УДК 519.21

В. И. Лотов

ОБ АСИМПТОТИКЕ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ*

В условиях крамеровского типа на распределение скачков случайного блуждания получена теорема об асимптотике обобщенной функции восстановления.

Ключевые слова: случайное блуждание, обобщенная функция восстановления, производящие функции, асимптотический анализ.

Пусть $\{X_n\}$, $n \geq 1$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$. Для $|s| < 1$ и произвольного борелевского множества $D \subset \mathbb{R}$ введем функцию

$$H(s, D) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \, \mathbf{P}(S_n \in D), \tag{1}$$

которую будем называть обобщенной мерой восстановления. В литературе этот термин неоднократно применялся по отношению к функциям вида $\sum_{n=1}^{\infty} g(n) \, \mathbf{P}(S_n \in D)$ при тех или иных ограничениях на $g(n)$ (см. [1]). Ясно, что функция (1) возникает, в частности, при суммировании случайного числа слагаемых. Если случайная величина τ не зависит от последовательности $\{X_n\}$ и $\mathbf{P}(\tau = k) = (1-s)s^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, то очевидно:

$$H(s, D) = \frac{s}{1-s} \mathbf{P}(S_\tau \in D).$$

В [2] исследовано асимптотическое поведение выражений вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \, \mathbf{P}(b \leq S_n \leq b + x)$$

при $b \to \infty$ при дополнительном предположении $\mathbf{P}(X_1 \geq 0) = 1$ (рассмотрена асимптотика как при наличии конечного числа моментов у X_1, так и при существовании экспоненциального момента).

Целью данной работы является нахождение асимптотики функции

$$h(s, b) = H(s, (b, \infty))$$

при $b \to \infty$ с равномерной по s оценкой остаточного члена без каких-либо ограничений на множество значений случайной величины X_1, $s \in L_\delta = \{s : |s| < 1, |s-1| < \delta\}$ при некотором $\delta > 0$.

Положим $\varphi(\lambda) = \mathbf{E} e^{\lambda X_1}$. На протяжении всей работы мы будем предполагать выполненными следующие условия крамеровского типа.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 09-01-12131.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 64–69

A1. Распределение X_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту.

A2. $\mathbf{E}|X_1| < \infty$ и $\varphi(\beta) < \infty$ при некотором $\beta > 0$. Дополнительно предполагаем, что $\varphi(\beta) > 1$, если $\mathbf{E}X_1 < 0$.

Из условия A2 следует, что при некотором $\delta_1 > 0$ уравнение $s\varphi(\lambda) = 1$ имеет ровно одно положительное решение $\lambda(s)$, если $s \in [1 - \delta_1, 1)$. Если $\mathbf{E}X_1 \geq 0$, то $\lambda(1) = 0$. При $\mathbf{E}X_1 < 0$ обозначим

$$\varphi_0 = \min_{0 \leq \lambda \leq \beta} \varphi(\lambda), \quad s_0 = \varphi_0^{-1}.$$

Тогда при $1 \leq s \leq s_0$ уравнение $s\varphi(\lambda) = 1$ имеет уже два решения $\lambda_1(s)$ и $\lambda(s)$, $\lambda_1(s) \leq \lambda(s)$, $\lambda_1(1) = 0$, $\lambda(1) > 0$, $\lambda_1(s_0) = \lambda(s_0)$.

Положим

$$a(s) = -\frac{s\lambda'(s)}{\lambda(s)} = \frac{1}{s\varphi'(\lambda(s))\lambda(s)}$$

(последнее равенство в этом соотношении получается дифференцированием по s тождества $s\varphi(\lambda(s)) = 1$). Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 1. *Пусть* $b \geq 0$ *и выполнены условия* A1, A2. *Тогда существуют* $\delta > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что при* $s \in L_\delta$ *имеет место представление*

$$h(s,b) = a(s)\, e^{-\lambda(s)b} + \int\limits_{(b,\infty)} d\varphi_s(y),$$

где равномерно по $s \in L_\delta$

$$\int\limits_{(b,\infty)} |d\varphi_s(y)| \leq Ce^{-(\lambda(1)+\varepsilon)b}.$$

Как известно, исследование асимптотики обычной функции восстановления может производиться различными методами. Многие из них применимы и для обощенных функций восстановления. В данной работе будет показано, что утверждение теоремы 1 является непосредственным следствием недавних результатов [3] о времени пребывания случайного блуждания на полуоси.

Введем дополнительно случайную величину

$$T_n = T_n(D) = \sum_{k=1}^{n} I_{\{S_k \in D\}},$$

где $I_D(\omega) = 1$, если $\omega \in D$, и $I_D(\omega) = 0$ в противном случае. Таким образом, T_n есть время пребывания случайного блуждания во множестве D на интервале времени $[1, \ldots, n]$, т. е. число точек k, $1 \leq k \leq n$, таких, что $S_k \in D$.

В [3] получено асимптотическое представление для тройного преобразования над распределением $T_n((b,\infty))$ при $b \to \infty$ и $s \in L_\delta$, которое будет далее использоваться для получения асимптотики функции $h(s,b)$. По этой причине мы приведем формулировку этого результата. Для этого понадобится ряд обозначений.

Мы будем использовать факторизацию (см., например, [4])

$$1 - s\varphi(\lambda) = R_+(s,\lambda)R_-(s,\lambda)R_0(s), \quad |s| < 1, \quad Re\lambda = 0,$$

в которой

$$R_0(s) = \exp\Big\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\mathbf{P}(S_n = 0)\Big\},$$
$$R_-(s,\lambda) = \exp\Big\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\mathbf{E}\,(\exp\{\lambda S_n\}; S_n < 0)\Big\},$$
$$R_+(s,\lambda) = \exp\Big\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\mathbf{E}\,(\exp\{\lambda S_n\}; S_n > 0)\Big\}.$$

Известны и другие представления для компонент факторизации. Пусть

$$\eta_- = \inf\{n \ge 1: \ S_n < 0\}, \quad \eta_+ = \inf\{n \ge 1: \ S_n > 0\}, \quad \chi_\pm = S_{\eta_\pm},$$

тогда

$$R_\pm(s,\lambda) = 1 - \mathbf{E}\,(s^{\eta_\pm}\exp\{\lambda\chi_\pm\}; \eta_\pm < \infty).$$

Обозначим

$$V(z,s,\lambda) = \frac{R_+(s,\lambda)R_+(z,\lambda(s))}{(\lambda-\lambda(s))R'_+(s,\lambda(s))R_+(z,\lambda)},$$

здесь производная берется по второму аргументу. Буквами C, C_1, $C_2, \ldots$ ниже обозначаются константы.

Следующее утверждение получено в [3] с помощью весьма сложного метода, состоящего из двух этапов. На первом этапе найдено представление упомянутого выше тройного преобразования с помощью специального вида проекционного оператора над компонентой факторизации $R_+(s,\lambda)$, а затем это представление было подвергнуто асимптотическому анализу при $b \to \infty$, что привело к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть $b \ge 0$ и выполнены условия* A1, A2. *Тогда существуют $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что при $|sv| < 1$, $s \in L_\delta$, $Re\lambda = 0$ имеет место представление*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n\,\mathbf{E}\left(v^{T_n((b,\infty))}e^{\lambda S_n}\right) =$$
$$= \frac{1}{1-s\varphi(\lambda)}\Big\{1 - V(sv,s,\lambda)\,e^{(\lambda-\lambda(s))b} - \frac{(v-1)R_+(s,\lambda)}{R_+(sv,\lambda)}\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda y}d\varphi_{sv,s}(y)\Big\}, \quad (2)$$

где равномерно по множеству $|z| < 1$, $s \in L_\delta$

$$\int\limits_{(b,\infty)} |d\varphi_{z,s}(y)| \le Ce^{-(\lambda(1)+\varepsilon)b}.$$

Более точно, соответствующее утверждение в [3] содержит одновременно аналогичное представление и для

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n\,\mathbf{E}\left(v^{T_n((-\infty,-a))}e^{\lambda S_n}\right)$$

при $a \to \infty$, использующее компоненту факторизации $R_-(s,\lambda)$.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Пусть, для краткости, $T_n = T_n((b,\infty))$. Заметим, что

$$(1-s)\sum_{n=1}^{\infty} s^n\,\mathbf{E}T_n = s\mathbf{E}T_1 + \sum_{n=2}^{\infty} s^n\,\mathbf{E}(T_n - T_{n-1}) =$$
$$= s\mathbf{P}(X_1 > b) + \sum_{n=2}^{\infty} s^n\,\mathbf{E}I_{\{S_n > b\}} = \sum_{n=1}^{\infty} s^n\,\mathbf{P}(S_n > b) = h(s,b).$$

Полагая $\lambda = 0$ в (2), получим

$$\frac{1}{1-s} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n\,\mathbf{E}v^{T_n} = \sum_{n=1}^{\infty} s^n\,(1 - \mathbf{E}v^{T_n}) =$$
$$= \frac{V(sv,s,0)\,e^{-\lambda(s)b}}{1-s} + \frac{(v-1)R_+(s,0)}{(1-s)R_+(sv,0)} \int\limits_{(b,\infty)} d\varphi_{sv,s}(y)\,. \quad (3)$$

Напомним, что $V(sv,s,0) = -U(s)Z(s,v)$, где

$$U(s) = \frac{R_+(s,0)}{\lambda(s)R'_+(s,\lambda(s))}, \quad Z(s,v) = \frac{R_+(sv,\lambda(s))}{R_+(sv,0)}.$$

Функция $Z(s,v)$ аналитична по переменной v в окрестности единицы при $s \in L_\delta$, $Z(s,1) = 0$, поэтому

$$Z(s,v) = (v-1)A(s) + \ldots, \quad A(s) = \left.\frac{\partial Z(s,v)}{\partial v}\right|_{v=1}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{E}v^{T_n} = 1 + (v-1)\mathbf{E}T_n + \frac{(v-1)^2}{2}\mathbf{E}T_n(T_n - 1) + \ldots\ . \quad (4)$$

Поделив обе части (3) на $v - 1$ и устремив $v \to 1$, получим с помощью (4) следующее представление (здесь обозначено для краткости $\varphi_s(y) = -\varphi_{s,s}(y)$):

$$h(s,b) = (1-s)\sum_{n=1}^{\infty} s^n\,\mathbf{E}T_n = U(s)A(s)\,e^{-\lambda(s)b} + \int\limits_{(b,\infty)} d\,\varphi_s(y), \quad s \in L_\delta. \quad (5)$$

Уточним теперь значение функции $U(s)A(s)$. Известно [5], что в окрестности точки $s = 1$ справедливо представление

$$R_+(s,\lambda) = \frac{\lambda - \lambda(s)}{\lambda - 1} w_+(s,\lambda),$$

в котором функция $w_+(s,\lambda)$ аналитична по совокупности переменных в области

$$|s-1| < \delta, \quad Re\lambda < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

По этой причине

$$A(s) = \lim_{v\to1} \frac{R_+(sv,\lambda(s))}{(v-1)R_+(sv,0)} = \lim_{v\to1} \frac{(\lambda(s) - \lambda(sv))w_+(sv,\lambda(s))}{(v-1)(\lambda(s)-1)\lambda(sv)w_+(sv,0)} =$$
$$= \frac{w_+(s,\lambda(s))}{\lambda(s)(\lambda(s)-1)w_+(s,0)} \lim_{v\to1} \frac{\lambda(s) - \lambda(sv)}{v-1}.$$

Одновременно заметим, что

$$U(s) = \frac{(\lambda(s) - 1)w_+(s, 0)}{w_+(s, \lambda(s))},$$

поэтому

$$U(s)A(s) = \lim_{v \to 1} \frac{\lambda(s) - \lambda(sv)}{\lambda(s)(v - 1)}.$$

Функция $\lambda(sv)$ аналитична в окрестности точки $v = 1$ при фиксированном $s \in L_\delta$ [5], т. е.

$$\lambda(sv) = \lambda(s) + (v - 1)s\lambda'(s) + \frac{(v - 1)^2}{2} s^2 \lambda''(s) + \ldots,$$

поэтому

$$U(s)A(s) = \lim_{v \to 1} \frac{\lambda(s) - \lambda(sv)}{\lambda(s)(v - 1)} = -\frac{s\lambda'(s)}{\lambda(s)}.$$

Вместе с (5) это завершает доказательство теоремы 1.

Проанализируем поведение функции $a(s)$ в окрестности единицы. Предположим дополнительно, что $\mathbf{E}\exp\{\gamma X_1\} < \infty$ при некотором $\gamma < 0$, т. е. выполнено двухстороннее условие Крамера, и пусть сначала $\mathbf{E}\, X_1 = 0$. В этом случае $\lambda(1) = 0$ и $s = 1$ является для функции $\lambda(s)$ точкой ветвления второго порядка, при этом в окрестности единицы, разрезанной по лучу $s \geq 1$, справедливо разложение (см. [5])

$$\lambda(s) = \psi_1(1 - s)^{1/2} + \psi_2(1 - s) + \cdots,$$

где

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}, \quad \psi_2 = \frac{\mu_3}{3\sigma^4}, \quad \mu_k = E\, X_1^k, \quad \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2.$$

Следовательно, $a(s) \sim \dfrac{1}{2(1 - s)}$ при $s \to 1$.

Если $\mathbf{E}\, X_1 > 0$, то по-прежнему $\lambda(1) = 0$, и в условиях теоремы функция $\lambda(s)$ будет аналитической в некоторой окрестности единицы, $\lambda(s) = C_1(s - 1) + C_2(s - 1)^2 + \cdots$. Стало быть, в этом случае $a(s) \sim \dfrac{1}{1 - s}$ при $s \to 1$.

Если же $\mathbf{E}\, X_1 < 0$, то в условиях теоремы $\lambda(1) > 0$, и по этой причине функция $a(s)$ не имеет особенности в точке $s = 1$.

Список литературы

1. *Omey E., Teugels J.* Weighted Renewal Functions: A Hierarchical Approach // Advances in Applied Probability. 2002. Vol. 34. P. 394–415.

2. *Нагаев С. В.* Некоторые теоремы типа восстановления // Теория вероятностей и ее применения. 1968. Т. 13, вып. 4. С. 585–601.

3. *Лотов В. И.* О времени пребывания случайного блуждания в полосе // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 4. С. 785–804.

4. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

5. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.

Материал поступил в редколлегию 25.05.2010

Адрес автора
ЛОТОВ Владимир Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: lotov@math.nsc.ru

Сведения об авторах

Волокитин Евгений Павлович — кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, доецент кафедры высшей математики физического факультета Новосибирского государственного университета

Гимади Эдуард Хайрутдинович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН профессор кафедры теоретической кибернетики Новосибирского государственного университета

Курочкин Александр Александрович — аспирант Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Курочкин Александр Александрович — аспирант Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Урев Михаил Вадимович — доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, доцент кафедры вычислительной математики Новосибирского государственного университета,

Кремер Игорь Альбертович — кандидат физико-математических наук, инженер ЗАО «Центр РИТМ»

Кулпешов Бейбут Шайыкович — ????

Лавров Игорь Андреевич — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института системного программирования РАН, доцент Московского физико-технмческого университета

Лотов Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Мардаев Сергей Ильич — доктор физико-математических наук, доцент Новосибирского государственного университета, ведущий научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Мамонов Сергей Станиславович — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Рязанского государственного университета им. С. А. Есенина

Ротанова Татьяна Александровна — ????

Сперанский Станислав Олегович — ????

itself. A generalized and regularized statement of this problem without constraints is proposed and substantiated. Such a problem statement is equivalent to the original generalized problem with constraints.

Key words: quasistationary Maxwell's equations, vector potential, saddle point problem, regularization, discontinuous coefficients.

UDC 510.67

?? ????? // Vestnik, Quart. J. of Novosibirsk State Univ., Series: Math., mech. and informatics. 2011. Vol. 11. No. 1. P. 45–57.

??

Key words: ??.

UDC 510.5

Lavrov I. A. The Creation on Database on General Theory of Computability // Vestnik, Quart. J. of Novosibirsk State Univ., Series: Math., mech. and informatics. 2011. Vol. 11. No. 1. P. 58–63.

This database was created to provide specialists in different areas of computability theory a full view on a variety of current research directions in continuously developing field of theory of algorithms.

Key words: computability, recusively enumerable sets, reducibilities.

UDC 519.21

Lotov V. I. On the Asymptotics of Weighted Renewal Function // Vestnik, Quart. J. of Novosibirsk State Univ., Series: Math., mech. and informatics. 2011. Vol. 11. No. 1. P. 64–69.

We obtain the theorem on the asymptotics of weighted renewal function under Cram'er type conditions on the distribution of summands.

Key words: random walk, weighted renewal function, moment generating functions, asymptotic analysis.

UDC 510.64

Mardaev S. I. Submodel Defining Formulas // Vestnik, Quart. J. of Novosibirsk State Univ., Series: Math., mech. and informatics. 2011. Vol. 11. No. 1. P. 70–74.

Least fixed points of modal formulas are investigated. A concept of submodel defining formula is introduced and it is proved that for each formula positive in special variable there