На правах рукописи

Нещадим Михаил Владимирович

АЛГЕБРО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Новосибирск – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант: д.ф.-м.н. проф. Аниконов Юрий Евгеньевич

Официальные оппоненты:

Аннин Борис Дмитриевич, академик РАН, ИГиЛ СО РАН, заведующий лабораторией механики композитов

Блохин Александр Михайлович, д.ф.-м.н. проф., ИМ СО РАН, заведующий лабораторией вычислительных проблем задач математической физики

Боровских Алексей Владиславович, д.ф.-м.н. доц., МГУ, факультет педагогического образования, заместитель декана

Ведущая организация: Сибирский федеральный университет

Защита состоится __________ 2012 г. в __________ часов на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Новосибирском национальном исследовательском государственном университете по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского национального исследовательского государственного университета по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

Автореферат разослан ______________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Старовойтов Виктор Николаевич

Общая характеристика работы

В работе развиваются алгебраические и аналитические методы исследования дифференциальных и интегральных уравнений математической физики; разрабатываются приложения дифференциальных тождеств и преобразований для нахождения точных решений, доказательства теорем единственности и существования, интегрирования переопределенных систем.

Актуальность. Функция распределения является основным объектом исследования в статистическом моделировании системы многих частиц. Она удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана. Прямые задачи для кинетического уравнения заключаются в определении функции распределения при заданных дополнительных данных, например, для уравнения переноса — плотности падающего на среду потока при всех известных коэффициентах. Обратные задачи, как правило, состоят в одновременном определении решения прямой задачи и какого-нибудь коэффициента либо правой части уравнения по условиям, составляющим прямую задачу, и некоторому дополнительному условию, которое называется условием переопределения.

Изучение обратных задач для уравнения переноса началось с работ Г.И. Марчука (1964), посвященных постановке и обсуждению одной обратной задачи в плоскопараллельном случае. М.В. Масленников (1968) рассмотрел стационарное односкоростное уравнение переноса в полупространстве и исследовал обратную задачу о восстановлении индикатрисы рассеяния по угловому распределению излучения в глубине слоя. В книгах Р. Беллман и Р. Калаба (1968), Р. Латтес и Ж.-Л. Лионс (1970) обратные задачи для уравнения переноса рассматриваются с точки зрения получения численных результатов.

Для уравнения переноса данными для обратной задачи, например, являются начальное условие, условие нулевого входящего потока и финальное определение. Для уравнения, учитывающего зависимость от времени, постановки и обсуждения обратных задач имеются в работах А.И. Прилепко, А.Л. Иванкова, Н.П. Волкова, И.В. Тихонова. Они, в частности, доказали теоремы существования и единственности решения обратных задач для уравнения переноса в предположении, что диаметр рассматриваемой области достаточно мал (диаметр оценивается через данные задачи). См. также работы А.Х. Амирова, Д.С. Аниконова, Ю.Е. Аниконова, В.Г. Бардакова, А.Н. Бондаренко, В.Г. Васильева, С.И. Кабанихина, В.Р. Кирейтова, А.Е. Ковтанюка, А.С. Компанеец, М.М. Лаврентьева, Л.Н. Пестова, И.В. Прохорова, В.Г. Романова, У.М. Султангазина, С.П. Шишатского, В.А. Шарафутдинова и др.

Один из методов доказательства теоремы единственности обратной задачи состоит в использовании дифференциальных тождеств специального вида, справедливых для решений рассматриваемого класса уравнений. В работах Р.Г. Мухометова (1977), В.Г. Романова (1978), М.М. Лаврентьева (1967), Ю.Е. Аниконова (1967, 1983), А.Х. Амирова (1983), Л.Н. Пестова (1985), Л.Б. Вертгейма (1991), В.А. Шарафутдинова и G. Uhlmann (2000), В.Г. Бардакова (2002) для кинетических уравнений было установлено существование дифференциальных тождеств специального вида и исследованы вопросы единственности, существования и устойчивости решения, соответствующих обратных задач.

Метод дифференциальных тождеств, частным случаем которого является, например, метод сопряженных уравнений, основанный на тождестве Лагранжа, широко используется также в задачах оптимального управления, линейных и нелинейных задачах математической физики: теории малых возмущений в спектральных задачах и т.д. Метод дифференциальных тождеств позволяет по информации в обратной кинематической задаче восстановить строение метрики (см. работы Ю.Е. Аниконова, Л.Н. Пестова, А.Г. Меграбова, А.В. Боровских).

В связи с этим направлением в теории обратных задач является актуальным развитие единого подхода к получению дифференциальных тождеств с применением алгебраических конструкций и их использование для доказательства теорем единственности, существования, получения оценок решений и коэффициентов уравнений математической физики (в частности, кинетических уравнений).

Обратные задачи обычно приводят к операторным уравнениям 1-го рода, часто интегральным. Некоторые из них редуцируются к интегральным уравнениям типа Вольтерра 1-го рода. Это дает, в основном в одномерных обратных задачах, возможность получить уравнение 2-го рода с оператором, обладающим достаточно хорошими свойствами (например, оператором сжатия). Но во многих случаях, особенно в многомерных обратных задачах, когда информация о решениях уравнений задается лишь на части границы рассматриваемой области, сведение обратной задачи к интегральному уравнению 2-го рода часто оказывается невозможным. Одна из причин этого — некорректность таких задач. Подобные вопросы требуют новых подходов. Общая теория операторных уравнений 1-го рода и их приложений разработана в работах А.Н. Тихонова, В.К. Иванова, М.М. Лаврентьева, В.Я. Арсенина, В.А. Морозова, Р. Латтеса, Ж.Л. Лионса, А.М. Денисова, А. Лоренци и др.

В работах Ю.Е.Аниконова (1972) разработан общий подход к доказательству теорем единственности для операторных уравнений первого рода на основе понятия квазимонотонного оператора. Неявно этот подход использовался в работе А.Н. Тихонова (1949) для доказательства единственности решения одномерной обратной задачи электроразведки. В многомерном случае его применил Ю.М. Березанский (1958) при доказательстве единственности решения обратной задачи для уравнения Шредингера в классе кусочно-аналитических функций.

Представляет значительный интерес распространение данных методов на более широкие классы уравнений, обладающие, вообще говоря, некоторой дополнительной структурой. Так теорема единственности для уравнений Вольтерра 1-го рода в классе аналитических функций над полем комплексных чисел была доказана в работе Ю.Е. Аниконова (1980). Аналогичный результат над телом кватернионов получил О.Н. Смирнов (1993).

Аналитические и конструктивные методы исследования позволяют не только доказывать существование решения исследуемой задачи, но часто приводят либо к конструктивному построению решения, либо к некоторому приближенному выражению для него. К этому направлению относится построение функционально-инвариантных решений гиперболических уравнений (С.Л. Соболев (1934), см. также работы Н.П. Еругина, М.М. Смирнова, М.С. Шнеерсона, Л.М. Галонена, А.П. Киселева и др.), аналитические представления решений и коэффициентов параболических уравнений (А.Н. Колмогоров (1938)), представление решения и коэффициента уравнения Штурма-Лиувилля с применением в обратных задачах теории рассеяния (см. В.А. Юрко (2007), В.Г. Романов (1984)), построение гармонических и других потенциалов для вычисления решений (скорости) и коэффициентов (давления) системы уравнений газовой динамики и т.п. (см. Г.И. Марчук (1989), Д.И. Блохинцев (1964), М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат (1977), Ю.Е. Аниконов (1997, 2008)).

Представление решений дифференциальных уравнений в виде $w = F(U(x,t))$, где $F(U)$ периодическая функция, а $U(x,t)$ — фазовая функция, широко используется при изучении нелинейных уравнений (см. Нелинейные волны. Москва: Мир, 1977 г.). Представление решения в виде $w = F(U)$, где $U = x - vt$, использовано в классической работе А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, Н.С. Пискунова (1937) для качественного исследования модели типа реакция-диффузия и широко используется в математической биологии. Отметим также построение точных решений нелинейных систем эллиптических уравнений в виде $w_j(x) = F_j(v(x))$, $j = 1, ..., m$, где $x = (x_1, ..., x_n)$, $v(x)$ — произвольная гармоническая функция, а вектор $F(s) = (F_1, ..., F_m)$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1982) В книге Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982. для решения уравнения теплопроводности получена формула, которая используется для решения обратной задачи — нахождения неизвестного коэффициента.

В задачах идентификации динамических систем также предпочтительно иметь явные формулы для решений, содержащие параметры, которые нужно конкретизировать (см. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991). Для многомерных обратных задач также желательно иметь представления решений и коэффициентов дифференциальных уравнений, которые содержали бы произвольные функции одного или многих переменных. Исходя из сказанного, круг задач, связанных с поиском новых представлений решений и коэффициентов уравнений математической физики, построением многомерных аналогов классических дифференциально-алгебраических преобразований и их использованием для построения решений и коэффициентов уравнений математической физики с учетом начально-краевой информации, нелинейных задачах управления перевода субстанции из одного состояния в другое при наличии краевой информации, является важным и актуальным.

Все вышеперечисленные вопросы непосредственно связаны с преобразованием дифференциальных уравнений. Классическими примерами таких преобразований являются преобразования Эйлера-Дарбу, преобразования Бэклунда, преобразование Мутара, преобразование Хопфа-Коула, итерационный метод Лапласа, известный также как каскадный метод Лапласа и т.п. (См., например, Капцов О.В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 и имеющуюся там литературу). Сюда же относятся вопросы связанные с групповыми свойствами дифференциальных уравнений (см., например, Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978) и методы построения решений на основе дополнительных дифференциальных связей (Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984).

Групповой анализ дифференциальных уравнений является одним из наиболее мощных и универсальных методов отыскания широких классов точных решений дифференциальных уравнений произвольного вида. Особенно эффективны его приложения в механике сплошных сред и математической физике, поскольку в математические модели, как правило, изначально заложены свойства инвариантности относительно некоторой группы преобразований. К сфере приложений теории группового анализа дифференциальных уравнений относится групповая классификация краевых и обратных задач математической физики, задачи связанные с классификацией законов сохранения и изучением их алгебраической структуры.

Классические результаты использования законов сохранения связаны с построением априорных оценок, доказательством теорем существования и единственности, получением физических величин, сохраняющихся с течением времени, обоснованием условий на разрывы для решений гиперболических систем, содержащих ударные волны, вопросами устойчивости и т.д. В вычислительной математике законы сохранения широко используются для контроля результатов вычислений. Для уравнений, возникающих при решении вариационных задач, законы сохранения удается получить на основе допускаемой ими группы: Э. Нетер (1918), Л.В. Овсянников (1980), Н.Х. Ибрагимов (1969), Р.С. Хамитова (1982), П. Олвер (1989). Вопросы поиска законов сохранения для вариационных моделей тесно связаны с обратной задачей вариационного исчисления: В.М. Филиппов, В.М. Савчин, С.Г. Шорохов (1992). Высшие симметрии и законы сохранения (А.М. Виноградов, И.С. Красильщик (2005), Н.Х. Ибрагимов, А.Б. Шабат (1980), П. Олвер (1989)) являются важными внутренними свойствами уравнения. Они полезны как при построении точных решений, так и для качественного понимания поведения решений в целом. С надлежащими уточнениями наличие высших симметрий и законов сохранения может быть принято за определение интегрируемости. Представляют интерес задачи поиска законов сохранения для уравнений не имеющих вариационной природы (данное направление активно развивается школой Н.Х. Ибрагимова, см. также работы А.Н. Кусюмова).

В настоящее время активно разрабатываются новые алгебро-геометрические методы интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений и систем (система Дарбу-Егорова, системы кратных волн, система Гаусса-Ламе, система ассоциативности, уравнения Эйлера на алгебрах Ли, уравнения Эйнштейна, система движения сплошной среды со специальной термодинамикой, уравнений пластичности и др.), возникающих на стыке математической физики и дифференциальной и алгебраической геометрии. Как правило, это переопределенные систем дифференциальных уравнений в частных производных, для которых известны только некоторые частные решения, не говоря о том, что далеко не все они приведены в инволюцию (в смысле теории переопределенных систем).

Актуальны задачи связанные с групповыми свойствами дифференциальных уравнений, построением точных решений, разработкой теории и аппарата инвариантных, частично-инвариантных и дифференциально-инвариантных решений, интегрированием нелинейных систем дифференциальных уравнений в многомерном случае, когда не работают приемы существенно использующие маломерность систем. В то же время представляют интерес вопросы, связанные с групповой классификацией дифференциальных уравнений относительно касательных и дискретных преобразований. Здесь имеются как алгебраические вопросы, например, построение соответствующих факторгрупп и факторалгебр и исследование их алгебраических свойств, так и вопросы аналитического использования применительно к теории дифференциальных уравнений.

Цель работы. Разработка аппарата дифференциальных тождеств для кинетических уравнений и его приложений к вопросам единственности решения обратных задач. В частности, построение универсального тождества в классе тождеств квадратичных по первым производным. Исследование вопросов существования решений кинетических уравнений, приложение метода моментов Грэда для построения представления для решений и коэффициентов в классе квазиполиномов.

Разработка аппарата дифференциальных тождеств для обратной кинематической задачи. Построение систем дифференциальных уравнений для метрического тензора и их исследование с точки зрения переопределенных систем, построение классов точных решений.

Разработка алгебраического подхода к исследованию вопросов единственности решения многомерных интегральных уравнений. В частности, для многомерного интегрального уравнения первого рода типа Вольтерра нахождения классов алгебр и классов функций со свойствами единственности решения.

Исследование обратных задач для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа с параметром. Исследование вопросов существования аналитических решений. Построение дифференциально-алгебраических тождеств для дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, разработка аналитических методов теории обратных задач и вопросов конструктивного построения решений и коэффициентов соответствующих уравнений по начально-краевой информации, разработка задачи управления оператором второго порядка.

Исследование групповых свойств уравнений второго порядка и построение решений с функциональным произволом. Нахождение инвариантных, частично-инвариантных решений. Приложение аппарата группового анализа к исследованию обратных и краевых задач. Исследование соответствующих переопределенных систем (вопросы существования, приведения в инволюцию, широты решения). В частности, построение классов точных решений для системы уравнения Максвелла в анизотропной среде, многомерного уравнения Монжа-Ампера, кубического уравнения Шредингера, системы уравнений движения сплошной среды со специальной термодинамикой. Классификация систем уравнений типа реакция-диффузия по законам сохранения. Разработка классических вопросов группового анализа, связанных с построением касательных и дискретных преобразований дифференциальных уравнений в частных производных.

Методы исследования. В диссертации используются методы и аппарат:

– классической и дифференциальной алгебры;

– теории переопределенных систем дифференциальных уравнений с частными производными (в частности, аппарат теории Рикье), теории решения задач типа Коши-Ковалевской;

– группового анализа: построение групп Ли непрерывных преобразований и алгебр Ли, построение инвариантных и частично инвариантных решений (в частности, функционально-инвариантных решений), теории дифференциальных инвариантов, групповой классификации решений;

– интегральных преобразований;

– дифференциальной геометрии и тензорного анализа.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и связаны со следующими исследованиями:

— разработка аппарата построения дифференциально-алгебраических тождеств и исследование вопросов единственности и существования решений обратных задач для кинетических и связанных с ним уравнений;

— разработка аналитических методов исследования обратных задач математической физики;

— исследование переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных, связанных с математическими моделями механики сплошных сред, теории поля, квантовой механики и классификацией таких систем по законам сохранения;

— разработка отдельных вопросов группового анализа, связанных с группами касательных и дискретных преобразований, классификацией дифференциально-алгебраических операций.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы могут найти применение в дальнейших исследованиях по уравнениям математической физики, в частности, в вопросах единственности и существования решений обратных задач математической физики, в вопросах связанных с исследованием алгебраических структур для уравнений как в частных производных так и для обыкновенных дифференциальных уравнений. Найденные точные представления для решений и коэффициентов уравнений математической физики могут быть использованы в вопросах моделирования физических процессов. Многие доказанные утверждения в диссертации носят законченный характер и могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов.

Апробация работы. Доклады, основанные на результатах диссертации, сделаны на Втором сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 1996); на Международной конференции, посвященной памяти академика А.Н.Тихонова (Москва, 1996); на II Международной конференции по математическому моделированию (Якутск, 1997); на ИНПРИМ (Новосибирск, 2000); на Конференции молодых ученых СО РАН, посвященной М.А. Лаврентьеву (Новосибирск, 2002); на Третьей международной конференции “Симметрия и дифференциальные уравнения” (Красноярск, 2002) на Девятой международной конференции по современному групповому анализу (Москва, 2002); на Всероссийской конференции, приуроченной к 85-летию академика Л.В.Овсянникова (Новосибирск, 2004); на Международной конференции “Тихонов и современная математика” (Москва, 2006); на Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Н.Векуа (Новосибирск, 2007); на Российской конференции “Математика в современном мире”, посвященной 50-летию Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 2007); на Международной конференции “Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвященной 75-летию академика М.М.Лаврентьева (Новосибирск, 2007); на Международной конференции посвященной 100-летию со дня рождения С.Л.Соболева (Новосибирск, 2008); на Всероссийской конференции “Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение”, приуроченной к 90-летию академика Л.В.Овсянникова (Новосибирск, 2009); на Конференции “Современные проблемы анализа и геометрии” (Новосибирск, 2009); на Международной конференции “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике”, посвященной 110-летию академика М.А.Лаврентьева (Новосибирск, 2010).

Результаты работы докладывались на следующих научных семинарах:

“Групповой анализ дифференциальных уравнений”, ИГиЛ СО РАН, Новосибирск (рук. академик РАН Л.В.Овсянников и проф. А.П.Чупахин); “Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики”, ИМ СО РАН, Новосибирск (рук. проф. А.М.Блохин); “Избранные вопросы математического анализа”, ИМ СО РАН, Новосибирск (рук. проф. Г.В.Демиденко); “Геометрия, топология и их приложения”, ИМ СО РАН, Новосибирск (рук. академик РАН И.А.Тайманов); “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы анализа”, ИМ СО РАН, Новосибирск (рук. проф. В.С.Белоносов и проф. М.В.Фокин); “Обратные задачи математической физики”, ИМ СО РАН, Новосибирск (рук. проф. Ю.Е.Аниконов); семинаре отдела условно-корректных задач, ИМ СО РАН, Новосибирск (рук. член-корр. РАН В.Г.Романов); “Общеинститутский математический семинар” ИМ СО РАН, Новосибирск (рук. академик РАН Ю.Г.Решетняк); семинаре кафедры дифференциальных уравнений МГУ, Москва (рук. проф. Е.В.Радкевич).

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127).

Публикации. По теме диссертации опубликована 41 работа, в том числе 37 работ в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертации. Часть работ выполнена в соавторстве [19, 23, 24, 29, 30–33, 35, 37–39, 41]. Вклад автора одинаков с вкладом соавторов.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 272 страницах, состоит из введения, трех глав, разбитых на 23 параграфа, заключения и списка литературы из 334 наименований.

Содержание работы

Во введении приведен обзор литературы по теме диссертации, дана общая характеристика работы, обоснована актуальность темы исследований, указаны цель работы и новизна полученных результатов, представлено краткое содержание диссертационной работы.

В главе 1 для кинетического уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial w}{\partial x^i} = \lambda, \tag{1}$$

где $\overline{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ — набор переменных, $w = w(\overline{x})$, $\lambda = \lambda(\overline{x})$, $A^i = A^i(\overline{x})$, $i = 1, \ldots, n$ рассматривается следующая обратная задача:

Найти функции $w(\overline{x})$, $\lambda(\overline{x})$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если известна функция $w_0 = w|_\Gamma$, где Γ — граница области Ω.

Как правило, функция $\lambda(\overline{x})$ удовлетворяет дополнительному соотношению. Например, не зависит от части переменных или является решением некоторого дифференциального уравнения.

Один из методов доказательства теорем единственности состоит в использовании дифференциальных тождеств. Причем тождество должно учитывать как специфику рассматриваемого уравнения, так и геометрию области Ω. Искомые тождества для уравнения (1) можно условно представить в виде трех слагаемых:

$$K + L + D = 0,$$

где 1) слагаемое K зависит от $\overline{x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, знакопостоянно в области Ω и обращается в нуль если, и только если все $\dfrac{\partial w}{\partial x^i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$; 2) слагаемое L обращается в нуль в области Ω, в силу условий на правую часть λ; 3) слагаемое D при интегрировании по области Ω обращается в нуль.

В работах автора [13, 14, 36] установлено, что имеет место алгебраическое тождество для модуля дифференцирований ассоциативного коммутативного кольца.

Теорема 1.1.1. *Пусть L — ассоциативное коммутативное кольцо и*

1) A_k, $k = 1, \ldots, a$; B_i, $i = 1, \ldots, b$; C_j, $j = 1, \ldots, c$; $a, b, c \in \mathbb{N}$, — *произвольные дифференцирования кольца L;*

2) g^{ij}, w, θ^k, $k = 1, \ldots, a$; $i = 1, \ldots, b$; $j = 1, \ldots, c$ — *некоторые элементы кольца L;*

3) *элемент $\lambda \in L$ определен равенством $\lambda = \theta^k A_k(w)$.*

Тогда имеет место тождество

$$\begin{gathered}
2g^{ij}B_i(w)C_j(\lambda) = \left(g^{ij}C_j(\theta^k) - C_j(g^{ij})\theta^k\right)A_k(w)B_i(w) - \\
-A_k(g^{ij}\theta^k)B_i(w)C_j(w) + B_i(g^{ij}\theta^k)A_k(w)C_j(w) + \\
+g^{ij}\theta^k\left\{B_i(w)\left[C_j, A_k\right](w) - C_j(w)\left[A_k, B_i\right](w) + A_k(w)\left[B_i, C_j\right](w)\right\} + \\
+A_k\left(g^{ij}\theta^k B_i(w)C_j(w)\right) - B_i\left(g^{ij}\theta^k A_k(w)C_j(w)\right) + C_j\left(g^{ij}\theta^k A_k(w)B_i(w)\right),
\end{gathered} \tag{2}$$

где $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор дифференциальных операторов.

(Нумерация теорем в автореферате соответствует номеру теоремы в параграфе. Например, теорема 1.2.3 — теорема с номером 3 в параграфе 1.2.)

В дальнейших приложениях алгебра L — алгебра функций, определенных на некотором многообразии M, а дифференциальные операторы — векторные поля. Возможно получение тождеств для систем кинетических уравнений. Можно рассматривать суммы операторов дифференцирования и умножения на элементы кольца (или более общо линейные операторы), что является аналогом калибровочных преобразований или введением связности.

Из тождества (2) получаются тождества найденные в работах Р.Г. Мухометова (1977), В.Г. Романова (1978), Л.Б. Вертгейма (1991), Ю.Е. Аниконова (1978, 1983), А.Х. Амирова (1983), Л.Н. Пестова (1985), В.А. Шарафутдинова, Г. Ульмана (2000).

Если кольцо L — кольцо гладких функций и $A_i = B_i = C_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, $a = b = c = n$, то справедливо уточнение теоремы 1.1.1.

Теорема 1.1.2. *Для произвольного решения* $w = w(\overline{x})$, $\overline{x} = (x^1, \dots, x^n)$ *уравнения*

$$\lambda = \theta^i \frac{\partial w}{\partial x^i},$$

где $\theta^i = \theta^i(\overline{x})$, $i = 1, \dots, n$, и $\lambda = \lambda(\overline{x})$ *имеет место тождество*

$$g^{ij} \frac{\partial w}{\partial x^i} \frac{\partial w}{\partial x^j} = -w \left(a^{ij} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^i \partial x^j} + a^i \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(w C^{ij} \frac{\partial \lambda}{\partial x^j} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Q^{ijk} \frac{\partial w}{\partial x^j} \frac{\partial w}{\partial x^k} \right) \qquad (3)$$

для некоторых функций $g^{ij}(\overline{x})$, $a^{ij}(\overline{x})$, $a^i(\overline{x})$, $C^{ij}(\overline{x})$, $Q^{ijk}(\overline{x})$, $i, j, k = 1, \dots, n$ *тогда и только тогда, когда*

$$a^{ij} = C^{ij}, \;\; a^i = \frac{\partial C^{ij}}{\partial x^j}, \;\; g^{(ij)} = C^{(i|k|} \frac{\partial}{\partial x^k} \theta^{j)} + \frac{\partial}{\partial x^k} Q^{k(ij)}, \;\; 2Q^{k(ij)} = \theta^i C^{[kj]} + \theta^j C^{[ki]} - \theta^k C^{(ij)}.$$

Здесь скобки ( ) *и* [ ] *в верхних индексах обозначают симметрирование и альтернирование, а* | | *используется для исключения индекса из-под действия этих операций.*

Фактически теорема 1.1.2 утверждает, что существуют свободные параметры C^{ij}, θ^k, через которые вычисляются все оставшиеся коэффициенты g^{ij}, a^{ij}, a^i, Q^{ijk}.

В параграфе 1.2 изучаются свойства найденных тождеств и рассматриваются возможные приложения.

Следующая теорема утверждает, что квадратичная форма тождества (3) может быть достаточно произвольной.

Теорема 1.2.1. *Пусть* g^{ij}, $i, j = 1, ..., n$ — *произвольные заданные функции от переменных* $x^1, ..., x^n$, *причем* $g^{ij} = g^{ji}$ и $g^{11} = 0$.

Определим функции $\theta^2, ..., \theta^n$, C^{ij}, $i \neq j = 1, ..., n$ *из системы*

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \theta^i = \frac{1}{C^{i1}} \left(g^{ii} - \sum_{k \geq 2} C^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \theta^i \right), \;\; i = 2, ..., n,$$

$$\frac{\partial C^{ij}}{\partial x^1} = \frac{C^{i1}}{C^{j1}} \left(g^{jj} - \sum_{k \geq 2} C^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \theta^j \right) + \frac{C^{j1}}{C^{i1}} \left(g^{ii} - \sum_{k \geq 2} C^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \theta^i \right) +$$
$$\sum_{k \geq 2} \left(C^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \theta^j + C^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \theta^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(C^{ij} \theta^k \right) \right) - 2g^{ij}, \;\; i, j = 2, ..., n,$$

$$\frac{\partial C^{1j}}{\partial x^1} = \sum_{k \geq 2} \left(C^{1k} \frac{\partial}{\partial x^k} \theta^j - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(C^{1j} \theta^k \right) \right) - 2g^{1j}, \;\; j = 2, ..., n,$$

типа Коши-Ковалевской. Функции C^{ii}, $i = 1, ..., n$, *положим равными нулю. Тогда для уравнения*

$$\frac{\partial w}{\partial x^1} + \sum_{k \geq 2} \theta^k \frac{\partial w}{\partial x^k} = \lambda,$$

имеет место тождество (3) *с квадратичной формой* g^{ij}. *Если начальные данные для функций* C^{ij} *при* $x^1 = x^1_0$ *выбрать симметричными по индексам* i, j, *то из вида системы следует, что* $C^{ij} = C^{ji}$ *при всех* i, j.

Также в параграфе 1.2 установлено существование тождеств для кинетических уравнений на многообразии со связностью и для уравнений, содержащих дополнительные слагаемые вида θw. В качестве приложений рассмотрены вопросы единственности решения соответствующей обратной задачи для уравнения, заданного скобкой Якоби и для уравнения, заданного скобкой Пуассона с дополнительным слагаемым вида θw.

В параграфе 1.3 рассматривается кинетическое уравнение Больцмана-Власова

$$\frac{\partial w}{\partial t} + < \overline{p}, \frac{\partial w}{\partial \overline{x}} > + < \overline{E} + \overline{p} \times \overline{B}, \frac{\partial w}{\partial \overline{p}} >= \lambda. \tag{4}$$

Здесь t — временная переменная, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — пространственные переменные, $\overline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ — импульсы, $\overline{E}(t, \overline{x}) = (E_1, E_2, E_3)$, $\overline{B}(t, \overline{x}) = (B_1, B_2, B_3)$ — векторы электрической и магнитной напряженности, $w = w(t, \overline{x}, \overline{p})$ — функция плотности распределения частиц, $\lambda = \lambda(t, \overline{x}, \overline{p})$ — интеграл столкновения.

Для уравнения (4) получено тождество вида (3) и при некоторых дополнительных предположенях на векторы $\overline{B}$, $\overline{E}$ и правую часть λ устанавливается единственность решения следующей обратной задачи:

Обратная задача: в области

$$Q = \left\{(t, \overline{x}, \overline{p}) | |t - t^0| < b, |x_i - x_i^0| < a_i, |p_i - p_i^0| < b_i, i = 1, 2, 3\right\}, \tag{5}$$

где $x_i^0, p_i^0, a_i, b_i, i = 1, 2, 3, b, t^0$ — фиксированные вещественные числа, найти функции $w = (t, \overline{x}, \overline{p})$, $\lambda = \lambda(t, \overline{x}, \overline{p})$, если задано электромагнитное поле $(\overline{B}, \overline{E})$ в области Q и известен след функции w на границе Γ области Q, т.е. $w|_\Gamma = w_0(t, \overline{x}, \overline{p})$, $(t, \overline{x}, \overline{p}) \in \Gamma$, где w_0 — известная функция.

Теорема 1.4.2. *Если в области Q функция $\lambda = \lambda(t, \overline{x}, \overline{p})$ удовлетворяет уравнению $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial p_i} = 0$ и квадратичная форма*

$$\sum_{i=1}^{3} (y_i)^2 + \left(\overline{B}, \overline{z}, \overline{y}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \frac{\partial E_i}{\partial x_j}\right) z_i z_j + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{p} \times \overline{B}\right)_j z_i z_j$$

положительно определена, то обратная задача (5) *имеет не более одного решения* $w = w(t, \overline{x}, \overline{p})$, $\lambda = \lambda(t, \overline{x}, \overline{p})$.

В частности, утверждение теоремы справедливо в следующих случаях:

1. *Матрица* $J = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} + \frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)$ *положительно определена и*

$$\left| \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{p} \times \overline{B}\right)_j z_i z_j + \left(\overline{B}, \overline{z}, \overline{y}\right) \right| < \mu_0 |\overline{z}|^2 + |\overline{y}|^2,$$

где μ_0 — минимальное собственное число матрицы J в области Q. (*Отметим, что если $\overline{B}$ — постоянный вектор, то данное неравенство принимает вид* $\left|\left(\overline{B}, \overline{z}, \overline{y}\right)\right| < \mu_0 |\overline{y}|^2 + |\overline{z}|^2$.)

2. *Вектор* $\overline{B} = 0$ *и матрица* J *положительно определена* (*отметим, что если поле* $\overline{E}$ *потенциально, т.е.* $\overline{E} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}}$ *и* $d^2\varphi > 0$ *в области* Q, *для некоторой функции* $\varphi = \varphi(t, \overline{x})$, *то* J *положительно определена*).

Доказан также локальный вариант (по времени t) этой теоремы при более слабых ограничениях на векторы $\overline{B}$ и $\overline{E}$ и более общем уравнении на правую часть λ. Область Q можно рассматривать более общего вида

$$Q = \{(t, \overline{x}, \overline{p}) | |t - t_0| < b, \overline{x} \in D_1, \overline{p} \in D_2\},$$

где D_1, D_2 — области в пространствах $\mathbb{R}^3(\overline{x})$, $\mathbb{R}^3(\overline{p})$ соответственно, и утверждение теорем останется справедливым.

Результаты параграфа 1.3 опубликованы в работах [10, 12, 22].

Один из возможных путей решения уравнения (4) основан на методе моментов Грэда. В параграфе 1.4 рассмотрена задача о нахождении точных представлений для решения w и коэффициентов λ, $\overline{B}$, $\overline{E}$ уравнения (4) на основе следующего представления для функций w и λ:

$$w = e^{-|\overline{p}|^2} \sum_{n=0}^{N} A_n, \quad A_n = \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} p_1^i p_2^j p_3^k,$$

$$\lambda = e^{-|\overline{p}|^2} \sum_{n=0}^{N+1} \Lambda_n, \quad \Lambda_n = \sum_{i+j+k=n} b_{ijk} p_1^i p_2^j p_3^k,$$

где $|\overline{p}|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, коэффициенты a_{ijk}, b_{ijk} — аналитические функции от переменных t, $\overline{x}$, N — фиксированное натуральное число ≥ 1. Показано, что если часть коэффициентов b_{ijk} в представлении для функции λ фиксировать, то все оставшиеся коэффициенты функции λ, все коэффициенты a_{ijk} в представлении функции w и векторы $\overline{B}$, $\overline{E}$ определяются однозначно из решения системы типа Коши–Ковалевской.

Результаты параграфа 1.4 опубликованы в работах [9, 15].

В параграфе 1.5 рассматривается обратная задача для приближенного квантового кинетического уравнения. Квантовое кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial w}{\partial x_j} -$$

$$- \frac{i}{(2\pi)^n \hbar} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\Phi\left(x - \frac{\hbar}{2} y, t\right) - \Phi\left(x + \frac{\hbar}{2} y, t\right)\right) e^{iy(p' - p)} w(x, p', t) dy dp' = \lambda(x, p, t), \quad (6)$$

где $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, D — область с гладкой границей ∂D вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $\Phi(x, t)$ — потенциал, $w(x, p, t)$ — квантовая функция распределения — функция Вигнера, $\lambda(x, p, t)$ — функция источников, возможно функционально-интегрально зависящая от w при наличии столкновительных явлений, $\hbar$ — постоянная Планка.

Предполагая наличие всех производных функций $w(x,p,t)$, $\Phi(x,t)$, разложением подынтегрального выражения уравнения (6) в ряд Тейлора по $\hbar$ получают дифференциальное уравнение бесконечного порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m a_m\sum_{j_1,\ldots,j_{2m-1}=1}^{n}\frac{\partial^{2m-1}w}{\partial p_{j_1}\ldots\partial p_{j_{2m-1}}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_{2m-1}}}=\lambda(x,p,t),\quad (7)$$

где $a_m=\dfrac{\hbar^{2m-2}}{(2m-1)!2^{2m-2}}$. Конечные приближения уравнения, в том числе и классические ($N=1$), следуют из (7) стандартным способом — отбрасыванием бесконечного числа слагаемых:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}+\sum_{m=1}^{N}(-1)^m a_m\sum_{j_1,\ldots,j_{2m-1}=1}^{n}\frac{\partial^{2m-1}w}{\partial p_{j_1}\ldots\partial p_{j_{2m-1}}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_{2m-1}}}=\lambda(x,p,t),\quad (8)$$

Специфика уравнения (8) позволяет получить тождество, на основе которого исследуются вопросы единственности и устойчивости решения обратных задач для уравнения (8), в частности, задачи поиска функций $w(x,p,t)$, $\lambda(x,p,t)$ при некоторых ограничениях на $\lambda(x,p,t)$. Это тождество, также как и в ранее известном случае при $N=1$, содержит дивергентные слагаемые (которые исчезают при интегрировании в вопросах единственности решения) и формы четных степеней относительно частных производных функции $w(x,p,t)$. При ограничении на потенциал типа выпуклости эти формы оказываются положительно определенными, что и приводит к единственности решения обратной задачи.

Справедлива

Лемма 1.5.2. *Имеет место тождество*

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}+\sum_{m=1}^{N}(-1)^m a_m\sum_{j_1,\ldots,j_{2m-1}=1}^{n}\frac{\partial^{2m-1}w}{\partial p_{j_1}\ldots\partial p_{j_{2m-1}}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_{2m-1}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}|\mathrm{grad}_x w|^2-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}a_m\sum_{j_1,\ldots,j_{2m}=1}^{n}\frac{\partial^m w}{\partial p_{j_1}\ldots\partial p_{j_m}}\frac{\partial^m w}{\partial p_{j_{m+1}}\ldots\partial p_{j_{2m}}}\frac{\partial^{2m}\Phi}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_{2m}}}+\mathrm{div},$$

где $|\mathrm{grad}_x w|^2=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2$ *и под* div *понимаются дивергентные слагаемые по переменным* x, p, t.

Обратная задача определения правой части.

Рассмотрим обратную задачу поиска бесконечно дифференцируемых функций $w(x,p,t)$, $\lambda(x,p,t)$, $x\in D\subset\mathbb{R}^n$, $p\in\widetilde{D}\subset\mathbb{R}^n$, $0\le t\le T$ таких, что

1)

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}+\sum_{m=1}^{N}(-1)^m a_m\sum_{j_1,\ldots,j_{2m-1}=1}^{n}\frac{\partial^{2m-1}w}{\partial p_{j_1}\ldots\partial p_{j_{2m-1}}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_{2m-1}}}=\lambda(x,p,t),$$

2) $w|_{\partial D}=v(s,p,t),\ \ s\in\partial D,\ w|_{t=0}=w_0(x,p),\ \ w|_{t=T}=w_T(x,p),$

3) $D_p^\alpha w|_{\partial\widetilde{D}} = w_\alpha(x, s', t)$, $s' \in \partial\widetilde{D}$, $|\alpha| \le N-1$,
где D_p^α — дифференцирование по переменным p, α — мультииндекс.

Теорема 1.5.1. *Если* $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial p_j \partial x_j} = 0$ *и квадратичные формы*

$$-\sum_{j_1,\dots,j_{2m}=1}^{n} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_1}\dots\partial p_{j_m}} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_{m+1}}\dots\partial p_{j_{2m}}} \frac{\partial^{2m}\Phi}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{2m}}}$$

положительно определены, $m = 1, \dots, N$, *то обратная задача* 1)-3) *поиска функций* $w(x,p,t)$, $\lambda(x,p,t)$ *в области* $\Omega = D \times \widetilde{D} \times [0,T]$ *имеет не более одного бесконечно дифференцируемого решения* $(w(x,p,t), \lambda(x,p,t))$ *в замыкании* $\overline{\Omega}$.

Также в параграфе рассмотрена обратная задача восстановления потенциала и доказана теорема единственности. Получены результаты существования решений обратных задач, при условии, что данные обратной задачи есть квазиполиномы.

Результаты параграфа 1.5 опубликованы в работах [19, 23, 35].

В параграфе 1.6 изучается математическая модель этноса, предложенная в работе Ю.Е.Аниконова (1995), на основе уравнения

$$P * W + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,p) \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} * \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial W}{\partial p_i} * \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0, \tag{9}$$

где $\overline{y} = (\overline{y}', t)$, $\overline{y}' \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $n \ge 1$ — координаты пространство–время, (x,p), $x \in \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^m$ — координаты, связанные с пассионарностью, x – потенциальная возможность особи к активным действиям; p – пассионарный импульс, $W(x,p,\overline{y})$ — плотность распределения особей данного этноса в пространстве $\mathbb{R}^{2m+n+1}$ переменных $(x,p,\overline{y})$, $H(x,p,\overline{y})$ — биохимическая энергия, определяющая пассионарное поле, $P(x,p,\overline{y})$ — закон, по которому живет этнос: появление, исчезновение, перемещение особей в пространстве, $*$ обозначает свертку по пространственно-временной переменной $\overline{y} = (\overline{y}', t)$:

$$P * W = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} P(x,p,\overline{y} - \overline{q}) W(x,p,\overline{q}) \mathrm{d}\overline{q}.$$

Найдены классы точных решений уравнения (9). Рассматриваются задачи определения параметров этих решений по функции энергии и краевой информации. Во второй части приводится система уравнений, охватывающая взаимодействие нескольких этносов (суперэтноса), и находятся некоторые ее решения. В заключительной части параграфа рассмотрена задача представления решения и символов операторов эволюционного уравнения.

Результаты параграфа 1.6 опубликованы в работах [2, 29, 30].

В параграфе 1.7 рассматривается задача определения структуры риманова многообразия. Для достаточно произвольного риманова многообразия с краем получены дифференциальные соотношения на метрику и годограф, которые выполняются или нет одновременно. Данные результаты применимы к исследованию обратной кинематической задачи.

Пусть (M, g) — компактное n – мерное риманово многообразие с непустым краем ∂M, g — метрика. Будем далее предполагать риманово многообразие M простым, то есть любые две точки $y, z \in M$ соединяются единственной геодезической $\gamma(y, z)$, все точки которой, за исключением быть может точек y, z, принадлежат дополнению $M \setminus \partial M$ и которая гладко зависит от концов y, z. Функция

$$w(y, z) = \int_{\gamma(y,z)} ds, \tag{10}$$

где y, z — произвольные точки многообразия M, s — натуральный параметр вдоль геодезической $\gamma(y, z)$, называется годографом метрики g.

Обратная задача определения метрики по годографу ставиться следующим образом: Известна функция $w(y, z)$ для любых точек $y, z \in \partial M$. Найти метрику $g(x)$, $x \in M$.

Если $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное евклидово пространство переменных $x = (x^1, ..., x^n)$, M — компактная область в $\mathbb{R}^n$ с конформно-евклидовой метрикой $ds^2 = \lambda^2 |dx|^2$, где $\lambda(x) > 0$ — некоторая достаточно гладкая функция, то рассматриваемая задача определения $\lambda(x)$ называется обратной кинематической задачей.

В работах Ю.Е. Аниконова (1973, 1978), Р.Г. Мухометова (1977), В.Г. Романова (1978) приведены теоремы единственности и устойчивости решения обратной кинематической задачи, а также теоремы единственности и устойчивости решения общей задачи определения метрики. В работах Ю.Е. Аниконова (1973–1990), Л.Н. Пестова (1982, 2003) получены оценки для дифференциальных выражений, содержащих решение $\lambda(x)$, через дифференциальные соотношения для исходной информации, тем самым внесен конструктивный элемент исследования поставленной задачи.

В данном параграфе получены дифференциальные соотношения на метрику $g(x)$, $x \in M$, и годограф $w(y, z)$, $y, z \in \partial M$, которые выполняются или нет одновременно. Метрика $g(x)$ имеет произвольный вид.

Напомним некоторые понятия тензорного анализа. Пусть $u = (u_{i_1 \dots i_m})$ — ковариантное тензорное поле ранга m на многообразии M. Тензор u называется симметрическим, если

$$u_{i_1 \dots i_m} = u_{(i_1 \dots i_m)},$$

где круглые скобки обозначают симметрирование по всем индексам содержащимся в них. На симметричных тензорных полях риманова многообразия можно ввести понятие внутреннего дифференцирования d, которое задается формулой

$$(du)_{i_1 \dots i_{m+1}} = u_{(i_1 \dots i_m, i_{m+1})},$$

где запятая в индексах соответствует ковариантной производной в данной метрике. Симметричное тензорное поле $u = (u_{i_1 \dots i_m})$ называется конформно-киллинговым (S. Tachibana (1969)), если выполнено равенство

$$du = \iota v, \tag{11}$$

где v — ковариантное тензорное поле ранга $m-1$, и оператор ι определен равенством

$$(\iota v)_{i_1 \dots i_{m+1}} = g_{(i_1 i_2} v_{i_3 \dots i_{m+1})}.$$

В частности, если $m = 1$, то равенство (11) принимает вид $u_{i,j} + u_{j,i} = vg_{ij}$, где v — функция. По тензорному полю $u = (u_i)$ в этом случае строится конформное преобразование риманова многообразия (M, g). Если $v = 0$, то такие преобразования называются движениями, а поле $u = (u_i)$ называется киллинговым.

Риманово многообразие называется компактным рассеивающим римановым многообразием, если его край является строго выпуклым и отсутствуют геодезические бесконечной длины. Для такого многообразия можно ввести интегральную величину k^+, характеризующую положительные значения секционной кривизны (В.А. Шарафутдинов (1993)).

Фиксируем натуральные $m \geq 1$, $n \geq 2$, конформно-киллингово тензорное поле $u = (u_{i_1 \dots i_m})$ и некоторое тензорное поле $b = (b_{j_1 \dots j_{m-2}})$. При $m = 1$ полагаем $b = 0$. Рассмотрим выражение

$$I_\gamma = u_{i_1 \dots i_m} \frac{dx^{i_1}}{ds} \cdot \dots \cdot \frac{dx^{i_m}}{ds} + b_{j_1 \dots j_{m-2}} \frac{dx^{j_1}}{ds} \cdot \dots \cdot \frac{dx^{j_{m-2}}}{ds}, \tag{12}$$

где γ некоторая геодезическая, s — натуральный параметр. Сформулируем основной результат

Теорема 1.7.1. *Пусть (M, g) — компактное рассеивающее риманово многообразие, причем выполнено ограничение $k^+ < \frac{1}{m+1}$ на секционные кривизны.*

Тогда функция $w(y, z)$, определенная равенством (10), для произвольных $y, z \in \partial\omega$ удовлетворяет соотношению

$$u^{i_1 \dots i_m}(z) \frac{\partial w(y,z)}{\partial z^{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial w(y,z)}{\partial z^{i_m}} - (-1)^m u^{i_1 \dots i_m}(y) \frac{\partial w(y,z)}{\partial y^{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial w(y,z)}{\partial y^{i_m}} +$$

$$+ b^{j_1 \dots j_{m-2}}(z) \frac{\partial w(y,z)}{\partial z^{j_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial w(y,z)}{\partial z^{j_{m-2}}} - (-1)^{m-2} b^{j_1 \dots j_{m-2}}(z) \frac{\partial w(y,z)}{\partial z^{j_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial w(y,z)}{\partial z^{j_{m-2}}} = 0,$$

где $u^{i_1 \dots i_m}$, $b^{j_1 \dots j_{m-2}}$ — контравариантные компоненты тензоров u, b фиксированных в (12), тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$v_{(j_1 \dots j_{m-1})} + b_{(j_1 \dots j_{m-2}, j_{m-1})} = 0, \tag{13}$$

для всех наборов индексов $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{m-1} \leq n$.

Если в соотношениях (13) исключить тензор b, составив условия совместности, то получим систему дифференциальных уравнений на тензор v, т.е. фактически уравнения на метрику g.

Для конформной метрики соотношения для метрики и годографа можно строить на основе алгебры конформных преобразований, что и проделано в параграфе, а также рассмотрены некоторые случаи интегрирования соотношения (13).

Результаты параграфа 1.7 опубликованы в работах [26, 27].

В главе 2 исследования связаны в основном с построением дифференциально-алгебраических тождеств для дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, разработкой аналитических методов теории обратных задач и вопросов конструктивного построения решений и коэффициентов соответствующих уравнений по начально-краевой информации, разработкой задачи управления оператором второго порядка. Также проводится исследование обратных задач для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа с параметром, вопросов существования аналитических решений. Разрабатывается подход к исследованию вопросов единственности решения многомерных интегральных уравнений на основе использования специальных классов алгебр.

В параграфах 2.1, 2.2 приведены новые представления решений и коэффициентов гиперболических и параболических уравнений. Существенно то, что найденные представления имеют функциональный произвол. Это обстоятельство позволяет использовать данные представления при изучении одномерных и многомерных обратных задач, что и проделано в работах [20, 28, 33, 37–39].

В параграфе 2.3 рассматриваются нелинейные задачи управления перевода субстанции из одного состояния в другое при наличии краевой информации. Фактически такого рода задачи управления являются, также как и в линейных случаях, обратными задачами для дифференциальных уравнений. Исследования связаны в основном с поиском дифференциальных операторов 2-го порядка с тремя коэффициентами не зависящими от времени. Предлагаются конструктивные аналитические способы исследования с применением, в частности, формулы Бюрмана-Лагранжа.

Результаты данного параграфа получены в работе [31].

В параграфе 2.4 рассмотрены обратные задачи для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа с параметром. В случае гиперболических и параболических уравнений удается при некоторых ограничениях свести общие линейные обратные задачи к конкретным интегральным уравнениям первого рода типа Абеля с последующим аналитическим продолжением. В случае нелинейных обратных задач для эллиптических уравнений, содержащих параметр, выписаны системы и интегродифференциальные уравнения, не содержащие искомого коэффициента. В одномерном случае сформулирована и доказана теорема существования решения при условии аналитичности.

Результаты данного параграфа получены в работе [41].

В параграфе 2.5 приводятся формулы для производящих функций вероятностных процессов. Эти формулы содержат общие нелинейные отображения линейных пространств в себя и обратные. Используя полученные формулы и групповые свойства, удается наметить путь исследования ряда нелинейных многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений типа управления. При этом существенным моментом является применение теории функциональных уравнений (см. Marek Kuczma (1968)).

Результаты данного параграфа получены в работе [32].

В параграфе 2.6 рассматривается многомерное интегральное уравнение первого рода

$$\int\limits_{B(\overline{z},t)} k(\overline{x},y,\overline{z},t)\lambda(\overline{x},y)\mathrm{d}\overline{x}\mathrm{d}y=\eta(\overline{z},t), \tag{14}$$

где $B(\overline{z},t)$ — полушар радиуса t с центром в $(\overline{z},0)$ в вещественном пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$, т.е.

$$B(\overline{z},t)=\{(\overline{x},y)\in\mathbb{R}^{m+1}\ |\ y\geq 0,\ \ \|(\overline{x}-\overline{z},y)\|\leq t\},$$

$\overline{x}$, $\overline{z} \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$; функции λ, η действуют из $\mathbb{R}^{m+1}$, а ядро k — из $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$ в конечномерную вещественную алгебру L; $\| \xi \|$ — длина вектора ξ. Если $m = 0$, то уравнение (14) — стандартное интегральное уравнение Вольтерра первого рода.

Теорема единственности для уравнения (14) в классе аналитических функций, когда $L = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, была доказана в работе Ю.Е. Аниконова (1980). Требование на аналитичность функции $\lambda(\overline{x}, y)$ существенно. Можно построить пример C^∞–гладкой функции $\lambda(\overline{x}, y)$ и знакопостоянного ядра $k(\overline{x}, y, \overline{z}, t)$ таких, что заключение теоремы перестанет быть верным (Ю.Е. Аниконов (1978)). Для тела кватернионов теорему единственности доказал О.Н. Смирнов (1993). Для произвольной конечномерной вещественной алгебры с делением теорема единственности доказана в работе [16].

Напомним некоторые определения из алгебры (Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1962). Пусть L — некоторая конечномерная алгебра над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Алгебра L называется алгеброй с делением, если уравнение $ax = b$ разрешимо для любых $a \neq 0$ и b из L. Это условие равносильно отсутствию делителей нуля в алгебре (т.е. если в алгебре L выполняется равенство $xy = 0$, то $x = 0$ или $y = 0$). Отметим, что алгебра с делением может иметь размерность только 1, 2, 4, 8 (теорема Адамса).

Если алгебра L, в которой принимают значения функции k, λ не является алгеброй с делением, т.е. она допускает нетривиальные решения уравнения $k\lambda = 0$, то, очевидно, что решение уравнения (14) неединственно. Поэтому условие того, что алгебра L с делением, необходимо.

Основным результатом параграфа является теорема единственности для уравнения (14) в классе функций $\lambda(\overline{x}, y)$, аналитических в области $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^m,\ y \geq 0\}$ и принимающих значения в произвольной конечномерной вещественной алгебре с делением.

Теорема 2.6.1. *Если $k_l(\overline{x}, y, \overline{z}, t)$, $l = 1, \ldots, n$, интегрируемы и знакопостоянны при $0 < y < t$ (т.е. либо строго больше нуля либо строго меньше нуля), то нулевое решение уравнения (14) с нулевой правой частью единственно в классе функций аналитических в верхнем полупространстве $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^m,\ y \geq 0\}$.*

Аналогичная теорема справедлива для аналитического ядра $k(\overline{x}, y, \overline{z}, t)$ по переменным $(\overline{x}, y)$ и знакопостоянного по переменным $(\overline{z}, t)$.

Результаты параграфа 2.6 опубликованы в работах [1, 3, 16].

В главе 3 исследования связаны, в основном, с вопросами изучения групповых свойств дифференциальных уравнений второго порядка и построением инвариантных, частично-инвариантных решений, вопросами исследования переопределенных систем (приведение в инволюцию, широта решения). В частности, построены классы точных решений для системы уравнения Максвелла в анизотропной среде, многомерного уравнения Монжа-Ампера, кубического уравнения Шредингера, системы уравнений движения сплошной среды со специальной термодинамикой. Разрабатываются классические вопросы группового анализа, связанные с построением касательных и дискретных преобразований дифференциальных уравнений в частных производных, классификацией дифференциально-алгебраических операций.

В параграфе 3.1 изучаются групповые свойства уравнения теплопроводности и волнового уравнения с переменным коэффициентом при производной по времени. Находятся локальные преобразования пространства, сохраняющие вид уравнения (локальные преобразования Ли). Результат сформулирован в теоремах 3.1.1 и 3.1.2. Естественно, что преобразования зависят от вида коэффициента. Это позволяет найти коэффициенты, при которых есть нетривиальные преобразования. Рассмотрены некоторые применения полученных результатов к обратным и краевым задачам: в предположении, что симметрии краевого условия продолжаются на все решение, определяется возможный вид коэффициентов и решений уравнения теплопроводности. Результаты данного параграфа получены в работах [4, 5].

В параграфах 3.2, 3.3 приводится частичная классификация систем типа реакция-диффузия по законам сохранения. В качестве приложения приведены примеры построения законов сохранения как для абстрактных систем такого вида, так и для известных моделей встречающихся в литературе (кусочно линейная модель Фитцхью-Нагумо, модель хищник-жертва, брюсселятор, модель химической кинетики). Эти результаты получены в работах [25, 34].

В параграфе 3.4 изучаются групповые свойства системы уравнений Максвелла, а также приводятся новые классы точных решений. Более точно, в первой части параграфа (теорема 3.4.1) приводится полное описание преобразований эквивалентности системы уравнений Максвелла в неоднородной среде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^i}(\varepsilon^{ij}E_j) = \rho, \;\; \dfrac{\partial}{\partial x^i}(\mu^{ij}H_j) = 0, \\ e^{kij}(\dfrac{\partial}{\partial x^i}E_j) + \dfrac{\partial}{\partial x^0}(\mu^{kj}H_j) = 0, \\ e^{kij}(\dfrac{\partial}{\partial x^i}H_j) = \sigma^{kj}E_j + \dfrac{\partial}{\partial x^0}(\varepsilon^{kj}E_j) + J^k, \\ \dfrac{\partial}{\partial x^0}(\varepsilon^{ij}) = \dfrac{\partial}{\partial x^0}(\mu^{ij}) = 0, \end{cases}$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$, (x^1, x^2, x^3) — пространственные переменные, x^0 — временная переменная, $\bar{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\bar{H} = (H_1, H_2, H_3)$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей, $\varepsilon = (\varepsilon^{ij})$, $\mu = (\mu^{ij})$ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости среды, $\sigma = (\sigma^{ij})$ — тензор проводимости, $\bar{J} = (J^1, J^2, J^3)$ — вектор свободных токов, ρ — плотность электрических зарядов, e^{kij} — антисимметричный символ на индексах 1,2,3.

Теорема 3.4.1. *Коэффициенты оператора эквивалентности*

$$V = \eta^p\partial_{x^p} + e_i\partial_{E_i} + h_i\partial_{H_i} + j^k\partial_{J^k} + e^{ij}\partial_{\varepsilon^{ij}} + m^{ij}\partial_{\mu^{ij}} + a\partial_\rho + s^{ij}\partial_{\sigma^{ij}},$$

где $p = 0, 1, 2, 3,$ *имеют следующее представление*

$$\eta^0 = \alpha_0 + \alpha x^0, \;\; \alpha, \alpha_0 = const,$$

η^1, η^2, η^3 — *произвольные функции от переменных* x^1, x^2, x^3,

$$e_i = -\frac{\partial\eta^k}{\partial x^i}E_k, \;\; h_i = -\frac{\partial\eta^k}{\partial x^i}H_k + H_i(T - \alpha),$$

$$e^{ks} = \beta\varepsilon^{ks} + \varepsilon^{is}\frac{\partial\eta^k}{\partial x^i} + \varepsilon^{kj}\frac{\partial\eta^s}{\partial x^j},$$

$$m^{ks} = (2\alpha - \beta - 2\frac{\partial\eta^i}{\partial x^i})\mu^{ks} + \mu^{is}\frac{\partial\eta^k}{\partial x^i} + \mu^{kj}\frac{\partial\eta^s}{\partial x^j},$$

$$a = E_j\varepsilon^{ij}\frac{\partial T}{\partial x^i} + \beta\rho,$$

$$j^k = e^{kij}H_j\frac{\partial T}{\partial x^i} + (\beta - \alpha)J^k + J^s\frac{\partial\eta^k}{\partial x^s} +$$

$$+\sigma^{kj}E_j(\beta - \alpha) + \sigma^{sj}E_j\frac{\partial\eta^k}{\partial x^s} + \sigma^{kj}E_s\frac{\partial\eta^s}{\partial x^j} - s^{kj}E_j,$$

s^{kj} — произвольные функции от всего набора переменных x^p, E_j, H_j, ε^{ij}, μ^{ij}, σ^{ij}, J^k, ρ, β — произвольная функция от переменных x^1, x^2, x^3, и

$$T = \beta + \frac{\partial\eta^i}{\partial x^i}.$$

В частности, если $\varepsilon = \varepsilon_0 I$, $\mu = \mu_0 I$ — скалярные матрицы (I — единичная матрица), $\sigma = 0$, то коэффициенты оператора V имеют следующее представление

$$\eta^0 = \alpha_0 + \alpha_1 x^0, \ \ \alpha_1, \alpha_0 = const,$$

$$e = \varepsilon_0(\beta_0 + \alpha_1),$$

$$m = \mu_0\left(\alpha_1 - 2\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1} - \beta_0\right),$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} h_1 & = & H_1\beta_0 - H_2\frac{\partial\eta^2}{\partial x^1} - H^3\frac{\partial\eta^3}{\partial x^1}, \\ \\ h_2 & = & -H_1\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2} + H_2\beta_0 - H_3\frac{\partial\eta^3}{\partial x^2}, \\ \\ h_3 & = & -H_1\frac{\partial\eta^1}{\partial x^3} - H_2\frac{\partial\eta^2}{\partial x^3} + H_3\beta_0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & -E_1\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1} - E_2\frac{\partial\eta^2}{\partial x^1} - E_3\frac{\partial\eta^3}{\partial x^1}, \\ \\ e_2 & = & -E_1\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2} - E_2\frac{\partial\eta^2}{\partial x^2} - E_3\frac{\partial\eta^3}{\partial x^2}, \\ \\ e_3 & = & -E_1\frac{\partial\eta^1}{\partial x^3} - E_2\frac{\partial\eta^2}{\partial x^3} - E_3\frac{\partial\eta^3}{\partial x^3}, \end{array}\right.$$

где β_0 — произвольная функция от x^1, x^2, x^3,

$$\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1} = \frac{\partial\eta^2}{\partial x^2} = \frac{\partial\eta^3}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2} + \frac{\partial\eta^2}{\partial x^1} = 0, \ \ \frac{\partial\eta^1}{\partial x^3} + \frac{\partial\eta^3}{\partial x^1} = 0, \ \ \frac{\partial\eta^2}{\partial x^3} + \frac{\partial\eta^3}{\partial x^2} = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} j^1 & = & \frac{\partial h_3}{\partial x^2} - \frac{\partial h_2}{\partial x^3} + (\beta_0 - \frac{\partial\eta^1}{\partial x^1})J^1 - J^2\frac{\partial\eta^2}{\partial x^1} - J^3\frac{\partial\eta^3}{\partial x^1}, \\ \\ j^2 & = & \frac{\partial h_1}{\partial x^3} - \frac{\partial h_3}{\partial x^1} - J^1\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2} + (\beta_0 - \frac{\partial\eta^2}{\partial x^2})J^2 - J^3\frac{\partial\eta^3}{\partial x^2}, \\ \\ j^3 & = & \frac{\partial h_2}{\partial x^1} - \frac{\partial h_1}{\partial x^2} - J^1\frac{\partial\eta^1}{\partial x^3} - J^2\frac{\partial\eta^2}{\partial x^3} + (\beta_0 - \frac{\partial\eta^3}{\partial x^3})J^3, \end{array}\right.$$

$$a = \rho\left(\beta_0+\alpha_1-2\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1}\right)+\varepsilon_0\left(\left(\frac{\partial\beta_0}{\partial x^1}+\frac{\partial^2\eta^1}{\partial(x^1)^2}\right)E^1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\beta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^2}{\partial(x^2)^2}\right)E^2+\left(\frac{\partial\beta_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^2\eta^3}{\partial(x^3)^2}\right)E^3\right).$$

Во второй части получено полное описание решений системы уравнений Максвелла (в однородной среде) с нулевыми инвариантами. Более точно, если ввести комплексный вектор

$$\overline{M}=\overline{H}+i\overline{E},$$

то система уравнений Максвелла в однородной среде запишется в виде

$$\mathrm{div}\overline{M}=0,\ \ \mathrm{rot}\overline{M}+i\frac{\partial\overline{M}}{\partial t}=0,$$

а равенство нулю инвариантов

$$I=<\overline{E},\overline{E}>-<\overline{H},\overline{H}>,\ \ J=<\overline{E},\overline{H}>$$

примет вид $<\overline{M},\overline{M}>=0$. (Хорошо известно, что I, J являются инвариантами преобразований Лоренца.) Здесь значок $<,>$ соответствует стандартному скалярному произведению векторов.

Теорема 3.4.2. *Общее решение системы*

$$\mathrm{div}\overline{M}=0,\ \ \mathrm{rot}\overline{M}+i\frac{\partial\overline{M}}{\partial t}=0,\ \ <\overline{M},\overline{M}>=0$$

представимо в виде $\overline{M}=(q\cos p, q\sin p, iq)$, *где функция* p — *неявное решение уравнения* $p=P(\xi,\eta)$, *для некоторой функции* P *от двух аргументов и функция* q *определяется равенством*

$$q=Q(\xi,\eta)\exp\left(x(P_\xi\cos p-P_\eta\sin p)+y(P_\xi\sin p-P_\eta\cos p)\right).$$

Здесь $\xi=t+x\sin p-y\cos p$, $\eta=iz+x\cos p+y\sin p$, Q —*произвольная функция от двух аргументов.*

В третьей части (теорема 3.4.3) получено описание однопараметрических решений системы уравнений Максвелла

$$\mathrm{div}(\bar{E})=\rho,\ \ \mathrm{div}(\bar{H})=0,\ \ \mathrm{rot}\bar{E}=-\frac{\partial\bar{H}}{\partial t},\ \ \mathrm{rot}\bar{H}=\bar{J}+\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}. \tag{15}$$

Решение системы (15) называется однопараметрическим, если существует такая функция $\theta=\theta(t,x,y,z)$, что $\bar{E}$, $\bar{H}$, $\bar{J}$, ρ — функции от θ. В качестве параметра выбрана функция ρ плотности электрических зарядов.

Результаты данного параграфа опубликованы в работах [7, 8, 17].

В параграфе 3.5 рассматривается вопрос об интегрировании переопределенной системы

$$\frac{u_{zz}+u^3}{u}=v_t+v_x^2+v_y^2+v_z^2,\ \ u_t+u\Delta v+2u_zv_z=0, \tag{16}$$

в которой $u = u(t, z)$, $v = v(t, x, y, z)$, соответствующей подалгебре

$$L_{3,1} = \text{алг}\left\langle X_8, X_9 + aX_3, X_{11}\right\rangle,$$

симметрий кубического уравнения Шредингера. Здесь a — положительная константа и

$$X_3 = \partial_y,\ \ X_8 = 2t\partial_x + x\partial_v,\ \ X_9 = 2t\partial_y + y\partial_v,\ \ X_{11} = \partial_v.$$

Система (16) отвечает частично-инвариантному решению ранга два и дефекта один (Л.В.Овсянников, 1978). Дополненная уравнениями $u_x = u_y = 0$ она является переопределенной: четыре уравнения для двух функций. Если рассматривать только стационарные решения $u_t = v_t = 0$, то (16) примет вид

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = h^2,\ \ v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = gv_z, \tag{17}$$

где введены обозначения $h^2(z) = \dfrac{u_{zz} + u^3}{u}$, $g(z) = -2\dfrac{u_z}{u}$.

Справедливы

Теорема 3.5.1. *Если функция v не зависит от переменной x, то общее решение системы* (17) *дается следующими формулами*

$$v = \pm 2\sqrt{C_1}\left(y + \sqrt{C}\int\frac{dz}{u^2}\right) + v_0,\ \ \int\frac{du^2}{\sqrt{-2u^6 + C_1u^4 + C_2u^2 - CC_1}} = \pm z + C_3,$$

где $C > 0$, $C_1 > 0$, C_2, C_3, v_0 — некоторые константы.

Теорема 3.5.2. *Решение $v = v(x, y, z)$ системы* (17) *линейно по переменным x, y, z тогда и только тогда, когда функция h не зависит от переменной z, т.е. постоянна.*

Результаты данного параграфа получены в работе [24].

В параграфе 3.6 исследуется система уравнений,

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} + \nabla_x h = 0,\ \ \nabla_x \cdot \overrightarrow{u} = 0,\ \ \frac{dh}{dt} = 0, \tag{18}$$

описывающая движение сплошной среды, в которой все термодинамические функции сохраняются вдоль траекторий. Здесь $\overrightarrow{u} = (u, v, w)$ — скорость среды, h — термодинамическая функция, например, давление для тепловых движений; $\overrightarrow{x} = (x, y, z)$ — декартовы координаты и t — время, $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \nabla_x$ — полная производная, индекс x при градиенте указывает переменные по которым действует этот оператор.

В двумерном случае выбором лагранжевых координат система (18) приводится к виду

$$x_{tt} - y_\xi = 0,\ \ y_{tt} + x_\xi = 0,\ \ x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1. \tag{19}$$

С использованием теории переопределенных систем дифференциальных уравнений (теория Рикье) получена оценка на произвол решения системы (19). Справедлива

Теорема 3.6.1. *Система* (19) *имеет произвол решения не более 4-х функций одного аргумента.*

С другой стороны найдено точное решение системы (19) с произволом две функции одного аргумента

$$x = p(\eta)\cos\left(-\frac{\xi+\varphi(\eta)+tq(\eta)}{q^2(\eta)}\right),\ \ y = p(\eta)\sin\left(-\frac{\xi+\varphi(\eta)+tq(\eta)}{q^2(\eta)}\right),$$

где $q(\eta)$ и $\varphi(\eta)$ — произвольные функции переменной η и $p^2(\eta) = 2\int q^2(\eta)d\eta$.

Также найдена алгебра Ли системы (19) (лемма 3.6.3).

Результаты данного параграфа получены в работе [40].

В параграфе 3.7 рассматривается n-мерное однородное уравнение Монжа-Ампера и описываются его функционально-инвариантные решения ранга $n-1$. Более точно, пусть $u = u(x)$, $x = (x^1, ..., x^n)$, — решение уравнения Монжа-Ампера

$$\det(u_{x^i x^j}) = 0. \tag{20}$$

Отметим, что уравнение (20) равносильно тому, что частные производные $u_{x^1}, \ldots, u_{x^n}$ функционально-зависимы. Будем говорить, что функция $u(x)$ имеет ранг $n-1$, если ранг матрицы $(u_{x^i x^j})$ равен $n-1$. Ввиду симметрии матрицы $(u_{x^i x^j})$, это условие равносильно тому, что один из диагональных миноров порядка $n-1$ отличен от нуля. А это, в свою очередь, равносильно тому, что соответствующие $n-1$ частных производных, рассматриваемые как функции от соответствующих $n-1$ переменных, функционально-независимы.

Доказана

Теорема 3.7.1. 1) *Пусть $u(x)$ — функционально-инвариантное решение уравнения* (20) *ранга $n-1$, тогда найдется такая однородная функция степени однородности один $\varphi(y^1, \ldots, y^n)$*, что

$$\varphi(u_{x^1}, \ldots, u_{x^n}) = 0. \tag{21}$$

2) *Если $u(x)$ — решение уравнения* (21), *где $\varphi(y^1, \ldots, y^n)$ однородная функция степени однородности один, то $u(x)$ — функционально-инвариантное решение уравнения* (20).

Результаты данного параграфа получены в работе [6].

В параграфе 3.8 получено описание касательных преобразований функций одной переменной в терминах дифференциальных соотношений, связывающих правые части касательного преобразования. Также приводится обсуждение проблемы нахождения факторгруппы группы всех касательных преобразований по подгруппе инфинитезимальных касательных преобразований. Справедлива

Теорема 3.8.1. *Пусть $A = A(x,u,p)$ — произвольная функция, функции $B = B(x,u,p)$* и *$C = C(x,u,p)$ являются решениями систем*

$$B_{pp} = 2A_u + pA_{up} + A_{xp},\ B_{xp} = B_u - pB_{up} + 2pA_{xu} + p^2A_{uu} + A_{xx} \tag{22}$$

и

$$C_p = 2A + pA_p,\ C_x = B + pA_x + p^2A_u - pC_u,\ C_u = B_p - A_x, \tag{23}$$

соответственно. Тогда если определить функцию $f = f(x,u,p)$ как решение уравнения

$$Af_x + Cf_u = Bf_p, \tag{24}$$

а функции $h = h(x,u,p)$ и $g = g(x,u,p)$ определить последовательно из систем уравнений

$$A = h_u f_p - h_p f_u, \;\; B = h_u f_x - h_x f_u, \;\; C = h_p f_x - h_x f_p. \tag{25}$$

и

$$g_p = h f_p, \;\; g_x = h f_x - pC + p^2 A, \;\; g_u = h f_u + C - pA, \tag{26}$$

то отображение $(x,u,p) \longmapsto (f,g,h)$ будет задавать касательное преобразование.

И наоборот, если тройка функций f, g, h от переменных x, u, p задает касательное преобразование, то она является решением системы (22)–(26), *которая находится в инволюции.*

Отметим, что система (22–26) является преобразованием типа Бэклунда, связывающим два набора функций (A,B,C) и (f,g,h).

Результаты данного параграфа получены в работе [18].

В параграфе 3.9 приведено описание дискретных автоморфизмов дифференциальных уравнений второго порядка

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0, \tag{27}$$

где x, y — переменные, u, a, b, c, d, e, f — функции от x, y, при условии, что группа Ли инфинитезимальных преобразований уравнения (27) имеет размерность не меньше двух. А также получено описание автоморфизмов соответствующих алгебр Ли. (Проводимые вычисления, в основном, соответствуют алгоритму, разработанному в работах G.Gaeta, M.A.Rodriguez (1996) и P.E.Hydon (1997).)

Как известно (см. Л.В.Овсянников (1978)), уравнение (27), при условии, что его алгебра Ли имеет размерность не меньше двух, преобразованием переменных приводится к одному из следующих видов

$$u_{xy} - \frac{2}{q(x+y)}u_x - \frac{2p}{q(x+y)}u_y + \frac{4p}{q^2(x+y)^2}u = 0, \tag{28}$$

$$u_{xy} + xu_x + pyu_y + pxyu = 0, \tag{29}$$

$$u_{xy} = u_y + \frac{m}{x^2}u, \tag{30}$$

где $p, q \neq 0$, m — некоторые вещественные числа.

Каждое из уравнений (28)–(30) исследуется на наличие дискретных симметрий.

Приведем только описание, полученное для уравнения (28).

Алгебра Ли L (см. Л.В.Овсянников, 1978) уравнения (28) порождается операторами

$$w_1 = \partial_x - \partial_y, \;\; w_2 = x\partial_x + y\partial_y + \frac{2p+1}{2q}u\partial_u,$$

$$w_3 = x^2\partial_x - y^2\partial_y + \frac{2}{q}(px-y)u\partial_u, \;\; w_0 = u\partial_u.$$

Отметим, что $< w_1, w_2, w_3 >$ — простая подалгебра, $< w_0 >$ — центр алгебры L и $L =< w_0 > \bigoplus < w_1, w_2, w_3 >$ — прямая сумма подалгебр.

Предложение 3.9.1. *Группа автоморфизмов алгебры* $L =< w_0, w_1, w_2, w_3 >$ *по модулю группы внутренних автоморфизмов порождается центральными автоморфизмами вида (т.е. автоморфизмами, действующими тождественно по модулю центра алгебры* L*)*

$$w_0{}^{\varphi} = \gamma_0 w_0, \; w_1{}^{\varphi} = w_1, \; w_2{}^{\varphi} = w_2, \; w_3{}^{\varphi} = w_3,$$

где $\gamma_0 \neq 0$ *— произвольное вещественное число, а также следующими двумя автоморфизмами второго порядка, действие которых на порождающие задается равенствами*

$$w_0{}^{\varphi} = w_0, \;\; w_1{}^{\varphi} = -w_1, \;\; w_2{}^{\varphi} = w_2, \;\; w_3{}^{\varphi} = -w_3,$$

$$w_0{}^{\varphi} = w_0, \;\; w_1{}^{\varphi} = w_3, \;\; w_2{}^{\varphi} = w_2, \;\; w_3{}^{\varphi} = w_1.$$

Предложение 3.9.2. 1) *Автоморфизм* $w_1{}^{\varphi} = -w_1$, $w_2{}^{\varphi} = w_2$, $w_3{}^{\varphi} = -w_3$, $w_0{}^{\varphi} = w_0$ *реализуется заменой переменных* $\widehat{x} = -x$, $\widehat{y} = -y$, $\widehat{u} = u$.

2) *Автоморфизм* $w_0{}^{\varphi} = \gamma_0 w_0$, $w_1{}^{\varphi} = w_1$, $w_2{}^{\varphi} = w_2$, $w_3{}^{\varphi} = w_3$ *реализуется заменой переменных* $\widehat{x} = -y$, $\widehat{y} = -x$, $\widehat{u} = u$ *только при* $\gamma_0 = 1$ *(тождественный автоморфизм).*

3) *Автоморфизм* $w_1{}^{\varphi} = w_3$, $w_2{}^{\varphi} = w_2$, $w_3{}^{\varphi} = w_1$, $w_0{}^{\varphi} = w_0$ *не реализуется заменой переменных.*

Предложение 3.9.3. *Дискретные автоморфизмы уравнения*

$$u_{xy} - \frac{2}{q(x+y)} u_x - \frac{2p}{q(x+y)} u_y + \frac{4p}{q^2(x+y)^2} u = 0$$

1) *при* $p \neq 1$ *порождаются единственным преобразованием переменных*

$$\widehat{x} = -x, \;\; \widehat{y} = -y, \;\; \widehat{u} = u,$$

1) *при* $p = 1$ *порождаются двумя преобразованиями переменных*

$$\widehat{x} = -x, \;\; \widehat{y} = -y, \;\; \widehat{u} = u \quad \text{и} \quad \widehat{x} = y, \;\; \widehat{y} = x, \;\; \widehat{u} = u.$$

Результаты данного параграфа получены в работе [11].

Результаты параграфа 3.10 связаны с вопросами классификации структуры алгебры Ли на пространстве гладких функций из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^2$.

В работе А.А.Кириллова (1976) введено понятие локальной алгебры Ли на пространстве бесконечнодифференцируемых сечений гладкого вещественного векторного расслоения E над многообразием M. В частности, если $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $M = \mathbb{R}^n$, то скобка Ли на пространстве $\mathbb{R}^{n,m} \equiv C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ определяется формулой

$$[u, v]^s = \sum A^s_{ijkl}(x) \partial^k u^i \partial^l v^j, \tag{31}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — набор переменных, $A^s_{ijkl}(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $s, i, j = 1, \ldots, m$, ∂^k, ∂^l — сокращенное обозначение для операторов $\frac{\partial}{\partial x_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}^{k_n}$ и $\frac{\partial}{\partial x_1}^{l_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}^{l_n}$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$ — мультииндексы, $[u, v]^s$, u^i, v^j — компоненты вектор-функций $[u, v]$, u, $v \in \mathbb{R}^{n,m}$. Суммирование в (31) идет по всевозможным значениям целых неотрицательных индексов, причем только конечное число функций $A^s_{ijkl}(x)$ отлично от нуля.

Отображение $(u,v) \longmapsto [u,v]$ должно удовлетворять стандартным соотношениям алгебры Ли

$$[u,v]+[v,u]=0,$$
$$[\alpha u+\beta v,w]=\alpha[u,w]+\beta[v,w],$$
$$[[u,v],w]+[[v,w],u]+[[w,u],v],$$

где α, β — произвольные вещественные числа, u, v, w — произвольные элементы пространства $\mathbb{R}^{n,m}$.

В той же работе А.А.Кириллова (1976) был поставлен вопрос о классификации локальных алгебр Ли с неодномерным слоем, например, для пространства $\mathbb{R}^{1,2}$.

В параграфе 3.10 приведена классификация скобок Ли на пространстве $\mathbb{R}^{1,2}$ в самом простейшем случае: порядок скобки Ли не превосходит единицы (скобка Ли (31) имеет порядок N, если в правой части (31) порядок старшей производной не превосходит N и есть ненулевая производная порядка N), "тензор"$A^s_{ijkl}(x)$ при производных старшего порядка симметричен по индексам i, j и все коэффициенты $A^s_{ijkl}(x)$ являются аналитическими функциями от переменной x. Классификация проводится по модулю действия группы $GL_2(F)$, F — пространство аналитических функций от переменной x. Показано, что при $m \geq 2$ существуют скобки Ли сколь угодно большого порядка (при $m=1$ это не так (см. А.А.Кириллов (1976), лемма 2). Основные результаты сформулированы в теоремах 3.10.1 и 3.10.2. Теорема 3.10.1 утверждает, что аналитических симметричных скобок Ли первого порядка ровно шесть, а теорема 3.10.2 утверждает, что с точностью до изоморфизма эти скобки Ли задают пять неизоморфных структур алгебры Ли на пространстве $\mathbb{R}^{1,2}$. Более точно (далее $D=\frac{d}{dx}$)

Теорема 3.10.2. *Любая локальная алгебра Ли $\mathbb{R}^{1,2}$ с аналитической симметричной скобкой Ли первого порядка, с точностью до изоморфизма, может быть задана одной и только одной из следующих скобок*

1) $[u,v]=(Du^1v^1-u^1Dv^1, Du^2v^2-u^2Dv^2)$,
2) $[u,v]=(Du^1v^1-u^1Dv^1, 0)$,
3) $[u,v]=(u^1v^2-u^2v^1, 0)$,
4) $[u,v]=(Du^1v^2-u^2Dv^1+Du^2v^1-u^1Dv^2, Du^2v^2-u^2Dv^2)$,
5) $[u,v]=(0,0)$.

Результаты данного параграфа получены в работе [21].

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

— Доказана теорема о существовании универсального алгебраического тождества для модуля дифференцирований произвольного ассоциативного коммутативного кольца. Для кольца гладких функций в полученном тождестве установлено разбиение параметров на зависимые и независимые. Доказано, что для достаточно широкого класса кинетических уравнений есть дифференциальные тождества с заранее фиксированной квадратичной формой. Построены тождества для кинетических уравнений со скобкой Якоби, для кинетических уравнений на многообразии со связностью. Получено тождество для кинетического уравнения Больцмана-Власова и доказана теорема единственности для соответствующей обратной задачи. Получены некоторые точные представления для решения и коэффициентов кинетического уравнения Власова. Построенные решения обладают функциональным произволом.

— Для квантового кинетического уравнения получено дифференциальное уравнение бесконечного порядка. Для соответствующего дифференциального уравнения конечного порядка получено дифференциальное тождество на основе которого доказана теорема единственности соответствующей обратной задачи. Доказаны теоремы единственности в одномерной задаче восстановления потенциала и получено существование решения обратной задачи, при условии, что данные обратной задачи есть квазиполиномы.

— Для кинетического уравнения предложенного в работе Ю.Е. Аниконова (1995) в качестве математической модели этноса установлено, что существуют решения с функциональным произволом, и доказаны теоремы существования решения ряда обратных задач. Приведена система уравнений, охватывающая взаимодействие нескольких этносов (суперэтноса), и найдены некоторые ее точные решения.

— Приведены новые представления решений и коэффициентов гиперболических и параболических уравнений, которые частично использованы в работе при изучении одномерных и многомерных обратных задач. Рассмотрены нелинейные задачи управления перевода субстанции из одного состояния в другое при наличии краевой информации. Предложены конструктивные аналитические способы исследования.

— Для достаточно произвольного риманова многообразия с краем получены дифференциальные соотношения на метрику и годограф, которые выполняются или нет одновременно. Данные результаты применены к конструктивному исследованию обратной кинематической задачи.

— Рассмотрены обратные задачи для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа с параметром. В случае гиперболических и параболических уравнений удается при некоторых ограничениях свести общие линейные обратные задачи к конкретным интегральным уравнениям первого рода типа Абеля с последующим аналитическим продолжением. В случае нелинейных обратных задач для эллиптических уравнений, содержащих параметр, выписаны системы и интегродифференциальные уравнения, не содержащие искомого коэффициента. В одномерном случае сформулирована и доказана теорема существования аналитических решений.

— Доказаны теоремы единственности для многомерного интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода над конечномерными вещественными алгебрами с делением.

— Для уравнения теплопроводности и волнового уравнения с переменным коэффициентом при производной по времени найдены преобразования Ли, сохраняющие вид уравнения. Результаты применены к обратным и краевым задачам: в предположении, что симметрии краевого условия продолжаются на все решение, определяется возможный вид коэффициентов и решений уравнений.

— Найдена группа преобразований эквивалентности системы уравнений Максвелла в неоднородной среде. Дано полное описание решений системы Максвелла: а) с нулевыми инвариантами, б) однопараметрических решений.

— Частично проинтегрирована переопределенная система дифференциальных уравнений, соответствующая частично-инвариантному решению (фактор-модель $L_{3,1}$) кубического уравнения Шредингера.

— Получена оценка на произвол решения уравнений движения сплошной среды со специальной термодинамикой в двумерном случае (не более четырех функций одного переменного) и построены точные решения содержащие две произвольные функции.

— Для многомерного однородного уравнения Монжа-Ампера получено полное описание функционально-инвариантных решений коразмерности один.

— Получено описание касательных преобразований функций одной переменной в терминах дифференциальных соотношений, связывающих правые части касательного преобразования.

— Получено описание дискретных автоморфизмов линейных дифференциальных уравнений второго порядка при условии, что группа Ли инфинитезимальных преобразований уравнения имеет размерность не меньше двух.

— Получено описание структур алгебры Ли на пространстве гладких функций из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^2$. Показано, что: а) есть скобки Ли сколь угодно большого порядка, б) аналитических симметричных скобок Ли первого порядка ровно шесть, б) с точностью до изоморфизма эти скобки Ли задают пять неизоморфных структур алгебры Ли.

Список работ автора по теме диссертации

1. Neshchadim M.V. On uniqueness of the solution of an integral equation of the first kind over real algebras with division of the finite dimension// J. Inv. Ill-Posed Problems. 1997. V. 5, № 5. P. 455–461.

2. Neshchadim M.V. Dynamical model of the ethnic system. Formulas in direct and inverse problems// J. Inv. Ill-Posed Problems. 1998. V. 6, № 6. P. 605–617.

3. Нещадим М.В. О единственности решения интегрального уравнения первого рода над вещественными конечномерными алгебрами с делением// ДАН. 1998. Т. 362, № 3. С. 306–308.

4. Neshchadim M.V. Group analysis and formulas in inverse problems of mathematical physics// J. Inv. Ill-Posed Problems. 2000. V. 8, № 3. P. 287–305.

5. Нещадим М.В. Групповые свойства уравнения теплопроводности. Обратные и краевые задачи// Дифф. уравнения. 2002. Т. 38, № 3. С. 379–384.

6. Нещадим М.В. Функционально-инвариантные решения уравнения Монжа-Ампера// Вестник НГУ, сер. математика, механика, информатика. 2002. Т. 2, № 1. С. 53–57.

7. Нещадим М.В. Однопараметрические решения системы Максвелла// Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5, № 2. С. 160–165.

8. Neshchadim M.V. Equivalent transformations and some exact solutions to the system of Maxwell's equations// Selcuk J. Appl. Math. 2002. V. 3, № 2. P. 99–108.

9. Нещадим М.В. Некоторые представления решений и коэффициентов кинетического уравнения электродинамики// Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6, № 3. С. 114–118.

10. Нещадим М.В. Теорема единственности для кинетического уравнения движения частиц в плазме// Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6, № 1. С. 88–92.

11. Нещадим М.В. Дискретные преобразования дифференциальных уравнений второго порядка// Вестник НГУ, сер. математика, механика, информатика. 2003. Т. 3, № 3. С. 81–90.

12. Нещадим М.В. Обратные задачи и некоторые тождества для кинетического уравнения электродинамики// ДАН. 2004. Т. 395, № 4. С. 601–604.

13. Нещадим М.В. Дифференциальные тождества в теории обратных задач кинетических уравнений// Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. 7, № 2. С. 99–102.

14. Нещадим М.В., Обратные задачи для кинетических уравнений. Алгебраические и дифференциальные тождества// ДАН. 2005. Т. 400, № 3. С. 315–318.

15. Нещадим М.В. Обратные задачи для кинетического уравнения Больцмана-Власова: представления решений и коэффициентов// Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 101–105.

16. Neshchadim M.V. Uniqueness of solution to integral equation of the first kind over real algebras with division of finite dimension (a general case)// J. Inv. Ill-Posed Problems. 2005. V. 13, № 5. P. 495–502.

17. Нещадим М.В. Решения системы Максвелла с нулевыми инвариантами// Вестник НГУ, сер. математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, № 3. С. 59–61.

18. Нещадим М.В. Характеризация одномерных касательных преобразований в терминах дифференциальных соотношений// Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 1. С. 114–119.

19. Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Тождество для приближенных квантовых уравнений и обратные задачи// Сибирский журнал индустриальной математики. 2007. Т. 10, № 4. С. 3–9.

20. Нещадим М.В. Некоторые вопросы конструктивных методов в теории обратных задач// Сибирский журнал индустриальной математики. 2007. Т. 10, № 2. С. 101–109.

21. Нещадим М.В. Скобки Ли на пространстве гладких функций из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^2$// Вестник НГУ, сер. математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, № 3. С. 96–110.

22. Neshchadim M.V. Differential identities and uniqueness theorem in inverse problem for the Boltzman-Vlasov equation// J. Inv. Ill-Posed Problems. 2008. V. 16, № 3. P. 283–291.

23. Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Некоторые обратные задачи для квантового кинетического уравнения// Вестник НГУ, сер. математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, № 4. С. 13–22.

24. Нещадим М.В., Чупахин А.П. Частично-инвариантные решения кубического уравнения Шредингера// Вестник Удмуртского университета. 2008. Вып. 3. С. 35–41.

25. Нещадим М.В. Законы сохранения для системы типа реакция-диффузия// Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11, № 4. С. 125–135.

26. Нещадим М.В. Дифференциальные соотношения в обратной кинематической задаче// ДАН. 2009. Т. 424, № 4. С. 445–448.

27. Нещадим М.В., Дифференциальные соотношения в обратной задаче определения метрики по годографу// ДАН. 2009. Т. 427, № 3. С. 318–320.

28. Нещадим М.В. Некоторые вопросы конструктивных методов в теории обратных задач акустики// Вестник НГУ, сер. математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 66–70.

29. Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Представления решений, коэффициентов, символов операторов эволюционных уравнений и обратные задачи// Вестник НГУ, сер. математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 2. С. 25–36.

30. Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Обратные задачи и некоторые вопросы динамики этнических процессов// Научное периодическое издание "Современные исследования социальных проблем". 2010. № 4.1. С. 689–700.

31. Аниконов Ю.Е., Кривцов Ю.В., Нещадим М.В. Конструктивные методы в нелинейных задачах теории управления// Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13, № 2. С. 30–45.

32. Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Ветвящиеся процессы, отображения и обратные задачи// Препринт № 247. 2010. СО РАН, Институт математики, 14 с.

33. Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об аналитических методах в теории обратных задач математической физики// Сибирские электронные математические известия. 2010. Т. 7. С. 11–61. http://semr.math.nsc.ru

34. Нещадим М.В. Законы сохранения для системы типа реакция-диффузия с одной пространственной переменной// Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 64–69.

35. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Inverse problems for quantum kinetic equations. J. Inv. Ill-Posed Problems. 2011. V. 18. P. 727–740.

36. Нещадим М.В. Скобка Якоби, дифференциальные тождества и обратные задачи для кинетических уравнений// ДАН. 2011. Т. 436, № 2. С. 170–173.

37. Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. I// Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 27–39.

38. Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. II// Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 28–33.

39. Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об аналитических методах в теории обратных задач для параболических уравнений// Вестник НГУ, сер. математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, № 3. С. 20–35.

40. Нещадим М.В., Чупахин А.П. О некоторых решениях уравнений движения сплошной среды со специальной термодинамикой// Сибирские электронные математические известия. 2011. Т. 8. С. 317–332. http://semr.math.nsc.ru

41. Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об обратных задачах для уравнений математической физики с параметром// Сибирские электронные математические известия. 2012. Т. 9. С. 45–64. http://semr.math.nsc.ru

Нещадим Михаил Владимирович

АЛГЕБРО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук