ \frac{g(\lambda)}{\lambda - \beta} \right]^{(b, \infty)} = g(\beta) \frac{e^{(\lambda - \beta)b}}{\lambda - \beta}.$$

Предположим, что

$$\mathbf{P}(X_1 < t) = ce^{\alpha t}, \quad t < 0. \quad (11)$$

В этом случае

$$\varphi(\lambda) = \frac{c}{\lambda + \alpha} + \int_0^{\infty} e^{\lambda t} d\mathbf{P}(X_1 < t)$$

и нетрудно видеть, что при  $|z| < 1$  и достаточно больших  $R$  имеет место неравенство  $|z\varphi(\lambda)| < 1$  для всех значений  $\lambda$ , лежащих на контуре

$$\Gamma = \{\lambda : |\lambda| = R, \operatorname{Re} \lambda < 0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = 0, |\lambda| \leq R\}.$$

Это значит, что при обходе по контуру  $\Gamma$  функция  $1 - z\varphi(\lambda)$  не получает приращения аргумента. Следовательно, в силу известного принципа аргумента эта функция имеет одинаковое число нулей и полюсов внутри  $\Gamma$  при больших значениях  $R$ . Полюс там один в точке  $\lambda = -\alpha$ , значит, и нуль будет единственным. Обозначим его через  $\lambda_-(z)$ . Теперь мы можем записать

$$1 - z\varphi(\lambda) = \frac{(1 - z\varphi(\lambda))(\lambda + \alpha)}{\lambda - \lambda_-(z)} \frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda + \alpha}.$$

Функция  $(1 - z\varphi(\lambda))(\lambda + \alpha)(\lambda - \lambda_-(z))^{-1}$  как функция переменной  $\lambda$  аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , непрерывна, ограничена и не обращается в нуль в замыкании этого множества. Аналогичными свойствами в правой полуплоскости

обладает функция  $(\lambda - \lambda_-(z))(\lambda + \alpha)^{-1}$ . В силу известных свойств единственности факторизации (3) можно положить

$$R_+(z, \lambda) = C \frac{(1 - z\varphi(\lambda))(\lambda + \alpha)}{\lambda - \lambda_-(z)}, \quad R_-(z, \lambda) = C^{-1} \frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda + \alpha}.$$

Из (3) следует, что  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_-(z, \lambda) = 1$ , поэтому  $C = C(z) \equiv 1$ , хотя значение константы  $C$  можно было и не уточнять: она сократится при вычислении выражений вида  $(L_{\pm}g)(z, s, \lambda)$ .

Итак, в силу леммы 1 при  $a \leq 0$  для любой функции  $g$  вида

$$g(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} dG(t), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad \operatorname{Var} G < \infty,$$

имеем

$$\begin{aligned} (L_-g)(z, s, \lambda) &= \frac{\lambda - \lambda_-(s)}{\lambda - \lambda_-(z)} \left[ \frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda - \lambda_-(s)} g(\lambda) \right]^{(-\infty, a)} \\ &= \frac{(\lambda - \lambda_-(s))(\lambda_-(s) - \lambda_-(z))}{\lambda - \lambda_-(z)} \left[ \frac{g(\lambda)}{\lambda - \lambda_-(s)} \right]^{(-\infty, a)} \\ &= \frac{(\lambda_-(s) - \lambda_-(z))}{\lambda - \lambda_-(z)} g(\lambda_-(s)) e^{(\lambda - \lambda_-(s))a}. \end{aligned}$$

Мы приходим к следующему утверждению.

**Следствие 3.** Пусть  $D = [a, \infty)$ ,  $a \leq 0$ , и выполнено условие (11). Тогда

$$Q_1(z, u, \lambda) = \frac{(\lambda_-(s) - \lambda_-(z))}{(u - 1)(\lambda - \lambda_-(z))} e^{(\lambda - \lambda_-(s))a}.$$

Симметричными рассуждениями находится функция  $Q_2(z, u, \lambda)$  в случае, когда  $D = (-\infty, b]$ ,  $b \geq 0$  и  $\mathbf{P}(X_1 > t) = ce^{-\alpha t}$ ,  $t > 0$ . Для целочисленных случайных блужданий, у которых  $\mathbf{P}(X_1 = -k) = cp^{k-1}$ ,  $k \geq 1$ , или  $\mathbf{P}(X_1 = k) = cp^{k-1}$ ,  $k \geq 1$ , аналогичные результаты получаются по той же схеме с очевидной заменой интегралов суммами.

Вернемся к рассмотрению случая  $D = [a, b]$ ,  $a \leq 0 \leq b$ .

Предположим, что распределение  $X_1$  обладает плотностью вида

$$f(t) = \begin{cases} c_1 e^{-\alpha_1 t}, & t > 0, \\ c_2 e^{\alpha_2 t}, & t \leq 0, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\alpha_i > 0$ ,  $c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_1 = \alpha_1 \alpha_2$ . В этом случае

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda(c_2 - c_1) - \alpha_1 \alpha_2}{(\lambda - \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)};$$

интеграл, определяющий эту функцию, сходится в полосе  $-\alpha_2 < \operatorname{Re} \lambda < \alpha_1$  и

$$1 - z\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \lambda(\alpha_1 - \alpha_2 + z(c_2 - c_1)) + \alpha_1 \alpha_2(z - 1)}{(\lambda - \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)} = \frac{(\lambda - \lambda_+(z))(\lambda - \lambda_-(z))}{(\lambda - \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)}.$$

В силу уже упоминавшихся свойств единственности факторизации (3) можно положить

$$R_+(z, \lambda) = \frac{\lambda - \lambda_+(z)}{\lambda - \alpha_1}, \quad R_-(z, \lambda) = \frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda + \alpha_2}.$$



Вычислим  $Q_2(z, u, \lambda)$ . Воспользовавшись леммами 1 и 2, находим

$$\begin{aligned} (L_+h)(z, s, \lambda) &= \frac{\lambda - \lambda_+(s)}{(u-1)(\lambda - \lambda_+(z))} \left[ \frac{\lambda - \lambda_+(z)}{\lambda - \lambda_+(s)} \right]^{(b, \infty)} \\ &= \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{(u-1)(\lambda - \lambda_+(z))} e^{(\lambda - \lambda_+(s))b}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$(L_-h)(z, s, \lambda) = \frac{\lambda_-(s) - \lambda_-(z)}{(u-1)(\lambda - \lambda_-(z))} e^{(\lambda - \lambda_-(s))a}, \quad (14)$$

$$(L_-Q_2)(z, s, \lambda) = \frac{\lambda_-(s) - \lambda_-(z)}{\lambda - \lambda_-(z)} Q_2(z, u, \lambda_-(s)) e^{(\lambda - \lambda_-(s))a}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (L_+L_-h)(z, s, \lambda) &= \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{\lambda - \lambda_+(z)} (L_-h)(z, s, \lambda_+(s)) e^{(\lambda - \lambda_+(s))b} \\ &= \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{(u-1)(\lambda - \lambda_+(z))} H_1(z, s) \mu^{-a}(z, s) e^{(\lambda - \lambda_+(s))b}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (L_+L_-Q_2)(z, s, \lambda) &= \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{\lambda - \lambda_+(z)} (L_-Q_2)(z, s, \lambda_+(s)) e^{(\lambda - \lambda_+(s))b} \\ &= \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{\lambda - \lambda_+(z)} H_1(z, s) \mu^{-a}(z, s) Q_2(z, u, \lambda_-(s)) e^{(\lambda - \lambda_+(s))b}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь и далее мы используем обозначения

$$\begin{aligned} H_1(z, s) &= \frac{\lambda_-(s) - \lambda_-(z)}{\lambda_+(s) - \lambda_-(z)}, \quad H_2(z, s) = \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{\lambda_-(s) - \lambda_+(z)}, \\ H(z, s) &= H_1(z, s) H_2(z, s), \quad \mu(s) = e^{\lambda_-(s) - \lambda_+(s)}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения (13)–(17) во второе тождество из (6), получаем

$$\begin{aligned} Q_2(z, u, \lambda) &= \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{(u-1)(\lambda - \lambda_+(z))} e^{(\lambda - \lambda_+(s))b} \\ &\quad \times (1 - H_1(z, s) \mu^{-a}(z, s) + (u-1) H_1(z, s) \mu^{-a}(z, s) Q_2(z, u, \lambda_-(s))). \end{aligned} \quad (18)$$

Для нахождения  $Q_2(z, u, \lambda_-(s))$  подставим в (18) значение  $\lambda = \lambda_-(s)$ . Из полученного уравнения находим

$$(u-1)Q_2(z, u, \lambda_-(s)) = H_2(z, s) \mu^b(z, s) \frac{1 - H_1(z, s) \mu^{-a}(s)}{1 - H(z, s) \mu^{b-a}(s)}.$$

Подстановка этого выражения в (18), а также симметричные рассуждения для  $Q_1(z, u, \lambda)$  приводят к следующему результату.

**Теорема 3.** Пусть  $D = [a, b]$ ,  $a \leq 0 \leq b$ , и выполнено условие (12). Тогда при  $|z| < 1$ ,  $|uz| < 1$ ,  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ ,  $s = zu$

$$Q_1(z, u, \lambda) = \frac{\lambda_-(s) - \lambda_-(z)}{(u-1)(\lambda - \lambda_-(z))} \frac{1 - H_2(z, s) \mu^b(s)}{1 - H(z, s) \mu^{b-a}(s)} e^{(\lambda - \lambda_-(s))a}, \quad (19)$$

$$Q_2(z, u, \lambda) = \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{(u-1)(\lambda - \lambda_+(z))} \frac{1 - H_1(z, s) \mu^{-a}(s)}{1 - H(z, s) \mu^{b-a}(s)} e^{(\lambda - \lambda_+(s))b}. \quad (20)$$

Эти выражения без труда обращаются по переменной  $\lambda$ . Например, из (20) получаем

**Следствие 4.** В условиях теоремы 3 для любого  $x \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n u^k \mathbf{P}(T_n = k, S_n \geq b+x) = \frac{(\lambda_+(s) - \lambda_+(z))(1 - H_1(z, s)\mu^{-a}(s))}{(1-u)\lambda_+(z)(1 - H(z, s)\mu^{b-a}(s))} e^{-\lambda_+(s)b - \lambda_+(z)x}.$$

Применяя (2), получаем

**Следствие 5.** В условиях теоремы 3

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \frac{1}{1 - s\varphi(\lambda)} \left\{ 1 - \frac{\lambda_-(s) - \lambda_-(z)}{\lambda - \lambda_-(z)} \frac{1 - H_2(z, s)\mu^b(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b-a}(s)} e^{(\lambda - \lambda_-(s))a} - \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{\lambda - \lambda_+(z)} \frac{1 - H_1(z, s)\mu^{-a}(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b-a}(s)} e^{(\lambda - \lambda_+(s))b} \right\}.$$

Обращение полученных представлений по переменным  $z$  и  $u$  является весьма сложной задачей, что требует отдельных исследований.

Предложенный способ нахождения функций  $Q_i(z, u, \lambda)$  приводит к явным выражениям и в более общей ситуации, когда функция  $\varphi(\lambda)$  рациональна. В этом случае компоненты факторизации тоже будут рациональными функциями (см. [7]), а значит, могут быть разложены на простые дроби. Использование операторов  $L_{\pm}$  с простыми дробями внутри квадратных скобок осуществляется, как мы видели, несложно, однако в целом будут получаться более громоздкие выражения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Спирер Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
2. Скороход А. В., Слободенюк Н. П. Предельные теоремы для случайных блужданий. Киев: Наук. думка, 1970.
3. Бородин А. Н., Ибрагимов И. А. Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1994. Т. 195. С. 3–285.
4. Семенов А. Т. Асимптотические разложения для распределения времени пребывания случайного блуждания в отрезке // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 4. С. 918–930.
5. Лугавов В. С., Рогозин Б. А. Факторизационные представления для времен пребывания полумарковских блужданий // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 389–406.
6. Лугавов В. С. О компонентах факторизационного представления для времени пребывания полунепрерывных случайных блужданий в полосе // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 800–809.
7. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

*Статья поступила 10 июня 2008 г.*

Лотов Владимир Иванович  
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
 пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
 lotov@math.nsc.ru