На правах рукописи

Кергилова Татьяна Александровна

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ МЕБИУСОВОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Горно-Алтайск, Новосибирск – 2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа физико-математического факультета Горно-Алтайского государственного университета

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Асеев Владислав Васильевич

Официальные оппоненты:

доктор физико–математических наук, профессор

Сычев Анатолий Викторович

(Новосибирский государственный университет);

доктор физико–математических наук, профессор

Шлык Владимир Алексеевич

(Дальневосточный государственный университет)

Ведущая организация:

Кемеровский государственный университет

Защита состоится 14 февраля 2012 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 в Новосибирском государственном университете по адресу 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан "_____"_____________ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,

доктор физико-математических наук Старовойтов В.Н.

Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию геометрических критериев мебиусовости с минимальными ограничениями на рассматриваемый класс отображений плоских и пространственных областей. Центральный объект изучения – мебиусовы преобразования на плоскости и в пространстве – широко используются в различных областях современной математики: в теории аналитических функций, в гиперболической геометрии, в теории квазиконформных отображений, в метрической топологии и т.д. Встречается использование мебиусовых преобразований и в прикладных областях, таких как, например, общая теория генных сетей, теория обработки сигналов и т.п. (см. DP. Mandic[1]). Дискретные подгруппы общей группы мебиусовых преобразований – модулярные группы, фуксовы группы, клейновы группы и их разновидности – являются на протяжении многих десятилетий (начиная с работ Ф. Клейна и А. Пуанкаре) предметом изучения и основным инструментом исследований в теории автоморфных функций, в общей теории римановых поверхностей и топологии многообразий (в частности, связанных с гипотезой Пуанкаре), о чем свидетельствут огромное число публикаций и монографий, посвященных этому направлению. Наряду с классическими трудами Ф. Клейна, Э. Гурса, Р. Неванлинны, Р.Л. Форда, В.В. Голубева и др. важный вклад в развитие этих областей математики внесли монографии Л. Альфорса, А. Бердона, У. Терстона, И. Кра, С.Л. Крушкаля, В.И. Чуешева, Б.Н. Апанасова и др., а также многочисленные статьи по этой проблематике, занимающие до настоящего времени заметное место в общем потоке математических публикаций (см., например, работы В.И. Чуешева, А.Д. Медных, А.В. Тетенова и др.). Важность мебиусовых преобразований в

[1] *Mandic DP.*: The use of Möbius transformations in neural networks and signal processing. In: Neural Networks for Signal Processing // Proceedings of the IEEE Workshop. 2000. Vol. 1. P. 185-194.

теории пространственных отображений связана с тем (теорема Лиувилля), что это единственные конформные преобразования в пространстве размерности больше двух; в окончательной формулировке (без условий гладкости отображения) эта теорема была доказана Ю.Г. Решетняком.

Задачи, связанные с нахождением достаточных признаков мебиусовости (а также изометричности или аффинности) отображений при минимальных условиях восходят к классическим работам К. Каратеодори (1937), А.Д. Александрова (1950), Ф.С. Бекмана и Д.А. Кварлиса (1953). В общей постановке для заданного класса $\mathcal{F}_0$ геометрических преобразований (мебиусовых, изометрических, аффинных, подобий и т.п.) эту задачу можно сформулировать следующим образом. *В классе $\mathcal{F}$ отображений указать такое свойство $\mathcal{P}$ и семейство $\mathcal{T}$ подмножеств из области определения, что выполнение свойства $\mathcal{P}$ у ограничения $f|T$ отображения $f \in \mathcal{F}$ на каждом подмножестве $T \in \mathcal{T}$ является достаточным признаком принадлежности отображения классу $\mathcal{F}_0$.* В геометрии наиболее известны минимальные признаки изометричности и подобия (см. например, работы А.Д. Александрова о жесткости выпуклых тел и Копылова А.П. (2006) о емкостном критерии подобия выпуклых многогранников, статьи Бэкмана и Кворлиса (1953), Кузьминых А.В. (1997), Khamsemanan и Connelly (2002), об изометричности отображений, сохраняющих заданные расстояния). Различные минимальные критерии аффинности, берущие начало из основной теоремы аффинной геометрии, установлены, например, в недавних работах Богатого С.А., Богатой С.И и Фролкиной О.Д. (2001 - 2002)). Геометрическим минимальным признакам аффинности, изометричности и подобия посвящены монографии В. Бенца (1994) и Ж. Лестера (1995).

В теории квазиконформных отображений известны работы, в которых изучаются признаки мебиусовости топологических вложений континуумов, выраженные условием сохранения модулей семейств кривых в пространстве, соединяющих пары подмножеств заданного континуума. К этому направлению относятся, например, некоторые работы Асеева В.В., Шлыка В.А., Сычева А.В., а также недавние результаты А.П. Копылова (2006-2009).

Геометрические признаки мёбиусовости, восходящие к известной теореме Каратеодори, устанавливающей мебиусовость отображения, переводящего малые окружности в окружности (без требования непрерывности), также служат объектом изучения в многочисленных работах, список которых особенно активно пополняется в последние два десятилетия. Всевозможные модификации и обобщения теоремы Каратеодори в этих статьях можно объединить под общим названием, как мебиусовость отображений, переводящих сферы в сферы или в подмножества сфер. Из работ такого сорта можно назвать, например, результаты Ю.Б. Зелинского (1987), А.Ф. Бердона и Д. Минда (2001), Р. Хёфера (1999), G. Yao (2007-2008), B. Li и G. Yao (2009) и др. Признаки мёбиусовости, основанные на сохранении тех или иных геометрических характеристик на заданном семействе четырехточечных подмножеств можно объединить под общим названием, как четырехточечные критерии мебиусовости. К этому направлению, непосредственно связанному с темой данной диссертации, относится обширная библиография работ 1994-2009 гг., среди которых можно назвать, к примеру, цикл работ Х. Харуки и Т. Рассиаса о сохранении аполлониевых четырехсторонников (1998) и аполлониевых гексагонов (2000), о сохранении четырехугольников с фиксированной суммой пары противоположных углов (1994); работы их последователей – P. Niamsup (2001), S. Bulut и Y. Özgür о сохранении аполлониева пятиугольника (2004) и аполлониева $(2n-1)$-угольника (2005); статьи Х. Харуки - Т. Рассиаса (1996) и О. Кобаяси (2007) о сохранении ангармонического отношения с фиксированным значением и др. Во всех упомянутых работах задача сводится к использованию дифференциального критерия мебиусовости (равенство нулю производной Шварца), принадлежащего Л. Альфорсу, и существенно предполагает наличие непрерывной дифференцируемости отображений. Следует также отметить аналогичные исследования для отображений в гиперболическом пространстве (см, напр. A. Ungar (2007), L. Jing (2006), Sh. Yang (2008), A. Fang (2006)). и в пространстве Минковского (см. А.Д. Александров (1950, 1974)).

В этих работах, однако, не рассматривается вопрос об устойчивости полученных геометрических критериев мебиусовости, который предполагает выход в более широкий класс отображений – квазиконформных, квазисимметрических или квазиизометрических (билипшицевых). Важность проблемы устойчивости в задачах геометрии и анализа продемонстрирована в монографии Ю.Г. Решетняка (1982), которым были получены фундаментальные теоремы устойчивости в классе отображений с ограниченным искажением. Устойчивость в классе лоренцевых преобразований изучалась в работах Л.Г. Гурова (1973-1977). В классе подобий оценки устойчивости квазиизометрических отображений были получены в работах Д.А. Троценко (1986-1993).

Для плоских квазиконформных отображений качественная теорема устойчивости была указана М.А. Лаврентьевым (1954), а полное решение этой задачи с указанием количественных оценок устойчивости было получено П.П. Белинским (1970) в классе плоских квазиконформных и квазиконфорормных в среднем отображений. Дальнейшее развитие общая теория устойчивости классов отображений получила в цикле работ

А.П. Копылова (см. его монографию 1990 г.) и его учеников.

В связи с этим в диссертации рассмотрен также вопрос об устойчивости полученных критериев мебиусовости в классе квазиконформных автоморфизмов римановой сферы.

Цель работы

Работа направлена на решение следующих пяти основных задач.

Задача 1. Доказать, что критерий мебиусовости, полученный Х. Харуки и Т. Рассиас (1994) в классе однолистных аналитических функций, остается справедливым и в классе гомеоморфизмов без каких-либо условий дифференцируемости.

Задача 2. Доказать, что сохранение ангармонического отношения с фиксированным значением служит признаком мебиусовости в классе гомеоморфизмов без каких-либо условий дифференцируемости (усиление результата Кобаяси (2009), полученного в классе непрерывно дифференцируемых отображений).

Задача 3. Свойство сохранения ангармонического отношения с фиксированным значением заменить более слабым условием сохранения с точностью до комплексного сопряжения. Установить, что в классе инъективных измеримых по Борелю отображений такое свойство является критерием мебиусовости.

Задача 4. Показать, что гомеоморфизм римановой сферы на себя, мало изменяющий фиксированное ангармоническое отношение, является квазиконформным и получить асимптотически точную оценку его коэффициента квазиконформности.

Задача 5. Выбрав подходящий аналог ангармонического отношения четверки точек в пространстве, получить критерий мебиусовости отображений пространственных областей в терминах сохранения ими ангармонического отношения с фиксированным значением.

Методы исследования

Результаты диссертации получены применением современных методов геометрической теории функций и комплексного анализа, мебиусовой геометрии, теории меры и метрической топологии. В первой главе существенно используются особенности топологии плоскости, а также введенное в тексте понятие точки невыпуклости на границе области, приспособленное к решению поставленной задачи. Во второй главе основной результат получен методом перебора логических возможностей, применением общих свойств дробно-линейных преобразований и свойств измеримых по Борелю отображений. Здесь же, при решении задачи 4, использованы основные факты из теории квазиконформных отображений. В третьей главе применяются геометрические критерии мебиусовости, основанные на свойстве сохранения сфер размерности $n-2$ и известные факты об измеримых решениях функционального уравнения Йенсена (или эквивалентного ему функционального уравнения Коши).

Научная новизна

Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми, за исключением вспомогательных утверждений об основных свойствах мебиусовых вложений в §3.2 и элементарных модификаций известных критериев аффинности и мебиусовости в §3.3. Аналоги этих утверждений, по-видимому, имеются в литературе, но автору не удалось отыскать подходящую библиографическую ссылку.

Новизна основной теоремы первой главы – доказательство критерия мёбиусовости в терминах сохранения суммы противоположных углов правильных четырехугольников – состоит в том, что этот критерий установлен в классе гомеоморфизмов, тогда как аналогичный результат Н.

Haruki и T. Rassias'a (1994) был получен только в гораздо более узком классе конформных отображений.

Новизна основной теоремы второй главы – доказательство критерия мебиусовости в терминах сохранения с точностью до комплексного сопряжения фиксированного ангармонического отношения – заключается в том, что он получен в классе инъективных измеримых по Борелю отображений, тогда как аналогичный результат O. Kobayashi (2009) был установлен только в более узком классе конформных отображений и при более ограничительном условии – полном сохранении фиксированного ангармонического отношения. Теорема устойчивости критерия мебиусовости, полученная в этой же главе, не имеет аналогов в работах, посвященных геометрическим критериям мебиусовости, является новой как по постановке задачи, так и по методике ее решения.

Три основные теоремы третьей главы – критерии мебиусовости инъективных отображений пространственных областей в терминах сохранения фиксированного ангармонического отношения – также являются новыми по самой постановке задачи и не имеют аналогов в работах по геометрическим признакам мебиусовости, где в пространстве рассматривалось лишь условие сохранения абсолютного двойного отношения, являющееся более ограничительным, чем сохранение ангармонического отношения.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты диссертации имеют теоретическую значимость и могут быть полезны специалистам, работающим в области теории функций и отображений, в конформной геометрии, в теории римановых поверхностей, в метрической топологии, в теории дискретных групп преобразований. Часть результатов связана с новой проблематикой и может служить основой для дальнейших исследований по проблеме устойчивости геометрических признаков мебиусовости. Все утверждения и теоремы в тексте диссертации приведены с полными доказательствами или снабжены соответствующими библиографическими ссылками. Поэтому материалы диссертации могут быть использованы при организации спецкурсов по дополнительным вопросам комплексного анализа, предназначенных для магистрантов и аспирантов высших учебных заведений.

Апробация работы

Результаты работы докладывались:

– на семинарах кафедры математического анализа Горно-Алтайского госуниверситета (рук-ль доцент Тетенов А.В.);

–на семинарах лаборатории теории функций Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (рук-ль профессор Медных А.Д.);

– на семинаре отдела условно-корректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (рук-ль член-корр. РАН Романов В.Г.);

–на семинаре кафедры теории функций НГУ (рук-ль профессор Медных А.Д.);

–на семинаре лаборатории дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (рук-ли профессора Фокин М.В., Белоносов В.С.);

а также на международных и российских конференциях:

– Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева. Новосибирск, 2008;

– Международная конференция "Современные проблемы анализа и геометрии". Новосибирск, 2009;

– Международная Казанская научная школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы." Казань, 2009;

– Школа-конференция по геометрическому анализу. Горно-Алтайск, 2010, 2011;

– International Congress of Mathematicians. Hyderabad, India, 2010.

Публикации

По теме публикации подготовлено и опубликовано 4 статьи в рецензируемых журналах и 9 тезисов докладов международных и российских конференций.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы, насчитывающей 74 наименований. Компьютерный набор выполнен с использованием пакета LaTeX. Объем работы – 112 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность и история исследуемых задач и кратко охарактеризовано содержание диссертации.

Первая глава посвящена решению геометрической задачи об описании свойства мёбиусовости гомеоморфизма в терминах сохранения суммы противолежащих углов специального класса достаточно малых четырехугольников.

В §1.1 изложена история возникновения этой задачи из работ Haruki и Rassias'a (1994 г.) и статей Niamsup'a (2000 г.), в которых изучались отображения, осуществляемые однолистными аналитическими функциями $f(z)$, обладающие следующим геометрическим свойством $\mathcal{P}(\alpha)$ с фиксированным $0 < \alpha < 2\pi$: если четырехточечное множество z_1, z_2, z_3, z_4 в области определения таково, что

(i) точки z_2, z_4 лежат по разные стороны от прямой, проведенной через z_1 и z_3;

(ii) точки $w_2 = f(z_2), w_4 = f(z_4)$ лежат по разные стороны от прямой, проходящей через $w_1 = f(z_1)$ и $w_3 = f(z_3)$;

(iii) сумма неориентированных углов $\angle z_1 z_2 z_3$ и $\angle z_1 z_4 z_3$ равна α,

то сумма неориентированных углов $\angle w_1 w_2 w_3$ и $\angle w_1 w_4 w_3$ тоже равна α.

Haruki и Rassias[1] доказали, что при любом фиксированном $0 < \alpha < 2\pi$ для любой однолистной аналитической функции свойство $\mathcal{P}(\alpha)$ равносильно мёбиусовости отображения, осуществляемого этой функцией.

В связи с этой теоремой была поставлена следующая

Задача 1. Доказать, что равносильность мёбиусовости и локального свойства $\mathcal{P}(\alpha)$ имеет место для гомеоморфизмов плоских областей без каких-либо предположений об их дифференцируемости.

В §1.2 введена терминология, строгие определения и обозначения для основных геометрических объектов и свойств, используемых в формулировке и в дальнейшем доказательстве основной теоремы этой главы, дающей решение поставленной выше задачи 1:

ТЕОРЕМА 1.2.3. *Пусть $0 < \alpha < 2\pi$ и D – область в расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbf{C}}$. Гомеоморфное отображение области D на область в $\bar{\mathbf{C}}$ удовлетворяет локальному условию $\mathcal{P}(\alpha)$ тогда и только тогда, когда оно является мёбиусовым преобразованием.*

Доказательство этой теоремы разбито на несколько этапов, оформленных в виде отдельных параграфов и ряда вспомогательных лемм.

В §1.3 доказаны две простые геометрические леммы. Для доказательства основной теоремы необходимо установить наличие кругового свойства (малые окружности переходят в малые окружности) у гомеоморфизма со свойством $\mathcal{P}(\alpha)$. Поэтому **лемма 1.3.1** с описанием ситуации, в которой образом круговой дуги является круговая дуга, играет ключе-

[1] *Haruki H., Rassias T.M.*: A new invariant characteristic property of móbius transformations from standpoint of conformal mapping // J. Math. Anal. Appl. 1994. Vol. 181. P. 320-327.

вую роль в дальнейших построениях. **Лемма 1.3.2** дает гарантию того, что все выполняемые в ходе доказательства построения не выводят за пределы области определения исследуемого отображения.

В §1.4. **Лемма 1.4.1** устанавливает наличие кругового свойства у гомеоморфизма, удовлетворяющего условию $\mathcal{P}(\alpha)$, в том случае, когда $0 < \alpha \leq \pi$. Получение аналогичного результата в случае, когда $\pi < \alpha < 2\pi$, потребовало значительно больших усилий и дополнительных построений.

В §1.5 доказывается **лемма 1.5.1**, смысл которой состоит в том, что в рассматриваемой ситуации (свойство $\mathcal{P}(\alpha)$ при $\pi < \alpha < 2\pi$) образ $f(\gamma)$ достаточно малой круговой дуги γ либо является прямолинейным отрезком, либо лежит по одну сторону от прямой, проведенной через концы дуги $f(\gamma)$, и в этом случае корректно определен сегмент этой дуги – жорданова область, заключенная между дугой $f(\gamma)$ и ее хордой. Далее следует многократно используемая в дальнейших рассуждениях **лемма 1.5.3 (лемма о малых хордах)**, показывающая, что в той же ситуации любая поддуга дуги $f(\gamma)$ либо является прямолинейным отрезком, либо ее сегмент корректно определен и содержится в сегменте дуги $f(\gamma)$.

В §1.6 вводится понятие точки невыпуклости относительно жордановой области, на границе которой лежит рассматриваемая точка. Это понятие несколько отличается от обычного понятия выпуклости кривой и играет служебную роль. Оно приспособлено исключительно к решению поставленной задачи и используется только в данной главе. В **лемме 1.6.2** показано, что в образе достаточно малой дуги на границе круга либо все точки являются точками невыпуклости относительно образа этого круга, либо таких точек нет вообще. И отсюда выводится (**лемма 1.6.3**), что образ достаточно малой окружности не может иметь ни одной точки невыпуклости относительно образа круга, ограниченного этой окружностью.

В §1.7. в **лемме 1.7.1** устанавливается круговое свойство гомеоморфизма, удовлетворяющего условию $\mathcal{P}(\alpha)$ в случае $\pi < \alpha < 2\pi$.

И, наконец, в заключительном §1.8 завершается доказательство основной теоремы: леммы 1.4.1 и 1.7.1 позволяют применить известный геометрический критерий мебиусовости, принадлежащий Каратеодори: отображение, локально обладающее круговым свойством, является мёбиусовым преобразованием.

Во второй главе диссертации изучаются отображения, при которых ангармоническое отношение четверок точек из заданного семейства тетрад меняется определенным образом (сохраняется или же сохраняется с точностью до комплексного сопряжения).

В §2.1 изложены те результаты предшественников, на основе которых были поставлены задачи, решаемые в этой главе.

В 1996 году Haruki и Rassias[2] показали, что *отображение областей в* $\bar{\mathbf{C}}$, *осуществляемое однолистной аналитической функцией, является дробно-линейным преобразованием тогда и только тогда, когда оно переводит аполлониевы тетрады в аполлониевы тетрады, то есть сохраняет свойство аполлониевости тетрад.*

В 2009 году Kobayashi[3] заметил, что аполлониевость тетрады равносильна тому, что её ангармоническое отношение равно $(1 \pm i\sqrt{3})/2$, и поэтому свойство сохранения аполлониевых тетрад можно трактовать как условие сохранения (с точностью до комплексного сопряжения) ангармонического отношения с фиксированным значением $\alpha = (1 + i\sqrt{3})/2$. Им

[2] *Haruki H., Rassias T.M.*: A new characterictic of Móbius transformations by use of Apollonius points of triangles // J. Math. Anal. Appl. 1996. Vol. 197. P. 14-22.

[3] *Kobayashi O.*: Apollonius points and anharmonic ratios // Tokyo Math. J. 2007. Vol. 30. No 1. P. 117-119.

же было замечено, что требование аналитичности функции, осуществляющей отображение, можно существенно ослабить, заменив требованием гладкости класса C^1. Обобщая ситуацию, Kobayashi доказал, что *в классе гомеоморфизмов класса гладкости C^1 при любом фиксированном невещественном α отображение реализуется дробно-линейной функцией тогда и только тогда, когда образ любой тетрады с ангармоническим отношением α также имеет ангармоническое отношение α.*

Далее в этом параграфе сформулированы три задачи, решению которых посвящена вторая глава.

Задача 2. Доказать, что условие сохранения ангармонического отношения с фиксированным значением $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ служит критерием мёбиусовости в классе гомеоморфизмов без дополнительного требования их гладкости.

Задача 3. Заменим требование сохранения ангармонического отношения с фиксированным значением α более слабым условием $\mathcal{R}[\alpha]$: при фиксированном $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ образ любой тетрады с ангармоническим отношением α есть тетрада с ангармоническим отношением α или $\bar{\alpha}$. В каком наиболее широком классе отображений плоских областей (без требования непрерывности) это свойство $\mathcal{R}[\alpha]$ служит критерием мёбиусовости отображения?

Естественным продолжением успешного решения задачи 2 является постановка вопроса об устойчивости полученного критерия мёбиусовости, то есть возникает

Задача 4. Учитывая, что мёбиусовы отображения являются 1-квазиконформными, показать, что гомеоморфизм, мало (не более чем на ε) изменяющий ангармоническое отношение с фиксированным значением, является квазиконформным и получить верхнюю оценку его коэффициента квазиконформности, стремящуюся к 1 при $\varepsilon \to 0$.

В §2.2 приводится определение ангармонического отношения и отмечаются некоторые его элементарные свойства. Приводится определение отображения, измеримого по Борелю (борелевского отображения) и вводится строгое определение свойства $\mathcal{R}[\lambda]$ – сохранение с точностью до комплексного сопряжения ангармонического отношения тетрад с заданным ангармоническим отношением λ.

Приводятся формулировки двух основных теорем этой главы:

ТЕОРЕМА 2.2.3. Пусть фиксировано $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$, и пусть D – область в $\bar{\mathbf{C}}$. Для того, чтобы инъективное измеримое по Борелю отображение $f : D \to \bar{\mathbf{C}}$ было мёбиусовым, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало свойством $\mathcal{R}[\lambda]$.

Отмечено, что в классе инъективных отображений (без требования измеримости по Борелю) эта теорема не верна, и указана соответстующая ссылка на существующий контрпример.

Для исследования вопроса о существенности требования инъективности, понятие ангармонического отношения распространяется на *неособые тетрады* – четверки точек, не содержащие трех совпадающих элементов. Свойство $\mathcal{R}'[\lambda]$ заключается в сохранении ангармонического отношения у всех таких тетрад с ангармоническим отношением $\lambda \neq 0, 1, \infty$, образы которых являются неособыми тетрадами. В этих терминах сформулирована

ТЕОРЕМА 2.2.5. Пусть фиксировано $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$, и пусть D – область в $\bar{\mathbf{C}}$. Непрерывное отображение $f : D \to \bar{\mathbf{C}}$ обладает свойством $\mathcal{R}'[\lambda]$ тогда и только тогда, когда оно является либо мёбиусовым отображением, либо постоянным отображением $f \equiv \text{const}$.

Из этих теорем тривиально вытекают упомянутые выше результаты

Haruki, Rassias'a и Kobayashi.

В §2.3 доказаны две леммы технического характера. **Лемма 2.3.1** позволяет более полно использовать информацию, заложенную в свойстве $\mathcal{R}[\lambda]$, а **лемма 2.3.2** дает гарантию того, что выполняемые далее построения не выводят за пределы области, в которой задано исследуемое отображение.

В §2.4 помещается наиболее трудоёмкий фрагмент доказательства основной теоремы. Путем детального рассмотрения всех логически возможных вариантов устанавливается (**лемма 2.4.4**), что при некоторых дополнительных ограничениях свойство $\mathcal{R}[\lambda]$ приводит к тому, что отображение с неподвижной точкой $\infty \in D$ удовлетворяет условию сохранения мёбиусовых середин, то есть $\mathcal{R}[1/2]$.

В §2.5 приведено окончательное доказательство теоремы 2.2.3. Показывается, что свойство $\mathcal{R}[\lambda]$ приводит к тому, что достаточно малые окружности переходят в окружности, и появляется возможность использовать геометрический критерий мёбиусовости, принадлежащий Каратеодори.

В §2.6 приведено доказательство теоремы 2.2.5.

В §2.7. решается задача 4 об устойчивости критерия мёбиусовости, полученного в теореме 2.2.3 в классе гомеоморфизмов расширенной плоскости на себя, сохраняющих ориентацию. В этом классе отображений вводится следующее

Определение 2.7.1. Пусть задано $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : \bar{\mathbf{C}} \to \bar{\mathbf{C}}$ удовлетворяет условию $\mathcal{R}[\lambda; \delta]$ с $0 \leq \delta < 1$, если для любой тетрады $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \bar{\mathbf{C}}$ с ангармоническим отношением λ выполняется неравенство

$$|[f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] - \lambda| \leq \delta |\lambda|.$$

Доказана следующая теорема об устойчивости критерия мёбиусовости, дающая частичное решение задачи 4:

ТЕОРЕМА 2.7.3. Пусть для заданного $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : \bar{\mathbf{C}} \to \bar{\mathbf{C}}$ удовлетворяет условию $\mathcal{R}[\lambda; \delta]$ с $0 \le \delta < 1$. Если при этом

$$\delta < \frac{|1-\lambda|}{2+8|\lambda|} \ .$$

то отображение f является квазиконформным с коэффициентом квазиконформности

$$K[f] \le 1 + \delta \frac{2(1+4|\lambda|)}{|1-\lambda|} + 2\sqrt{\delta \frac{1+4|\lambda|}{|1-\lambda|} + \delta^2 \left(\frac{1+4|\lambda|}{|1-\lambda|} \right)^2} \ .$$

В доказательстве этой теоремы существенно используются результаты, полученные Асеевым В.В. для отображений, удовлетворяющих условию малого искажения мёбиусовых середин.

Заключительный параграф этой главы (§2.8) содержит информацию справочного характера о связи понятия аполлониевой тетрады с окружностями Аполлония.

В третьей главе диссертации рассматривается возможность получения критериев мебиусовости для отображений в пространствах бóльшей размерности.

В §3.1 приводится определение мёбиусова преобразования расширенного пространства $\bar{R}^n$ (размерности $n \le 2$) и более общего понятия мёбиусова вложения.

Известный критерий мёбиусовости вложений, выраженный требованием сохранения абсолютного двойного отношения всех тетрад из области определения, даёт альтернативное определение мёбиусова вложения, которое непосредственно переносится на случай отображений произвольных метрических пространств.

В 2001 году Beardon и Minda[4] доказали, что *любое инъективное отображение* $f : D \to \bar{R}^n$ *области* $D \subset \bar{R}^n$, *которое сохраняет абсолютное двойное отношение с фиксированным значением* 1, *является мёбиусовым вложением.*

Учитывая, что топологическое вложение $f : D \to \bar{R}^n$ области $D \subset \bar{R}^n$, переводящее гиперсферы из D в подмножества гиперсфер, является мёбиусовым вложением (это частный случай теоремы, доказанной Ю.Б. Зелинским[5] в 1987 году), легко устанавливается, что *в классе топологических вложений критерием мёбиусовости служит сохранение абсолютного двойного отношения с любым заданным фиксированным значением.*

Стремление ещё более уменьшить семейство тех тетрад, на которых выполняется проверка критерия мёбиусовости, и полученные нами теоремы в главе 2, показывающие, как эта цель достигается в случае размерности $n = 2$, приводят к постановке следующей задачи.

Задача 5. Определив подходящим образом аналог ангармонического отношения для тетрад в пространстве $\bar{R}^n$ (комплексную характеристику тетрад), получить критерий мебиусовости для вложений $f : D \to \bar{R}^m$ областей $D \subset \bar{R}^n$ при $2 \leq n \leq m$ в терминах сохранения ими ангармонического отношения с фиксированным значением α.

Здесь семейство тетрад с фиксированным ангармоническим отношением α в общем случае меньше, чем семейство тетрад с фиксированным абсолютным двойным отношением $|\alpha|$. Поэтому речь идёт о более тонком критерии мёбиусовости, чем приведенное выше условие сохранения

---

[4] *Beardon A.F., Minda D.*: Sphere-preserving maps in inversive geometry // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. Vol. 130. No 4. P. 987-998.

[5] *Зелинский Ю.Б.*: Об инвариантных на подмножествах отображениях // «Теория приближений и смежные вопросы анализа и топологии. Сб. научн. тр.» – Киев. Ин-т матем. АН УССР. 1987. С. 25-35.

фиксированного абсолютного двойного отношения.

В §3.2 вводится необходимая терминология, связанная с понятие мёбиусова вложения. Отмечены основные свойства мёбиусовых вложений, в том числе свойство его локальности.

В §3.3 приведены известные критерии аффинности и мёбиусовости отображений и некоторые их элементарные обобщения. В частности (**утверждение 3.3.6**), установлена модификация классической теоремы Каратеодори в следующей формулировке: *инъективное отображение области $D \subset \bar{R}^n$ в пространство $\bar{R}^m$ с $3 \leq n \leq m$ является мёбиусовым вложением тогда и только тогда, когда образом любой обобщённой окружности из D является обобщённая окружность в $\bar{R}^m$.*

В §3.4 из нескольких возможных способов введения ангармонического отношения в многомерном пространстве, обсуждаемых в работе 1997 г. Cieśliński[6] , выбирается наиболее подходящий для решения поставленной задачи:

Определение 3.4.1, 3.4.2. Для тетрады $x_1, x_2, x_3, \infty \subset \bar{R}^n$ полагаем

$$q(x_1, x_2, x_3, \infty) := \frac{|x_1 - x_3|}{|x_2 - x_3|} e^{i\varphi} \ ,$$

где $\varphi \in [0, \pi]$ – неориентированный угол между векторами $\overrightarrow{x_1 x_3}$ и $\overrightarrow{x_2 x_3}$. Тогда *главным ангармоническим отношением* тетрады x_1, x_2, x_3, x_4 в $\bar{R}^n$ называется число

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) := q(\mu(x_1), \mu(x_2), \mu(x_3), \infty) \ ,$$

где μ – произвольное мёбиусово преобразование, переводящее точку x_4 в ∞.

Проверяется корректность этого определения (независимость от выбора μ) и доказывается

[6] *Cieśliński J.*: The cross ratio and Clifford algebras. // Adv. in Clifford algebras. 1997. Vol. 7. No 2. P. 133-139.

ТЕОРЕМА 3.4.5. Пусть $n \geq 3$ и $\lambda = \alpha + i\beta$ с $\beta > 0$. Биективное отображение $f : \bar{R}^n \to \bar{R}^n$ является мёбиусовым преобразованием тогда и только тогда, когда оно сохраняет главное ангармоническое отношение с фиксированным значением λ.

В этой теореме не требуется непрерывности отображения f, но в доказательстве существенно используется тот факт, что оно осуществляет биекцию пространства на себя.

В §3.5 рассматриваются вложения, заданные на областях в подпространстве. Установлена

ТЕОРЕМА 3.5.1. Пусть λ – вещественное число, отличное от 0 и 1. Пусть D есть область в $\bar{R}^n$ и $f : D \to \bar{R}^m$ (где $m \geq n \geq 3$) – инъективное измеримое по Борелю отображение. Если образ любой тетрады x_1, x_2, x_3, x_4 из D с главным ангармоническим отношением λ также имеет главное ангармоническое отношение λ, то f является мёбиусовым вложением.

В §3.6 – заключительном параграфе этой главы, рассмотрен случай невещественного λ, и в классе топологических вложений доказан следующий критерий мёбиусовости:

ТЕОРЕМА 3.6.1. Пусть $\lambda = |\lambda|e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$. Топологическое вложение $f : D \to \bar{R}^n$ области $D \subset \bar{R}^n$ $(n \geq 3)$ является мёбиусовым вложением тогда и только тогда, когда оно сохраняет главное ангармоническое отношение с фиксированным значением λ.

В доказательстве существенно используется непрерывность и инъективность отображения, а также то, что область D лежит в пространстве той же размерности, что и пространство образа.

В случае чётномерного пространства требование непрерывности отображения можно существенно ослабить:

ТЕОРЕМА 3.6.4. Пусть задано $\lambda = |\lambda|e^{i\varphi}$ с $0 < \varphi < \pi$. Если $n \geq 2$ – чётное число, то любое инъективное измеримое по Борелю отображение $f : D \to \bar{R}^n$ области $D \subset \bar{R}^n$ является мёбиусовым вложением тогда и только тогда, когда оно сохраняет главное ангармоническое отношение с фиксированным значением λ.

Доказательство этой теоремы сводится индукцией по размерности к случаю, рассмотренному в теореме 2.2.5 второй главы.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Асееву В.В. за постоянное внимание и всестороннюю поддержку.

Публикации по теме диссертации

1. Кергилова Т.А. *Мебиусовость инъективных, измеримых по Борелю отображений, сохраняющих фиксированное ангармоническое отношение с точностью до комплексного сопряжения* // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 68-81.

2. Асеев В.В., Кергилова Т.А. *Четырехточечный критерий мебиусовости гомеоморфизма плоских областей* // Сиб. Мат. Ж-л. 2011. Т. 52, № 5. С. 977-992.

3. Aseev V., Kergilova T. *On transformations that preserve fixed anharmonic ratio* // Tokyo Math. Journal. 2010. Vol. 33. No 2. P. 365-371.

4. Асеев В.В., Кергилова Т.А. *Минимальные критерии мебиусовости* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 44 . 2011. С. 62.

5. Aseev V., Kergilova T. *Moebius transformations preserving fixed anharmonic ratio* // ArXiv.org. arXiv:0810.4434v1 [math.GT] 24 Oct 2008.

6. Кергилова Т.А. *Усиление теоремы Кобаяси о мебиусовых отображениях* // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева. Новосибирск. 2008. С. 322.

7. Асеев В.В., Кергилова Т.А. *Квазиконформные отображения и емкости конденсаторов:* учебно-методическое пособие // Горно-Алтайск: РИО Г-АГУ, 2009. ? 80 с.

8. Кергилова Т.А. *Усиление теоремы Кобаяси о мебиусовых отображениях* // Международная конференция ?Современные проблемы анализа и геометрии?. Новосибирск 2009. С. 51.

9. Кергилова Т.А. *Мебиусовость отображений, сохраняющих фиксированное ангармоническое отношение* // Труды математического цен-

тра им. Н.И. Лобачевского. Т. 39. Лобачевские чтения. 2009. С. 261-262.

10. Кергилова Т.А. *Усиление теоремы Кобаяси о мебиусовых отображениях* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 38. 2009. С. 151-152.

11. Кергилова Т.А. *Геометрический критерий мебиусовости отображений* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 43. 2010. С. 191-192.

12. Кергилова Т.А. *A characterization of Moebius transformations by use of fixed cross ratio* // Programme of International Congress of Mathematicians. August 19-27, 2010. Hyderabad, India. P. 22.

13. Кергилова Т.А. *Характеристика мебиусовых преобразований* // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу. Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2010. С. 47-48.

14. Кергилова Т.А. *Геометрический критерий мебиусовости инъективных, измеримых по Борелю отображений* // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу. Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2011. С. 28-29.