УДК 519.21

О ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ В ПОЛОСЕ

В. И. Лотов

Аннотация. Получены асимптотические представления для тройного преобразования над совместным распределением времени пребывания случайного блуждания в полосе (а также в полуплоскости) за n шагов и положения в момент n при условии неограниченного удаления границ этих множеств. На распределение скачков блуждания накладываются условия крамеровского типа.

Ключевые слова: случайное блуждание, время пребывания в полосе, факторизационные тождества, производящие функции, асимптотический анализ.

1. Постановка задачи. Основной результат

Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$. Для произвольного борелевского множества $D \subset R$ положим

$$T_n = T_n(D) = \sum_{k=1}^{n} I_{\{S_k \in D\}},$$

где $I_A(\omega) = 1$, если $\omega \in A$, и $I_A(\omega) = 0$ в противном случае. Таким образом, T_n есть время пребывания случайного блуждания в множестве D на интервале времени $[1, \ldots, n]$, т. е. число точек k, $1 \leq k \leq n$, таких, что $S_k \in D$.

Мы будем полагать везде $D = [-a, b]$, где $-a \leq b$. При этом будем говорить о *двуграничной задаче*, если оба числа a и b конечны. Если же $a = \infty$, $b < \infty$ или $a < \infty$, $b = \infty$, то будем говорить об *однограничной задаче.*

Конечная цель исследований здесь состоит в нахождении вероятностей $\mathbf{P}(T_n = k)$ и изучении их поведения при больших n, в том числе для случая, когда множество D само зависит от n. Здесь существуют разные подходы. Для простейших блужданий частного вида применимы комбинаторные методы [1, 2]. Наибольшее число публикаций относится к случаю $D = (0, \infty)$ и связанному с ним закону арксинуса (см., например, [3, 4]). Хорошо известны предельные теоремы о времени пребывания, основанные на использовании сходимости распределений функционалов от траекторий случайного блуждания к распределению соответствующих функционалов от предельных процессов. Весьма подробная библиография и результаты этого направления исследований содержатся в [5, 6].

Разумеется, изучение времени пребывания по своему типу относится к граничным задачам для случайных блужданий, т. е. к нахождению вероятностей,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–12131).

связанных с взаимным расположением траекторий случайного блуждания и границы некоторого множества. Известно, что для многих граничных задач наиболее глубокие результаты, в том числе полные асимптотические разложения вероятностей, получаются с использованием аппарата факторизационных тождеств (см. [7–9] и библиографию в них). По этой причине вполне естественным представляется желание применить к изучению распределения времени пребывания технику факторизационных исследований, достаточно хорошо разработанную к настоящему времени, и получить на этом пути новые результаты. Определенные шаги в этом направлении уже предпринимались в работах [10–12].

Факторизационный метод обычно состоит из нескольких этапов. На первом из них находятся факторизационные тождества для двойных или тройных преобразований над распределением исследуемого граничного функционала. Как правило, в общем случае они не приводят к выражениям, пригодным для дальнейшего их обращения. По этой причине на втором этапе в рамках той или иной схемы асимптотического анализа (например, при неограниченном удалении границы рассматриваемого множества) выделяется главная часть полученных на первом этапе преобразований и оценивается погрешность такого приближения; в широких условиях она оказывается пренебрежимо малой. Этот этап наиболее сложен. Здесь в полной мере требуется использовать весьма тонкие свойства компонент факторизации. На третьем этапе производится обращение главных частей преобразований, как правило, асимптотическое. Это может осуществляться с помощью контурного интегрирования с применением метода перевала [7, 9], или прямыми вычислениями [8].

Заметим, что для блужданий, скачки которых удовлетворяют условию Крамера, детальное исследование аналитических свойств компонент факторизации проведено в [7]. На результатах этой работы базируются теперь многие исследования в граничных задачах.

Упомянутые работы [10–12] относятся к первому этапу изучения распределения времени пребывания — нахождению факторизационных представлений для кратных производящих функций. В них применяется весьма сложная техника матричной факторизации, для которой перспектива дальнейшего обращения полученных представлений выглядит мало продуктивной. Замечания по этому поводу содержатся в [13]. По-прежнему актуальным представляется исследование времени пребывания в терминах компонент обычной одномерной (и хорошо изученной) факторизации.

Первый этап этой работы выполнен в [13], где в терминах обычной факторизации найдены тождества для тройных преобразований над совместным распределением пары (T_n, S_n) в однограничной и двуграничной задачах. Эти тождества дают явные выражения для тройных преобразований в однограничных задачах, однако в случае двух границ искомые преобразования входят в тождества неявно. В обоих случаях результаты формулируются в терминах специального вида проекционных операторов над компонентами факторизации, вычисление которых нетрудно произвести, если распределение X_1 обладает экспоненциальной плотностью на одной из полуосей в однограничной задаче или же на обеих полуосях в двуграничной задаче. Для случайных блужданий с произвольным распределением скачков полученные тождества не дают компактных выражений производящих функций, пригодных для дальнейшего их обращения. Поэтому в данной работе производится асимптотический анализ полученных в [13] факторизационых представлений при условии, что $a \to \infty$, $b \to \infty$, с целью выделения более просто устроенных главных частей.

Тем самым настоящая работа является продолжением [13] и соответствует второму этапу исследований. Основными результатами этой статьи являются асимптотические представления для тройных преобразований над совместным распределением пары (T_n, S_n) в однограничной и двуграничной задачах и, как следствие, для производящих функций над распределением T_n (теорема 1). Они состоят в выделении сравнительно просто устроенных главных частей и оценивании остатков, которые оказываются экспоненциально малыми по сравнению с главными частями. Дополнительно на распределение X_1 накладываются условия крамеровского типа.

Как правило, асимптотическое поведение коэффициентов степенного ряда определяется поведением суммы этого ряда в окрестности единицы. Как показывают асимптотические исследования распределения момента первого выхода случайного блуждания из полуплоскости или из полосы [7, 8], даже для получения полных асимптотических разложений вероятностей в условиях Крамера достаточно знать поведение соответствующей производящей функции в окрестности единицы; на оставшейся части единичной окружности модуль производящей функции отличается экспоненциально малым множителем. По этой причине ниже находится асимптотическое представление функции

$$f_{a,b}(z,u,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n([-a,b])} e^{\lambda S_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} u^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n([-a,b]) = k, S_n \in dx)$$

только вблизи единицы по переменным z и u.

Чтобы избежать длинных формулировок, приведем в этом разделе асимптотическое представление для $f_{a,b}(z,u,0)$. Для этого нам потребуется ряд обозначений. Все они связаны с компонентами факторизации, определение которых также следует напомнить.

Введем сначала лестничные моменты $\eta_\pm$ и лестничные высоты $\chi_\pm$:

$$\eta_- = \inf\{n \ge 1 : S_n < 0\}, \quad \eta_+ = \inf\{n \ge 1 : S_n > 0\}, \quad \chi_\pm = S_{\eta_\pm}.$$

Здесь полагаем $\eta_+ = \infty$, если $S_n \le 0$ при всех n, и $\eta_- = \infty$, если все $S_n \ge 0$. На событиях $\{\eta_\pm = \infty\}$ величины $\chi_\pm$ будем считать неопределенными.

Пусть $R_\pm(z,\lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_\pm} \exp\{\lambda\chi_\pm\}; \eta_\pm < \infty)$ при $|z| \le 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Эти функции являются компонентами известной факторизации (см., например, [14])

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_+(z,\lambda) R_-(z,\lambda) R_0(z), \tag{1}$$

где

$$R_0(z) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}(S_n = 0) \right\}.$$

Известно также, что при $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ справедливы представления

$$R_-(z,\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}(\exp\{\lambda S_n\}; S_n < 0) \right\},$$

$$R_+(z,\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}(\exp\{\lambda S_n\}; S_n > 0) \right\}.$$

Везде в дальнейшем будем предполагать выполненными следующие условия крамеровского типа.

A1. Распределение X_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту.

A2. $|\varphi(\lambda)| < \infty$ при $-\gamma \le Re\lambda \le \beta$, где $\gamma \ge 0$, $\beta \ge 0$,$\beta + \gamma > 0$, $\mathbf{E}|X_1| < \infty$.

Значения чисел γ и β будут ниже каждый раз уточняться.

Если $\mu_1 = \mathbf{E}X_1 = 0$ и $\gamma > 0$, $\beta > 0$, то, как следует из условия A2, при некотором $\delta_1 > 0$ функция $1 - z\varphi(\lambda)$ имеет ровно два вещественных нуля $\lambda_\pm(z)$, $z \in [1-\delta_1, 1]$, $\lambda_-(z) \le 0 \le \lambda_+(z)$. Функции $\lambda_\pm(z)$ могут быть аналитически продолжены в некоторую δ-окрестность отрезка $[1-\delta_1, 1]$ с разрезом по лучу $z \ge 1$. При этом $\lambda_\pm(z)$ по-прежнему остаются нулями функции $1 - z\varphi(\lambda)$. Если же $\mu_1 \ge 0$ и $\beta > 0$, то при таких же z гарантируется только существование нуля $\lambda_+(z) \ge 0$. Этот нуль будет также существовать при условии $\mu_1 < 0$,$\beta > 0$, $\varphi(\beta) > 1$. Аналогично нуль $\lambda_-(z)$ всегда существует, если $\mu_1 \le 0$ и $\gamma > 0$, а также при $\mu_1 > 0$, $\gamma > 0$, $\varphi(\gamma) > 1$. При выполнении условия A2 факторизация (1) справедлива в области $-\gamma \le \operatorname{Re}\lambda \le \beta$. Функции $\lambda_\pm(z)$ в случае их существования являются также нулями компонент факторизации: $R_\pm(z, \lambda_\pm(z)) = 0$. Эти и ряд других используемых в дальнейшем сведений подробно изложены в [7]. Положим $\lambda_\pm = \lambda_\pm(1)$. Тогда, очевидно, $\lambda_\pm = 0$ при $\mu_1 = 0$; $\lambda_- = 0$, $\lambda_+ > 0$ при $\mu_1 < 0$ и $\lambda_- < 0$, $\lambda_+ = 0$ при $\mu_1 > 0$.

Все последующие утверждения, использующие функции $\lambda_\pm(s)$, $\lambda_\pm(z)$, распространяются только на те ситуации, когда эти функции существуют в соответствии с условием A2 и сделанными выше замечаниями.

Обозначим

$$\begin{gathered}
V(z,s,\lambda) = \frac{R_+(s,\lambda)R_+(z,\lambda_+(s))}{(\lambda - \lambda_+(s))R'_+(s,\lambda_+(s))R_+(z,\lambda)}, \\
U(z,s,\lambda) = \frac{R_-(s,\lambda)R_-(z,\lambda_-(s))}{(\lambda - \lambda_-(s))R'_-(s,\lambda_-(s))R_-(z,\lambda)}, \\
H_1(z,s) = U(z,s,\lambda_+(s)), \quad H_2(z,s) = V(z,s,\lambda_-(s)), \\
H(z,s) = H_1(z,s)H_2(z,s), \quad \mu(s) = e^{\lambda_-(s) - \lambda_+(s)},
\end{gathered} \tag{2}$$

и пусть $L_\delta = \{s : |s| < 1, |s-1| < \delta\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $a \ge 0$, $b \ge 0$ *и выполнены условия* A1, A2, *в которых* $\gamma > 0$ *и* $\beta > 0$. *Тогда существуют* $\delta > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что при* $z \in L_\delta$, $s = zu \in L_\delta$ *имеет место представление*

$$\begin{aligned}
(1-s)(1 + f_{a,b}(z,u,0)) = 1 - U(z,s,0)&\frac{1 - H_2(z,s)\mu^b(s)}{1 - H(z,s)\mu^{b+a}(s)} e^{\lambda_-(s)a} \\
&- V(z,s,0)\frac{1 - H_1(z,s)\mu^a(s)}{1 - H(z,s)\mu^{b+a}(s)} e^{-\lambda_+(s)b} + (u-1)\Delta(z,s),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $|\Delta(z,s)| \le C_1 e^{-\varepsilon a} + C_2 e^{-\varepsilon b}$ *при* $|z| < |s|$.

Здесь и далее буквами $C, C_1, C_2, \ldots$ обозначаются константы; одна и та же буква может соответствовать различным константам в разных выражениях.

Замечания. 1. Отметим, что значения $a = \infty$ или $b = \infty$ в (3) не исключаются. Учитывая тот факт, что при $s \in L_\delta$ для малых δ имеет место $|\mu(s)| < 1$,

$\operatorname{Re}\lambda_-(s) < 0, \operatorname{Re}\lambda_+(s) > 0$, получаем из (3) соответствующие представления для одннограничных задач. Например,

$$(1-s)(1+f_{\infty,b}(z,u,0)) = 1 - V(z,s,0)e^{-\lambda_+(s)b} + (u-1)\Delta(z,s),$$

где $|\Delta(z,s)| \le Ce^{-\varepsilon b}$ при $|z| < |s|$.

2. Как показано ниже, участвующие в (3) функции

$$\left|\frac{1-H_2(z,s)\mu^b(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}\right|, \quad \left|\frac{1-H_1(z,s)\mu^a(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}\right|$$

отделены от 0 равномерно по a и b, а также имеет место сходимость $\lambda_\pm(s) \to 0$ при $s \to 1$. По этой причине остаточный член $\Delta(z,s)$ в (3) с ростом a и b убывает экспоненциально быстро по сравнению с главной частью.

3. Представление (3) сильно упрощается, если предположить, что распределение X_1 обладает плотностью вида

$$f(t) = \begin{cases} c_1 e^{-\alpha_1 t}, & t > 0, \\ c_2 e^{\alpha_2 t}, & t \le 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $\alpha_i > 0$, $c_1\alpha_2 + c_2\alpha_1 = \alpha_1\alpha_2$. В этом случае $\Delta(z,s) \equiv 0$,

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda(c_2 - c_1) - \alpha_1\alpha_2}{(\lambda-\alpha_1)(\lambda+\alpha_2)}$$

(эта функция существует в полосе $-\alpha_2 < \operatorname{Re}\lambda < \alpha_1$) и

$$1 - z\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \lambda(\alpha_1 - \alpha_2 + z(c_2-c_1)) + \alpha_1\alpha_2(z-1)}{(\lambda-\alpha_1)(\lambda+\alpha_2)} = \frac{(\lambda-\lambda_+(z))(\lambda-\lambda_-(z))}{(\lambda-\alpha_1)(\lambda+\alpha_2)}.$$

В силу известных свойств единственности факторизации (1) можно положить

$$R_+(z,\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_+(z)}{\lambda-\alpha_1}, \quad R_-(z,\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_-(z)}{\lambda+\alpha_2}, \tag{5}$$

и простой подсчет приводит к формулам

$$H_1(z,s) = \frac{\lambda_-(s)-\lambda_-(z)}{\lambda_+(s)-\lambda_-(z)}, \quad H_2(z,s) = \frac{\lambda_+(s)-\lambda_+(z)}{\lambda_-(s)-\lambda_+(z)}, \tag{6}$$

$$V(z,s,0) = \frac{\lambda_+(z)-\lambda_+(s)}{\lambda_+(z)}, \quad U(z,s,0) = \frac{\lambda_-(z)-\lambda_-(s)}{\lambda_-(z)}. \tag{7}$$

2. Предварительные результаты

Полученные в [13] результаты являются отправной точкой наших исследований, поэтому мы приведем их формулировки.

Пусть $D = [-a,b]$. Введем функции

$$Q_0(z,u,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} u^k \int\limits_{[-a,b]} e^{\lambda x}\mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx),$$

$$Q_1(z,u,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} u^k \int\limits_{(-\infty,-a)} e^{\lambda x}\mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx),$$

$$Q_2(z,u,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\sum_{k=0}^{n}u^k\int\limits_{(b,\infty)}e^{\lambda x}\mathbf{P}(T_n=k,S_n\in dx),$$

где $|z|<1$, $|uz|<1$ и $\operatorname{Re}\lambda=0$. В [13] установлено, что

$$u(Q_1(z,u,\lambda)+Q_2(z,u,\lambda))(1-z\varphi(\lambda))+(1+Q_0(z,u,\lambda))(1-zu\varphi(\lambda))=1. \quad (8)$$

Перепишем (8) в виде

$$1+Q_1(z,u,\lambda)+Q_2(z,u,\lambda)+Q_0(z,u,\lambda) \\ =\frac{1}{1-zu\varphi(\lambda)}(1+(1-u)(Q_1(z,u,\lambda)+Q_2(z,u,\lambda))).$$

Очевидно, левая часть этого равенства равна $1+f_{a,b}(z,u,\lambda)$, т. е.

$$1+f_{a,b}(z,u,\lambda)=\frac{1}{1-zu\varphi(\lambda)}(1+(1-u)(Q_1(z,u,\lambda)+Q_2(z,u,\lambda))). \quad (9)$$

Итак, для нахождения функции $f_{a,b}(z,u,\lambda)$ достаточно знать функции Q_i, $i=1,2$. Уравнение (8) решалось в [13] методом типа Винера — Хопфа, в результате чего найдены представления функций Q_i, $i=1,2$, через компоненты факторизации функций $1-z\varphi(\lambda)$, $1-zu\varphi(\lambda)$. Для формулировки этого результата введем дополнительные обозначения.

Для всякой функции g вида

$$g(z,s,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda x}dG_{z,s}(x), \quad \text{где} \int\limits_{-\infty}^{\infty}|dG_{z,s}(x)|<\infty,$$

определим операторы $L_\pm$, которые действуют следующим образом:

$$(L_+g)(z,s,\lambda)=\frac{R_+(s,\lambda)}{R_+(z,\lambda)}\left[\frac{R_+(z,\lambda)}{R_+(s,\lambda)}g(z,s,\lambda)\right]^{(b,\infty)},$$

$$(L_-g)(z,s,\lambda)=\frac{R_-(s,\lambda)}{R_-(z,\lambda)}\left[\frac{R_-(z,\lambda)}{R_-(s,\lambda)}g(z,s,\lambda)\right]^{(-\infty,-a)}.$$

Здесь используется обозначение

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda x}dG(x)\right]^A=\int\limits_A e^{\lambda x}dG(x).$$

Введенные таким образом операторы сами зависят от z и s, однако для краткости записи мы не отражаем этот факт в обозначениях операторов.

Обозначим $s=zu$, $q_i(z,s,\lambda)\equiv Q_i(z,s/z,\lambda)$, $h(z,s,\lambda)\equiv z(s-z)^{-1}$. В [13] получена

Теорема 2. *Пусть* $D=[-a,b]$, $-a\le 0\le b$. *Тогда при* $|z|<1$, $|s|<1$, $\operatorname{Re}\lambda=0$ *справедливы следующие представления:*

$$\begin{aligned} q_1(z,s,\lambda)&=(L_-h)(z,s,\lambda)-(L_-L_+h)(z,s,\lambda)+(L_-L_+q_1)(z,s,\lambda),\\ q_2(z,s,\lambda)&=(L_+h)(z,s,\lambda)-(L_+L_-h)(z,s,\lambda)+(L_+L_-q_2)(z,s,\lambda). \end{aligned} \quad (10)$$

Следствие 1. *Для* $D = [-a, \infty)$, $-a \le 0$, *имеем*

$$q_1(z, s, \lambda) = (L_- h)(z, s, \lambda) \tag{11}$$

и аналогично для $D = (-\infty, b]$, $b \ge 0$, —

$$q_2(z, s, \lambda) = (L_+ h)(z, s, \lambda). \tag{12}$$

Несмотря на то, что формулы (10) задают итерационные процессы для нахождения функций q_i, они приводят к достаточно простым явным выражениям для q_i лишь в частных ситуациях, когда, к примеру, компоненты факторизации являются дробно-линейными функциями (см. [13], а также теорему 4 ниже). Однако для распределений X_1 более общего вида простых выражений для q_i найти не удается, поэтому для целей дальнейшего обращения производящих функций приходится довольствоваться их асимптотическими представлениями, которые будут получены ниже. Если предположить, что $a \to \infty$ и $b \to \infty$, то в условиях Крамера (см. ниже) выражения вида $(L_\pm g)(z, s, \lambda)$ в окрестности единицы по переменным z и s можно приблизить более простыми, отделив при этом экспоненциально малые погрешности такого приближения. Подставив полученные приближения в (10), придем к асимптотическим представлениям для функций q_1, q_2, а затем и для $f_{a,b}(z, u, \lambda)$. Это все будет проделано в следующих разделах.

Как показывают формулы (10), в них произошел переход от переменных z и u к переменным z и s. Это обстоятельство в ряде случаев делает полезным переход от двойного преобразования над $T_n(D)$ к преобразованию над $T_n(\overline{D})$, поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E} u^{T_n(D)} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E} u^{n - T_n(\overline{D})} = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E} v^{T_n(\overline{D})}, \tag{13}$$

где $s = zu$, $v = u^{-1}$.

3. Асимптотический анализ операторов $L_\pm$

Обозначим через Π множество функций g, имеющих вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \quad \operatorname{Re}\lambda = 0, \quad \|g\| = \int_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty.$$

Для произвольного $t \in \mathbb{R}$, следуя [8], введем множества

$$\Pi(t) = \{g(\lambda) : g(\lambda + t) \in \Pi\},$$

$$\Pi_-(t) = \left\{ g \in \Pi(t) : g(\lambda) = \int_{(-\infty, 0]} e^{\lambda y} dG(y),\ \operatorname{Re}\lambda = t \right\},$$

$$\Pi_+(t) = \left\{ g \in \Pi(t) : g(\lambda) = \int_{[0, \infty)} e^{\lambda y} dG(y),\ \operatorname{Re}\lambda = t \right\}$$

и для $g \in \Pi(t)$ и $g \in \Pi_\pm(t)$ положим $\|g\|_t = \int e^{ty} |dG(y)|$ с очевидными соглашениями относительно области интегрирования. В формулировках нижеследующих лемм 1–3 переменные z и s можно считать независимыми.

Сначала нам потребуется лемма 1 из [8] и следующее ее видоизменение.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* A1, A2. *Тогда найдутся* $\delta > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что при*

$$s \in L_\delta = \{s : |s| < 1,\ |s-1| < \delta\}, \quad |z| \le 1,$$

существует хотя бы одна из функций $\lambda_\pm(s)$ *и справедливы представления*

$$\frac{R_\pm(z,\lambda)}{R_\pm(s,\lambda)} = \frac{R_\pm(z,\lambda_\pm(s))}{(\lambda-\lambda_\pm(s))R'_\pm(s,\lambda_\pm(s))} + \psi_\pm(z,s,\lambda),$$

в которых производная берется по переменной λ, $\psi_\pm(z,s,\lambda) \in \Pi_\pm(\lambda_\pm \pm \varepsilon)$, *причем нормы этих функций* $\|\psi_\pm(z,s,.)\|_{\lambda_\pm \pm \varepsilon}$ *ограничены равномерно по* $s \in L_\delta$ *и* $|z| \le 1$.

Доказательство. Обозначим

$$w_+(s,\lambda) = \frac{R_+(s,\lambda)(\lambda+\gamma+1)}{\lambda-\lambda_+(s)}, \quad w_-(s,\lambda) = \frac{R_-(s,\lambda)(\lambda-\beta-1)}{\lambda-\lambda_-(s)}.$$

Известно [8], что при некоторых $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ выполняется

$$w_+^{\pm 1}(s,\lambda) \in \Pi_+(\lambda_+ + \varepsilon), \quad w_-^{\pm 1}(s,\lambda) \in \Pi_-(\lambda_- - \varepsilon), \quad s \in L_\delta,$$

причем нормы этих функций ограничены равномерно по $s \in L_\delta$. Выделяя особенность в точке $\lambda = \lambda_+(s)$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{R_+(z,\lambda)}{R_+(s,\lambda)} &= \frac{R_+(z,\lambda)(\lambda+\gamma+1)}{(\lambda-\lambda_+(s))w_+(s,\lambda))} \\ &= \frac{R_+(z,\lambda_+(s))(\lambda+\gamma+1)}{(\lambda-\lambda_+(s))w_+(s,\lambda)} + \frac{(R_+(z,\lambda)-R_+(z,\lambda_+(s)))(\lambda+\gamma+1)}{(\lambda-\lambda_+(s))w_+(s,\lambda)}.\end{aligned}$$

Очевидно,

$$\psi_+^{(1)}(z,s,\lambda) \equiv \frac{(R_+(z,\lambda)-R_+(z,\lambda_+(s)))(\lambda+\gamma+1)}{(\lambda-\lambda_+(s))w_+(s,\lambda)} \in \Pi_+(\lambda_+ + \varepsilon).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda+\gamma+1}{(\lambda-\lambda_+(s))w_+(s,\lambda)} &= w_+^{-1}(s,\lambda) \\ &+ \frac{\lambda_+(s)+\gamma+1}{\lambda-\lambda_+(s)}\left[w_+^{-1}(s,\lambda_+(s)) + (\lambda-\lambda_+(s))\frac{w_+^{-1}(s,\lambda)-w_+^{-1}(s,\lambda_+(s))}{\lambda-\lambda_+(s)}\right] \\ = \frac{1}{(\lambda-\lambda_+(s))R'_+(s,\lambda_+(s))} &+ w_+^{-1}(s,\lambda) + (\lambda_+(s)+\gamma+1)\frac{w_+^{-1}(s,\lambda)-w_+^{-1}(s,\lambda_+(s))}{\lambda-\lambda_+(s)} \\ &\equiv \frac{1}{(\lambda-\lambda_+(s))R'_+(s,\lambda_+(s))} + \psi_+^{(2)}(s,\lambda),\end{aligned}$$

где $\psi_+^{(2)}(s,\lambda) \in \Pi_+(\lambda_+ + \varepsilon)$ наряду с $w_+^{-1}(s,\lambda)$ (см. [7]). Остается положить

$$\psi_+(z,s,\lambda) = \psi_+^{(1)}(z,s,\lambda) + R_+(z,\lambda_+(s))\psi_+^{(2)}(s,\lambda).$$

Утверждение для $R_-(z,\lambda)R_-^{-1}(s,\lambda)$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

В дальнейшем число $\varepsilon > 0$ выбирается в соответствии с утверждением этой леммы. Заметим также, что из определения функции $\psi_+(z,s,\lambda)$ вытекает равенство $\psi_+(s,s,\lambda) \equiv 1$. По этой причине функцию $\psi_+(z,s,\lambda)$ можно представить в виде

$$\psi_+(sv,s,\lambda) = 1 + (v-1)\psi_+^{(0)}(sv,s,\lambda), \quad z = sv,$$

с теми же свойствами аналитичности по λ у $\psi_+^{(0)}(z,s,\lambda)$, что и $\psi_+(z,s,\lambda)$. Точно так же обстоит дело и с функцией $\psi_-(z,s,\lambda)$. Этим мы будем пользоваться в доказательствах следующих двух лемм.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* A1, A2, *при этом предполагается, что* $\beta > 0$ *и* $\varphi(\beta) > 1$, *если* $\mathbf{E}X_1 < 0$. *Тогда для всякой функции* $g(\lambda) = \int\limits_{(-\infty,0]} e^{\lambda y} dG(y) \in \Pi_-(0)$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что при* $|z| < 1$, $s \in L_\delta$, $\operatorname{Re}\lambda \le \lambda_+$ *имеет место представление*

$$(L_+g)(z,s,\lambda) = V(z,s,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}g(\lambda_+(s)) + \frac{(z-s)R_+(s,\lambda)}{sR_+(z,\lambda)} \int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda y}\, d\varphi_{z,s}(y),$$

где $V(z,s,\lambda)$ *из* (2) *и для любых* $x \ge 0$

$$\int\limits_{(b+x,\infty)} e^{\tau y}|d\varphi_{z,s}(y)| \le Ce^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \tau)(b+x)}\|g\|_\tau, \quad \tau \le \lambda_+ + \varepsilon,$$

$$\left|\int\limits_{(b+x,\infty)} e^{\tau y} d\varphi_{z,s}(y)\right| \le Ce^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \operatorname{Re}\tau)(b+x)}|g(\tau)|, \quad \operatorname{Re}\tau \le \lambda_+ + \varepsilon.$$

Доказательство. Воспользуемся утверждением леммы 1 и замечанием, сделанным после ее доказательства. При $s \in L_\delta$ имеет место неравенство $\operatorname{Re}\lambda_+(s) > \lambda_+$, тем самым при $\operatorname{Re}\lambda \le \lambda_+$ получаем

$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(s)}\right]^{[b,\infty)} = -\int\limits_b^\infty e^{\lambda y} \int\limits_{(-\infty,0]} e^{-\lambda_+(s)(y-t)}\, dG(t)dy$$

$$= -g(\lambda_+(s)) \int\limits_b^\infty e^{(\lambda-\lambda_+(s))y}\, dy = \frac{g(\lambda_+(s))e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}}{\lambda - \lambda_+(s)}.$$

Поэтому

$$(L_+g)(z,s,\lambda) = \frac{R_+(s,\lambda)}{R_+(z,\lambda)}\Bigg[\Bigg(\frac{R_+(z,\lambda_+(s))}{(\lambda-\lambda_+(s))R'_+(s,\lambda_+(s))} + 1$$

$$+ (z-s)s^{-1}\psi_+^{(0)}(z,s,\lambda)\Bigg)g(\lambda)\Bigg]^{(b,\infty)} = V(z,s,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}g(\lambda_+(s))$$

$$+ \frac{(z-s)R_+(s,\lambda)}{sR_+(z,\lambda)} \int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda y} d_y \int\limits_{(-\infty,0]} \Psi_{z,s}(y-t)\, dG(t),$$

где функция $\Psi_{z,s}$ удовлетворяет соотношению

$$\psi_+^{(0)}(z,s,\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y}\, d\Psi_{z,s}(y), \quad \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_+ + \varepsilon.$$

Положим

$$\varphi_{z,s}(y) = \int\limits_{(-\infty,0]} \Psi_{z,s}(y-t)\, dG(t).$$

В силу свойств функции $\psi_+(z,s,\lambda)$, установленных в лемме 1, при $\tau \le \lambda_+ + \varepsilon$ равномерно по s и z выполняется (см. лемму 2 из [7])

$$\left|\int\limits_v^\infty e^{\tau y} d\Psi_{z,s}(y)\right| \le \int\limits_v^\infty e^{\tau y}|d\Psi_{z,s}(y)|$$

$$= \int\limits_v^\infty e^{(\lambda_+ + \varepsilon)y - (\lambda_+ + \varepsilon - \tau)y}|d\Psi_{z,s}(y)| \le Ce^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \tau)v}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{(b+x,\infty)} e^{\tau y}|d\varphi_{z,s}(y)| \le \int\limits_{(b+x,\infty)} e^{\tau y} d_y \int\limits_{(-\infty,0]} |\Psi_{z,s}(y-t)|\,|dG(t)|$$

$$= \int\limits_{(b+x,\infty)} e^{\tau u}|d\Psi_{z,s}(u)| \int\limits_{(-\infty,0]} e^{\tau t}|dG(t)| \le Ce^{-(\lambda_+ +\varepsilon-\tau)(b+x)}\|g\|_\tau,$$

а также при $\operatorname{Re}\tau \le \lambda_+ + \varepsilon$

$$\left|\int\limits_{(b+x,\infty)} e^{\tau y} d\varphi_{z,s}(y)\right| = \left|\int\limits_{(b+x,\infty)} e^{\tau u}\, d\Psi_{z,s}(u) \int\limits_{(-\infty,0]} e^{\tau t} dG(t)\right|$$

$$\le Ce^{-(\lambda_+ +\varepsilon-\operatorname{Re}\tau)(b+x)}|g(\tau)|.$$

Лемма доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* A1, A2, *при этом предполагается, что* $\gamma > 0$ *и* $\varphi(\gamma) > 1$, *если* $\mathbf{E}X_1 > 0$. *Тогда любой функции* $g(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y}\, dG(y) \in \Pi_+(0)$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что при* $|z| < 1$, $s \in L_\delta$, $\operatorname{Re}\lambda \ge \lambda_-$ *имеет место представление*

$$(L_-g)(z,s,\lambda) = U(z,s,\lambda)e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a}g(\lambda_-(s)) + \frac{(z-s)R_-(s,\lambda)}{sR_-(z,\lambda)} \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y}\, d\theta_{z,s}(y),$$

в котором $U(z,s,\lambda)$ *из* (2) *и для любых* $x \ge 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{-a-x} e^{\tau y}|d\theta_{z,s}(y)| \le Ce^{(\lambda_- -\varepsilon-\tau)(a+x)}\|g\|_\tau, \quad \tau \ge \lambda_- - \varepsilon,$$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{-a-x} e^{\tau y} d\theta_{z,s}(y)\right| \le Ce^{(\lambda_- -\varepsilon-\operatorname{Re}\tau)(a+x)}|g(\tau)|, \quad \operatorname{Re}\tau \ge \lambda_- - \varepsilon.$$

Замечания. 1. Главные части полученных асимптотических представлений и характер оценок остатков не изменятся, если брать $[b,\infty)$ вместо (b,∞) в определении оператора L_+ и $(-\infty,-a]$ вместо $(-\infty,-a)$ в определении L_-.

2. Простые вычисления показывают, что остаточный член в лемме 2 отсутствует, если $\mathbf{P}(X_1 > t) = ce^{-\alpha_1 t}$, $t > 0$. Точно так же при условии $\mathbf{P}(X_1 < t) = ce^{\alpha_2 t}$, $t < 0$, в лемме 3 имеет место $\theta_{z,s}(y) \equiv 0$.

4. Асимптотические представления производящих функций в однограничных задачах

Займемся теперь нахождением с помощью полученных лемм асимптотических представлений для функций $f_{a,b}(z,u,\lambda)$ в однограничных задачах.

Пусть $a = \infty$, $0 \le b < \infty$, $e(z,s,\lambda) \equiv 1$. Применяя (12) и лемму 2, при $|z| < 1$ получаем

$$(s-z)z^{-1}q_2(z,s,\lambda) = (L_+e)(z,s,\lambda) = \frac{R_+(s,\lambda)}{R_+(z,\lambda)}\left[\frac{R_+(z,\lambda)}{R_+(s,\lambda)}\right]^{(b,\infty)}$$
$$= V(z,s,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b} + \frac{(z-s)R_+(s,\lambda)}{sR_+(z,\lambda)}\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda y}\,d\varphi^{(1)}_{z,s}(y), \quad (14)$$

где при $x \ge 0$ равномерно по z и $s \in L_\delta$

$$\int\limits_{(b+x,\infty)} e^{\tau y}\big|d\varphi^{(1)}_{z,s}(y)\big| \le Ce^{-(\lambda_++\varepsilon-\tau)(b+x)}, \quad \tau \le \lambda_+ + \varepsilon. \quad (15)$$

Аналогичным образом с помощью (11) и леммы 3 при $b = \infty$, $|z| < 1$ имеем

$$(s-z)z^{-1}q_1(z,s,\lambda) = (L_-e)(z,s,\lambda) = \frac{R_-(s,\lambda)}{R_-(z,\lambda)}\left[\frac{R_-(z,\lambda)}{R_-(s,\lambda)}\right]^{(-\infty,-a)}$$
$$= U(z,s,\lambda)e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a} + \frac{(z-s)R_-(s,\lambda)}{sR_-(z,\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y}\,d\theta^{(1)}_{z,s}(y), \quad (16)$$

где равномерно по $s \in L_\delta$ при $x \ge 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{-a-x} e^{\tau y}\big|d\theta^{(1)}_{z,s}(y)\big| \le Ce^{(\lambda_--\varepsilon-\tau)(a+x)}, \quad \lambda_- - \varepsilon \le \tau. \quad (17)$$

Подставляя полученные представления (14) и (16) в (9) и переходя к переменной $v = u^{-1}$ в соответствии с (13), получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $a \ge 0$, $b \ge 0$ и выполнены условия* A1, A2. *Тогда существуют $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что при $|sv| < 1$, $s \in L_\delta$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ имеют место представления:*

1) *если $\beta > 0$ и, кроме того, $\varphi(\beta) > 1$ при $\mathbf{E}X_1 < 0$, то*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n\mathbf{E}\big(v^{T_n((b,\infty))}e^{\lambda S_n}\big) = \frac{1}{1-s\varphi(\lambda)}$$
$$\times\left\{1 - V(sv,s,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b} - \frac{(v-1)R_+(s,\lambda)}{R_+(sv,\lambda)}\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda y}d\varphi^{(1)}_{sv,s}(y)\right\}, \quad (18)$$

где $\int\limits_{(b,\infty)}\big|d\varphi^{(1)}_{sv,s}(y)\big| \le Ce^{-(\lambda_++\varepsilon)b}$ *равномерно по множеству $|sv| < 1$, $s \in L_\delta$,*

2) *если $\gamma > 0$ и $\varphi(\gamma) > 1$ при $\mathbf{E}X_1 > 0$, то*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n\mathbf{E}\big(v^{T_n((-\infty,-a))}e^{\lambda S_n}\big) = \frac{1}{1-s\varphi(\lambda)}$$
$$\times\left\{1 - U(sv,s,\lambda)e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a} - \frac{(v-1)R_-(s,\lambda)}{R_-(sv,\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y}d\theta^{(1)}_{sv,s}(y)\right\}, \quad (19)$$

где $\int\limits_{-\infty}^{-a}\big|d\theta^{(1)}_{sv,s}(y)\big| \le Ce^{(\lambda_--\varepsilon)a}$ *равномерно по множеству $|sv| < 1$, $s \in L_\delta$.*

Следствие 2. *Пусть $a \le 0$ и выполнено условие* $\mathbf{P}(X_1 < t) = ce^{\alpha t}$, $t < 0$. *Тогда*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(v^{T_n((-\infty,-a))} e^{\lambda S_n}) = \frac{1}{1 - s\varphi(\lambda)} \left(1 - \frac{\lambda_-(s) - \lambda_-(sv)}{\lambda - \lambda_-(sv)} e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a}\right).$$

Если $b \ge 0$ и выполнено условие $\mathbf{P}(X_1 > t) = ce^{-\alpha t}$, $t > 0$, *то*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(v^{T_n((b,\infty))} e^{\lambda S_n}) = \frac{1}{1 - s\varphi(\lambda)} \left(1 - \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(sv)}{\lambda - \lambda_+(sv)} e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}\right).$$

Это утверждение следует из замечания 2 разд. 3 и простого вида компонент факторизации (см. [13]):

$$R_-(s,\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_-(s)}{\lambda + \alpha}, \quad \text{если } \mathbf{P}(X_1 < t) = ce^{\alpha t},\ t < 0,$$

$$R_+(s,\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_+(s)}{\lambda - \alpha}, \quad \text{если } \mathbf{P}(X_1 > t) = ce^{-\alpha t},\ t > 0.$$

Пусть для краткости $T_n = T_n((b,\infty))$. Из (18) следует

$$\frac{1}{1-s} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E} v^{T_n} = \sum_{n=1}^{\infty} s^n (1 - \mathbf{E} v^{T_n})$$
$$= \frac{V(sv,s,0)e^{-\lambda_+(s)b}}{(1-s)} + \frac{(v-1)R_+(s,0)}{(1-s)R_+(sv,0)} \int\limits_{(b,\infty)} d\varphi^{(1)}_{sv,s}(y). \quad (20)$$

Далее,

$$\mathbf{E} v^{T_n} = 1 + (v-1)\mathbf{E} T_n + \frac{(v-1)^2}{2} \mathbf{E} T_n (T_n - 1) + \dots .$$

Обозначим

$$v(s) = -\frac{R_+(s,0)}{\lambda_+(s) R'_+(s,\lambda_+(s))}, \quad Z(s,v) = \frac{R_+(sv,\lambda_+(s))}{R_+(sv,0)}.$$

Здесь $V(sv,s,0) = v(s)Z(s,v)$. Функция $Z(s,v)$ аналитична по переменной v в окрестности единицы при $s \in L_\delta$, $Z(s,1) = 0$, поэтому

$$\frac{R_+(sv,\lambda_+(s))}{R_+(sv,0)} = (v-1)A(s) + \dots , \quad A(s) = \left.\frac{\partial Z(s,v)}{\partial v}\right|_{v=1}.$$

Таким образом, из (20) при $v = 1$ выводим следующее представление.

Следствие 3. *В условиях теоремы* 3 *найдется число* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E} T_n((b,\infty)) = \frac{v(s)e^{-\lambda_+(s)b}A(s)}{s-1} + \frac{1}{s-1} \int\limits_{(b,\infty)} d\varphi^{(1)}_{s,s}(y), \quad s \in L_\delta.$$

Аналогичное утверждение легко формулируется и для $\mathbf{E} T_n((-\infty,-a))$.

5. Асимптотика производящих функций в двуграничной задаче

Здесь мы рассматриваем ситуацию, когда $D=[-a,b]$, $a\ge 0$, $b\ge 0$. Предполагается, что выполнены одновременно условия лемм 2 и 3, что обеспечивает существование двух нулей $\lambda_\pm(s)$ при $s\in L_\delta$. Изложение построено следующим образом. Сначала находятся асимптотические представления для оставшихся слагаемых в правых частях (10) (асимптотика первых слагаемых $(L_\pm h)(z,s,\lambda)$ уже найдена выше). Подстановка этих представлений в (10) и последующий достаточно сложный анализ полученных выражений приводят к асимптотическим представлениям для функции $q_2(z,s,\lambda)$ (теорема 5) и функции $q_1(z,s,\lambda)$ (теорема 6). Для нахождения асимптотического представления функции $f_{a,b}(z,u,\lambda)$ остается подставить полученные выражения для $q_i(z,s,\lambda)$ в (9). Получается тем самым достаточно громоздкое выражение, которое в целях экономии места не выписывается, а приводится только более компактное выражение для $f_{a,b}(z,u,0)$, что и завершает доказательство теоремы 1 в самом конце этой работы.

Итак, в соответствии с леммой 3 находим

$$(L_-q_2)(z,s,\lambda)=U(z,s,\lambda)e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a}q_2(z,s,\lambda_-(s)) + \frac{(z-s)R_-(s,\lambda)}{sR_-(z,\lambda)}\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y}\,d\theta^{(2)}_{z,s}(y), \tag{21}$$

где равномерно по $|z|<1$, $s\in L_\delta$ при $x\ge 0$

$$\int_{-\infty}^{-a-x} e^{\tau y}\big|d\theta^{(2)}_{z,s}(y)\big|\le Ce^{(\lambda_--\varepsilon-\tau)(a+x)}\|q_2(z,s,.)\|_\tau,\quad \lambda_--\varepsilon\le\tau,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{-a-x} e^{\tau y}\,d\theta^{(2)}_{z,s}(y)\right|\le Ce^{(\lambda_--\varepsilon-\operatorname{Re}\tau)(a+x)}|q_2(z,s,\tau)|,\quad \lambda_--\varepsilon\le\operatorname{Re}\tau. \tag{22}$$

Применив лемму 2 и (16), получаем (напомним, что $\mu(s)=e^{\lambda_-(s)-\lambda_+(s)}$)

$$(L_+L_-h)(z,s,\lambda)=V(z,s,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}\left\{\frac{zU(z,s,\lambda_+(s))\mu^a(s)}{(s-z)} - \frac{zR_-(s,\lambda_+(s))}{sR_-(z,\lambda_+(s))}\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y}\,d\theta^{(1)}_{z,s}(y)\right\}+\frac{(z-s)R_+(s,\lambda)}{sR_+(z,\lambda)}\int_{(b,\infty)} e^{\lambda y}\,d\varphi^{(2)}_{z,s}(y), \tag{23}$$

где при $x\ge 0$ равномерно по $s\in L_\delta$ и $|z|<1$

$$\int_{(b+x,\infty)} e^{\tau y}\big|d\varphi^{(2)}_{z,s}(y)\big|\le Ce^{-(\lambda_++\varepsilon-\tau)(b+x)}\|(L_-h)(z,s,.)\|_\tau,\quad \tau\le\lambda_++\varepsilon,$$

$$\left|\int_{(b+x,\infty)} e^{\tau y}\,d\varphi^{(2)}_{z,s}(y)\right|\le Ce^{-(\lambda_++\varepsilon-\operatorname{Re}\tau)(b+x)}|(L_-h)(z,s,\tau)|,\quad \operatorname{Re}\tau\le\lambda_++\varepsilon.$$

Используя лемму 2 и (21), находим

$$
\begin{aligned}
&(L_+L_-q_2)(z,s,\lambda) = V(z,s,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b} \\
&\times\left\{U(z,s,\lambda_+(s))q_2(z,s,\lambda_-(s))\mu^a(s) + \frac{(z-s)R_-(s,\lambda_+(s))}{sR_-(z,\lambda_+(s))}\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y}\,d\theta^{(2)}_{z,s}(y)\right\} \\
&\qquad\qquad + \frac{(z-s)R_+(s,\lambda)}{sR_+(z,\lambda)}\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda y}\,d\varphi^{(3)}_{z,s}(y); \qquad (24)
\end{aligned}
$$

здесь равномерно по $|z|<1$, $s\in L_\delta$ при $x\geq 0$

$$\int\limits_{(b+x,\infty)} e^{\tau y}\big|d\varphi^{(3)}_{z,s}(y)\big| \leq Ce^{-(\lambda_++\varepsilon-\tau)(b+x)}\|(L_-q_2)(z,s,.)\|_\tau, \quad \tau\leq\lambda_++\varepsilon,$$

$$\left|\int\limits_{(b+x,\infty)} e^{\tau y}\,d\varphi^{(3)}_{z,s}(y)\right| \leq Ce^{-(\lambda_++\varepsilon-\operatorname{Re}\tau)(b+x)}|(L_-q_2)(z,s,\tau)|, \quad \operatorname{Re}\tau\leq\lambda_++\varepsilon.$$

Подставляя выражения (14), (23) и (24) в (10) и используя вновь обозначения (2), получим

$$
\begin{aligned}
&q_2(z,s,\lambda) = \frac{zV(z,s,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}}{(s-z)} \qquad (25) \\
&\times\left\{1 - H_1(z,s)\mu^a(s)\left(1-\frac{s-z}{z}q_2(z,s,\lambda_-(s))\right) + \frac{s-z}{z}\Delta_1(z,s)\right\} + \Delta_2(z,s,\lambda),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Delta_1(z,s) &= \frac{R_-(s,\lambda_+(s))}{R_-(z,\lambda_+(s))}\left(\frac{z}{s}\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y}\,d\theta^{(1)}_{z,s}(y) + \frac{z-s}{s}\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y}d\theta^{(2)}_{z,s}(y)\right), \qquad (26) \\
\Delta_2(z,s,\lambda) &= \frac{R_+(s,\lambda)}{R_+(z,\lambda)}\left(\frac{z-s}{s}\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda y}\,d\big(\varphi^{(3)}_{z,s}(y)-\varphi^{(2)}_{z,s}(y)\big) - \frac{z}{s}\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda y}\,d\varphi^{(1)}_{z,s}(y)\right).
\end{aligned}
$$

Для нахождения $q_2(z,s,\lambda_-(s))$ положим $\lambda=\lambda_-(s)$ в (25). Используя обозначения (2) для функций H, H_1, H_2, получим

$$
\begin{aligned}
&q_2(z,s,\lambda_-(s))(1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)) \\
&= z(s-z)^{-1}H_2(z,s)\mu^b(s)\left(1-H_1(z,s)\mu^a(s)+\frac{s-z}{z}\Delta_1(z,s)\right) + \Delta_2(z,s,\lambda_-(s)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&1-(s-z)z^{-1}q_2(z,s,\lambda_-(s)) \\
&\quad = 1 - \frac{H_2(z,s)\mu^b(s)\big(1-H_1(z,s)\mu^a(s)+\frac{s-z}{z}\Delta_1(z,s)\big)+\frac{s-z}{z}\Delta_2(z,s,\lambda_-(s))}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)} \\
&\qquad\qquad = \frac{1-H_2(z,s)\mu^b(s)\big(1+\frac{s-z}{z}\Delta_1(z,s)\big)+\frac{s-z}{z}\Delta_2(z,s,\lambda_-(s))}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}
\end{aligned}
$$

и, наконец,

$$q_2(z,s,\lambda) = \frac{zV(z,s,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}}{(s-z)}$$

$$\times \left\{1 - H_1(z,s)\mu^a(s)\frac{1 - H_2(z,s)\mu^b(s)\big(1+\frac{s-z}{z}\Delta_1(z,s)\big)+\frac{s-z}{z}\Delta_2(z,s,\lambda_-(s))}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}\right.$$

$$\left. + \frac{s-z}{z}\Delta_1(z,s)\right\} + \Delta_2(z,s,\lambda) = \frac{zV(z,s,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}}{(s-z)}\left\{\frac{1-H_1(z,s)\mu^a(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}\right.$$

$$+ \frac{(s-z)(H(z,s)\mu^{b+a}(s)\Delta_1(z,s) - H_1(z,s)\mu^a(s)\Delta_2(z,s,\lambda_-(s)))}{z(1-H(z,s)\mu^{b+a}(s))}$$

$$\left. + \frac{s-z}{z}\Delta_1(z,s)\right\} + \Delta_2(z,s,\lambda)$$

$$= \frac{zV(z,s,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}}{(s-z)}\left\{\frac{1-H_1(z,s)\mu^a(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)} + \Delta_3(z,s)\right\} + \Delta_2(z,s,\lambda),$$

где

$$\Delta_3(z,s) = \frac{s-z}{z}\frac{\Delta_1(z,s) - \Delta_2(z,s,\lambda_-(s))H_1(z,s)\mu^a(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}.$$

Вспоминая, что в условиях (4) остаточные члены в утверждениях лемм 2 и 3 отсутствуют, приходим к выводу, что в этом частном случае обращаются в нуль величины $\Delta_1(z,s)$ и $\Delta_2(z,s,\lambda)$. Используя (5)–(7), получаем следующее выражение:

$$q_2(z,s,\lambda) = \frac{z(\lambda_+(s)-\alpha_1)(\lambda_+(s)+\alpha_2)}{s(\lambda-\lambda_+(z))(\lambda_+(s)-\lambda_-(z))}\frac{1-H_1(z,s)\mu^a(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}.$$

Правую часть можно упростить в силу того, что

$$\frac{(\lambda_+(s)-\lambda_+(z))(\lambda_+(s)-\lambda_-(z))}{(\lambda_+(s)-\alpha_1)(\lambda_+(s)+\alpha_2)} = 1 - z\varphi(\lambda_+(s)) = 1 - \frac{z}{s}.$$

Аналогичным путем вычисляется и $q_1(z,s,\lambda)$ для этой ситуации. В итоге получаем следующее утверждение (см. также [13]).

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (4). *Тогда при* $a \geq 0$, $b \geq 0$

$$q_1(z,s,\lambda) = \frac{z(\lambda_-(s)-\lambda_-(z))}{(s-z)(\lambda-\lambda_-(z))}\frac{1-H_2(z,s)\mu^b(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a},$$

$$q_2(z,s,\lambda) = \frac{z(\lambda_+(s)-\lambda_+(z))}{(s-z)(\lambda-\lambda_+(z))}\frac{1-H_1(z,s)\mu^a(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}.$$

Выражения для $q_i(z,s,\lambda)$ легко обращаются по λ.

Следствие 4. *В условиях теоремы* 4 *для любого* $x \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} u^k \mathbf{P}(T_n = k, S_n \geq b + x)$$

$$= \frac{\lambda_+(s)-\lambda_+(z)}{(1-u)\lambda_+(z)}\frac{1-H_1(z,s)\mu^a(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}e^{-\lambda_+(s)b-\lambda_+(z)x}, \quad s = zu.$$

Далее можно воспользоваться тождеством (9) и использовать в вычислениях тот факт, что $\lambda_+(s)\lambda_-(s) = \alpha_1\alpha_2(s-1)$ (это следует из теоремы Виета). В итоге получаем

Следствие 5. *В условиях теоремы* 4

$$1+f_{a,b}(z,u,\lambda)=\frac{1}{1-s\varphi(\lambda)}\left\{1-\frac{\lambda_+(s)-\lambda_+(z)}{\lambda-\lambda_+(z)}\frac{1-H_1(z,s)\mu^a(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}\right\}$$
$$-\frac{1}{1-s\varphi(\lambda)}\left\{\frac{\lambda_-(s)-\lambda_-(z)}{\lambda-\lambda_-(z)}\frac{1-H_2(z,s)\mu^b(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a}\right\},\quad s=zu.$$

Теперь займемся оцениванием остаточных членов Δ_i в общем случае. Это будет делаться в предположении, что $\mathbf{E}\,X_1=0$. В этом случае $\lambda_\pm=0$ и в окрестности единицы, разрезанной по лучу $z\ge 1$, имеют место разложения (корень квадратный везде понимается в смысле главного значения)

$$\lambda_\pm(z)=\pm\psi_1(1-z)^{1/2}+\psi_2(1-z)+\cdots$$

(см. [7]), где $\psi_1=\sqrt{2/\sigma^2}$, $\psi_2=\mu_3/(3\sigma^4)$, $\mu_k=E\,X_1^k$, $\sigma^2=\mu_2-\mu_1^2$.

Далее везде предполагаем, что $z\in L_\delta$ наряду с $s\in L_\delta$ при малом $\delta>0$ и, кроме того, $|z|<|s|$.

Оценим сначала $\Delta_1(z,s)$. Заметим, что

$$\left|\frac{R_-(s,\lambda_+(s))}{R_-(z,\lambda_+(s))}\right|\le\left|\frac{R_-(s,\lambda_+(s))}{\lambda_+(s)-\lambda_-(s)}\right|\left|\frac{\lambda_+(s)-\lambda_-(z)}{R_-(z,\lambda_+(s))}\right|\left|\frac{\lambda_+(s)-\lambda_-(s)}{\lambda_+(s)-\lambda_-(z)}\right|$$
$$\le\frac{C|1-s|^{1/2}}{|(1-s)^{1/2}+(1-z)^{1/2}|}\le C_1.$$

Поэтому

$$|\Delta_1(z,s)|\le C_1\left|\int\limits_{-\infty}^{-a}e^{\lambda_+(s)y}d\theta^{(1)}_{z,s}(y)\right|+C_2\left|\frac{z-s}{s}\int\limits_{-\infty}^{-a}e^{\lambda_+(s)y}\,d\theta^{(2)}_{z,s}(y)\right|.$$

При малых δ имеем $0<\operatorname{Re}\lambda_+(s)<\varepsilon/2$, поэтому в силу (17) и (22) получаем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{-a}e^{\lambda_+(s)y}\,d\theta^{(1)}_{z,s}(y)\right|\le Ce^{-(\varepsilon-\operatorname{Re}\lambda_+(s))a}\le Ce^{-\varepsilon a/2},\tag{27}$$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{-a}e^{\lambda_+(s)y}d\theta^{(2)}_{z,s}(y)\right|\le Ce^{-\varepsilon a/2}|q_2(z,s,\lambda_+(s))|.\tag{28}$$

Функция $q_2(z,s,\lambda)$ определена при $\operatorname{Re}\lambda\le 0$ и аналитична в области $\operatorname{Re}\lambda<0$. Выразив функцию Q_2 из (8), получим

$$q_2(z,s,\lambda)=Q_2(z,u,\lambda)=\frac{1-(1+Q_0(z,u,\lambda))(1-zu\varphi(\lambda))}{u(1-z\varphi(\lambda))}-Q_1(z,u,\lambda),\tag{29}$$

откуда видно, что $q_2(z,s,\lambda)$ аналитически продолжается в область $\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\lambda_+(z)$. При $|z|<|s|$ будет выполняться $\operatorname{Re}\lambda_+(s)<\operatorname{Re}\lambda_+(z)$, что оправдывает использование величины $q_2(z,s,\lambda_+(s))$ в правой части (28).

Полагая $\lambda=\lambda_\pm(s)$ в (29), для $|z|<|s|$ получим

$$q_2(z,s,\lambda_\pm(s))+q_1(z,s,\lambda_\pm(s))=\frac{z}{s-z}.\tag{30}$$

Это соотношение представляет самостоятельный интерес, по своей форме оно напоминает одно из известных тождеств Вальда.

Пусть далее $\tilde{q}_2(z,s,\lambda)$ совпадает с $q_2(z,s,\lambda)$ при $a=\infty$. Тогда, очевидно,

$$\tilde{q}_2(z,s,\lambda_\pm(s)) = \frac{z}{s-z}$$

и для вещественных $z \in (1-\delta,1)$ и $s \in (z,1)$

$$\left|\frac{s-z}{z} q_2(z,s,\lambda_\pm(s)\right| \le \left|\frac{s-z}{z}\tilde{q}_2(z,s,\lambda_\pm(s))\right| = 1.$$

Следовательно, при $z \in L_\delta$, $s \in L_\delta$, $|z|<|s|$, где δ достаточно мало, будет иметь место оценка

$$|(s-z)q_2(z,s,\lambda_\pm(s))| \le 2. \tag{31}$$

Этот же результат можно получить, пользуясь найденными выше представлениями для $(L_+h)(z,s,\lambda_+(s))$, $(L_+L_-h)(z,s,\lambda_+(s))$, $(L_+L_-q_2)(z,s,\lambda_+(s))$.

Вместе с (27) и (28) все это приводит для таких z и s к оценке

$$|\Delta_1(z,s)| \le Ce^{-\varepsilon a/2}.$$

Оценим далее величину

$$\Delta_2(z,s,\lambda_-(s)) = \frac{R_+(s,\lambda_-(s))}{R_+(z,\lambda_-(s))}\biggl(\frac{z-s}{s}\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda_-(s)y}\, d\bigl(\varphi^{(3)}_{z,s}(y) - \varphi^{(2)}_{z,s}(y)\bigr) \\ - \frac{z}{s}\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda_-(s)y}\, d\varphi^{(1)}_{z,s}(y)\biggr).$$

Как и выше, устанавливаем, что

$$\left|\frac{R_+(s,\lambda_-(s))}{R_+(z,\lambda_-(s))}\right| \le C,$$

и в силу (15)

$$\biggl|\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda_-(s)y}\, d\varphi^{(1)}_{z,s}(y)\biggr| \le Ce^{-(\varepsilon - \operatorname{Re}\lambda_-(s))b} \le Ce^{-\varepsilon b}.$$

Кроме того,

$$\biggl|\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda_-(s)y}\, d\bigl(\varphi^{(3)}_{z,s}(y) - \varphi^{(2)}_{z,s}(y)\bigr)\biggr| \le \biggl|\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda_-(s)y}\, d\varphi^{(2)}_{z,s}(y)\biggr| \\ + \biggl|\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda_-(s)y}\, d\varphi^{(3)}_{z,s}(y)\biggr| \le e^{-(\varepsilon - \operatorname{Re}\lambda_-(s)b}(|(L_-h)(z,s,\lambda_-(s))| \\ + |(L_-q_2)(z,s,\lambda_-(s))|) \le e^{-\varepsilon b}(|(L_-h)(z,s,\lambda_-(s))| + |(L_-q_2)(z,s,\lambda_-(s))|).$$

Воспользуемся соотношениями

$$(L_-h)(z,s,\lambda_-(s)) = \frac{z}{s-z}, \quad (L_-q_2)(z,s,\lambda_-(s)) = q_2(z,s,\lambda_-(s)),$$

которые сразу же следуют из (16) и (21) (первое из них также следует из (29) при $b=\infty$, второе — из сопоставления (10) и (30)). Учитывая (31), получаем в итоге

$$|\Delta_2(z,s,\lambda_-(s))| \le Ce^{-\varepsilon b}(1 + |(s-z)q_2(z,s,\lambda_-(s))|) \le C_1 e^{-\varepsilon b}.$$

Наконец, покажем, что
$$\frac{1}{|1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)|}\le C<\infty \tag{32}$$
при $s\in L_\delta$, $z\in L_\delta$, $|z|<|s|$. Напомним (см. (2)), что
$$H(z,s)=a_-(s)a_+(s)\frac{R_-(z,\lambda_-(s))}{R_-(z,\lambda_+(s))}\,\frac{R_+(z,\lambda_+(s))}{R_+(z,\lambda_-(s))},$$
где
$$a_-(s)=\frac{R_-(s,\lambda_+(s))}{(\lambda_+(s)-\lambda_-(s))R'_-(s,\lambda_-(s))},\quad a_+(s)=\frac{R_+(s,\lambda_-(s))}{(\lambda_-(s)-\lambda_+(s))R'_+(s,\lambda_+(s))}.$$
Очевидно, $|\mu(s)|\le 1$, $a_-(s)a_+(s)=1+O(\sqrt{1-s})$, $s\to 1$. Далее, величина $\frac{R_-(z,\lambda_-(s))}{R_-(z,\lambda_+(s))}\frac{R_+(z,\lambda_+(s))}{R_+(z,\lambda_-(s))}$ обращается в нуль при $s=z$, следовательно, она не превосходит по модулю $1/2$ при достаточно близких s и z. Отсюда следует (32).

Остаточный член $\Delta_2(z,s,\lambda)$ имеет вид
$$\Delta_2(z,s,\lambda)=\frac{R_+(s,\lambda)}{R_+(z,\lambda)}\int\limits_b^\infty e^{\lambda y}\,d\varphi_{z,s}(y).$$
Покажем, что $|\Delta_2(z,s,0)|\le Ce^{-\varepsilon b}$. Имеем
$$\left|\frac{R_+(s,0)}{R_+(z,0)}\right|=\left|\frac{-\lambda_+(s)R'_+(s,\lambda_+(s))+\dots}{-\lambda_+(z)R'_+(z,\lambda_+(z)0)+\dots}\right|=\left|\frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{1-z}}\left(\frac{R'_+(s,\lambda_+(s))}{R'_+(z,\lambda_+(z))}+\dots\right)\right|\le C.$$
В соответствии с (26)
$$\left|\int\limits_b^\infty d\varphi_{z,s}(y)\right|\le\left|\frac{z}{s}\int\limits_b^\infty d\varphi^{(1)}_{z,s}(y)\right|+\left|\frac{z-s}{s}\int\limits_b^\infty\big(d\varphi^{(2)}_{z,s}(y)+d\varphi^{(3)}_{z,s}(y)\big)\right|$$
$$\le C_1e^{-\varepsilon b}+C_2|s-z|e^{-\varepsilon b}(|(L_-h)(z,s,0)|+|(L_-q_2)(z,s,0)|).$$
В силу (16) и (21) имеем
$$|(s-z)(L_-h)(z,s,0)|$$
$$\le\left|\frac{a_-(s)\,e^{\lambda_-(s)a}R_-(z,\lambda_-(s))}{R_-(z,0)}\right|+\left|\frac{(z-s)R_-(s,0)}{sR_-(z,0)}\int\limits_{-\infty}^{-a}d\theta^{(1)}_{z,s}(y)\right|\le C,$$
поскольку
$$\left|\frac{R_-(z,\lambda_-(s))}{R_-(z,0)}\right|=\left|\frac{(\lambda_-(s)-\lambda_-(z))R'_-(z,\lambda_-(z))+\dots}{-\lambda_-(z)R'_-(z,\lambda_-(z))+\dots}\right|$$
$$=\left|\frac{\big(\sqrt{1-s}-\sqrt{1-z}\big)R'_-(z,\lambda_-(z))+\dots}{\sqrt{1-z}R'_-(z,\lambda_-(z))+\dots}\right|\le C,$$
а также
$$|(s-z)(L_-q_2)(z,s,0)|\le\left|\frac{a_-(s)e^{\lambda_-(s)a}R_-(z,\lambda_-(s))(s-z)q_2(z,\lambda_-(s))}{R_-(z,0)}\right|$$
$$+\left|\frac{(s-z)^2R_-(s,0)}{sR_-(z,0)}\int\limits_{-\infty}^{-a}d\theta^{(2)}_{z,s}(y)\right|\le C_1+C_2e^{-\varepsilon a}|(s-z)^2q_2(z,s,0)|.$$

Пусть, как и выше, $\tilde q_2(z,s,0)$ совпадает с $q_2(z,s,0)$ при $a=\infty$. Тогда для вещественных $z\in(1-\delta,1)$ и $s\in(z,1)$

$$\left|\frac{s-z}{z}q_2(z,s,0)\right|\le\left|\frac{s-z}{z}\ \tilde q_2(z,s,0)\right|\le\left|\frac{s-z}{z}\ \tilde q_2(z,s,\lambda_+(s))\right|\le\frac{1}{|z|}.$$

Следовательно, при $z\in L_\delta$, $s\in L_\delta$, $|z|<|s|$, где δ достаточно мало, будет иметь место оценка

$$|(s-z)q_2(z,s,0)|\le 2.$$

Тем самым доказано следующее утверждение. Перед его формулировкой напомним, что величины $V(z,s,\lambda)$, $U(z,s,\lambda)$, $H(z,s)$, $H_i(z,s)$, $\mu(s)$ введены ранее перед формулировкой теоремы 1, функции $q_i(z,s,\lambda)$ — перед формулировкой теоремы 2.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{E}X_1=0$, $a\ge0$, $b\ge0$ *и выполнены условия* A1, A2, *в которых* $\gamma>0$ *и* $\beta>0$. *Тогда существуют* $\delta>0$ *и* $\varepsilon>0$ *такие, что при* $z\in L_\delta$, $s\in L_\delta$ *и* $\operatorname{Re}\lambda\le0$ *имеет место представление*

$$q_2(z,s,\lambda)=\frac{zV(z,s,\lambda)\,e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}}{(s-z)}\left(\frac{1-H_1(z,s)\mu^a(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}+(s-z)\varepsilon_1(z,s)\right)+\Delta(z,s,\lambda),$$

в котором $|\varepsilon_1(z,s)|\le C_1e^{-\varepsilon a}+C_2e^{-\varepsilon b}$ *при* $|z|<|s|$ *и функция* $\Delta(z,s,\lambda)$ *имеет вид*

$$\Delta(z,s,\lambda)=\frac{R_+(s,\lambda)}{R_+(z,\lambda)}\int\limits_{(b,\infty)}e^{\lambda y}\,d\varphi_{z,s}(y),\quad |\Delta(z,s,0)|\le Ce^{-\varepsilon b}.$$

Симметричными рассуждениями может быть получена следующая

Теорема 6. *Пусть* $\mathbf{E}X_1=0$, $a\ge0$, $b\ge0$ *и выполнены условия* A1, A2, *в которых* $\gamma>0$ *и* $\beta>0$. *Тогда существуют* $\delta>0$ *и* $\varepsilon>0$ *такие, что при* $z\in L_\delta$, $s\in L_\delta$ *и* $\operatorname{Re}\lambda\ge0$ *имеет место представление*

$$q_1(z,s,\lambda)=\frac{zU(z,s,\lambda)\,e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a}}{(s-z)}\left(\frac{1-H_2(z,s)\mu^b(s)}{1-H(z,s)\mu^{b+a}(s)}+(s-z)\varepsilon_2(z,s)\right)+\widetilde\Delta(z,s,\lambda),$$

в котором $|\varepsilon_2(z,s)|\le C_1e^{-\varepsilon a}+C_2e^{-\varepsilon b}$ *при* $|z|<|s|$ *и функция* $\widetilde\Delta(z,s,\lambda)$ *имеет вид*

$$\widetilde\Delta(z,s,\lambda)=\frac{R_-(s,\lambda)}{R_-(z,\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{-a}e^{\lambda y}\,d\theta_{z,s}(y),\quad |\widetilde\Delta(z,s,0)|\le Ce^{-\varepsilon a}.$$

Напомним, что ранее мы установили соотношение (см. (9))

$$1+f_{a,b}(z,u,\lambda)=\frac{1}{1-s\varphi(\lambda)}(1+(1-u)(q_1(z,s,\lambda)+q_2(z,s,\lambda))).$$

Подставляя в правую часть этого тождества полученные в теоремах 5 и 6 асимптотические представления функций q_1 и q_2, приходим к соответствующему представлению и для $f_{a,b}(z,u,\lambda)$. Следствие этого утверждения, которое получается при $\lambda=0$, приведено в начале статьи (теорема 1).

Автор благодарен рецензенту, конструктивные замечания которого способствовали улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chung K. L., Hunt G. A.* On the zeros of $\sum\limits_{1}^{n} \pm 1$ // Ann. Math. 1949. V. 50, N 2. P. 385–400.
2. *Takacs L.* On a generalization of the arc-sine law // Ann. Appl. Probab. 1996. V. 6, N 3. P. 1035–1041.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения.. М.: Мир, 1984. Т. 2.
4. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
5. *Скороход А. В., Слободенюк Н. П.* Предельные теоремы для случайных блужданий. Киев: Наук. Думка, 1970.
6. *Бородин А. Н., Ибрагимов И. А.* Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1994. Т. 195. С. 3–286.
7. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.
8. *Лотов В. И.* Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 5. С. 1095–1108.
9. *Лотов В. И.* Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. 2 // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, № 4. С. 873–879.
10. *Семенов А. Т.* Асимптотические разложения для распределения времени пребывания случайного блуждания в отрезке // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 4. С. 918–930.
11. *Лугавов В. С., Рогозин Б. А.* Факторизационные представления для времен пребывания полумарковских блужданий // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 389–406.
12. *Лугавов В. С.* О компонентах факторизационного представления для времени пребывания полунепрерывных случаных блужданий в полосе // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 800–809.
13. *Лотов В. И.* Факторизационные тождества для времени пребывания случайного блуждания в полосе // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 146–155.
14. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 1 июля 2009 г.

Лотов Владимир Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
lotov@math.nsc.ru