На правах рукописи

Седипков Айдыс Алексеевич

Обратная спектральная задача для операторов Штурма–Лиувилля с разрывными коэффициентами

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2012

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (Новосибирский государственный университет, НГУ)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Белоносов Владимир Сергеевич**

Официальные оппоненты: **Кабанихин Сергей Игоревич**, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, заведующий лабораторией математических задач геофизики

Дятлов Глеб Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Российский научный центр «Baker Hughes, Новосибирский технологический центр», ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Защита состоится 25 сентября 2012 г. в 16 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Новосибирском государственном университете по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан «____» августа 2012 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.174.02,
доктор физико-математических наук Старовойтов В.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Обратные задачи спектрального анализа состоят в восстановлении дифференциальных операторов по некоторым их спектральным данным. Подобные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют много приложений в механике, физике, электронике, геофизике, метеорологии и других областях естествознания и техники. Интерес к этой тематике постоянно возрастает благодаря появлению все новых приложений, и в настоящее время теория обратных задач интенсивно развивается во всем мире.

Наиболее полные результаты в теории обратных спектральных задач установлены для операторов Штурма–Лиувилля, определенных дифференциальным выражением

$$-u_{xx} + q(x)u, \tag{1}$$

где коэффициент $q(x)$ называют *потенциалом.*

Обратные спектральные задачи для таких операторов исследовались в работах В.А. Амбарцумяна, В. Гайзенберга, Г. Борга, М.Г. Крейна, В.А. Марченко, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, Н. Левинсона, З.Л. Лейбензона, М.А. Наймарка, Ф.С. Рофе-Бекетова, М.Г. Гасымова, А.Н. Тихонова, Л.Д. Фаддеева, В.А. Юрко и других авторов. Ими были разработаны: метод оператора преобразования, метод Гельфанда–Левитана, метод спектральных отображений, позволяющие восстановить оператор Штурма–Лиувилля, заданный на всей числовой оси, полуоси или конечном интервале.

Все эти результаты, имеющие нелокальный характер, являются следствиями теоремы о восстановлении дифференциального оператора по его спектральной функции. К сожалению, в многомерном случае точные аналоги этой теоремы пока отсутствуют, что затрудняет получение нелокальных результатов в теории многомерных обратных задач. Тем не менее, здесь также получены фундаментальные результаты, среди которых отметим работы М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, В.Г. Романова, С.И. Кабанихина, Ю.Е. Аниконова, Д.С. Аниконова, Ю.М. Березанского, А.Л. Бухгейма, Г.В. Дятлова, Д.Г. Орловского, А.И. Прилепко, И.А. Васина, А.М. Денисова, В.В. Дубровского, В.А. Садовничего, В.М. Исакова, В.А. Шарафутдинова, А.Г. Яголы и других авторов.

Многие приложения связаны с краевой задачей

$$-\frac{1}{\sigma(x)}(\sigma(x)w_x)_x = \lambda w, \quad x > 0, \tag{2}$$

$$w_x|_{x=0} = 0, \tag{3}$$

где коэффициент $\sigma(x)$, называемый *импедансом*, является строго положительной и локально суммируемой на полуоси $(0, \infty)$ функцией.

Положим $\lambda = \omega^2$ и будем предполагать, что при $x \geq x_* > 0$ коэффициент $\sigma(x)$ постоянен. Обозначим через $\mathcal{E}(x,\omega)$ решение уравнения (2), совпадающее с $exp(i\omega x)$ при $x \geq x_*$. Функцию $\mathcal{E}(x,\omega)$ называют *решением Йоста* уравнения (2), а функцию $\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{E}_x(0,\omega)$ — *функцией Йоста* системы (2)–(3).

В диссертации исследуется обратная спектральная задача, состоящая в восстановлении импеданса $\sigma(x)$ по функции Йоста $\mathcal{J}(\omega)$.

Эта задача в случае дважды непрерывно дифференцируемого импеданса $\sigma(x)$ с помощью замены

$$u = \sqrt{\sigma(x)}w \tag{4}$$

сводится к обратной спектральной задаче

$$-u_{xx} + q(x)u = \lambda u, \quad x > 0, \tag{5}$$

$$(u_x - hu)\,|_{x=0} = 0. \tag{6}$$

с непрерывным потенциалом $q(x) = \frac{(\sqrt{\sigma(x)})_{xx}}{\sqrt{\sigma(x)}}$ и коэффициентом $h = \frac{\sigma_x(0)}{2\sigma(0)}$, которая в свою очередь может быть решена приведенными выше методами.

Допустим, что коэффициент $\sigma(x)$ является кусочно-гладкой функцией такой, что

$$\sigma(x) \in C^2(x_{k+1}, x_k),\ \text{где } x_{k+1} < x_k, k = 0, ..., n;\ x_{n+1} = 0,\ x_0 = \infty,\ x_1 \leq x_*,$$

причем ее производные $\sigma^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, 2$, имеют разрывы первого рода в точках $x_1, ..., x_n$. Тогда краевая задача (2)–(3) перепишется в виде уравнения

$$-\frac{1}{\sigma(x)}(\sigma(x)w_x)_x = \lambda w, \quad x \in \bigcup_{k=0}^{n}(x_{k+1}, x_k), \tag{7}$$

с условиями склейки

$$\begin{bmatrix} w \\ w_x \end{bmatrix}_{x=x_k-0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w_x \end{bmatrix}_{x=x_k+0},\ \sigma_k = \frac{\sigma(x_k+0)}{\sigma(x_k-0)},\ k = 1, ..., n, \tag{8}$$

и краевым условием

$$w_x|_{x=0} = 0. \tag{9}$$

Обратные спектральные задачи с разрывными коэффициентами исследовались в работах А.Н. Тихонова, В.Б. Гласко, И.М. Гусейнова, Р.Т. Пашаева, Д.Г. Шепельского, В.А. Юрко и других авторов. В данной постановке задача восстановления разрывного импеданса $\sigma(x)$ изучалась в работах Д.Г. Шепельского и А.И. Шестакова. Однако в этих работах исследовался либо случай кусочно-постоянного импеданса $\sigma(x)$, либо случай с одним разрывом, т.е. $n = 1$, причем точка разрыва x_1 и величина σ_1 предполагались известными. Поэтому актуальным остается вопрос восстановления импеданса $\sigma(x)$ с произвольным конечным числом разрывов, при этом число n, точки разрыва $x_1, ..., x_n$ и величины $\sigma_1, ..., \sigma_n$ также подлежат восстановлению.

Решать эту задачу мы будем с помощью замены (4). Тогда система (7)–(8) приводится к уравнению Штурма–Лиувилля

$$-u_{xx} + q(x)u = \lambda u, \quad x \in \bigcup_{k=0}^{n} (x_{k+1}, x_k), \tag{10}$$

с условиями склейки

$$\begin{bmatrix} u \\ u_x \end{bmatrix}_{x=x_k-0} = \begin{pmatrix} a_k^{-1} & 0 \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_x \end{bmatrix}_{x=x_k+0}, \quad k = 1, ..., n, \tag{11}$$

а краевое условие (9) запишется в виде

$$(u_x - hu)\,|_{x=0} = 0. \tag{12}$$

Здесь $q(x) = \frac{(\sqrt{\sigma(x)})_{xx}}{\sqrt{\sigma(x)}}$, $h = \frac{\sigma_x(0)}{2\sigma(0)}$, $a_k = \sqrt{\sigma_k}$, $b_k = \frac{\sigma_x(x_k+0)/\sqrt{\sigma_k} - \sigma_x(x_k-0)}{\sigma(x_k-0)}$. В силу свойств импеданса $\sigma(x)$, коэффициент $q(x)$ является кусочно-непрерывной функцией с разрывами первого рода в точках $x_1, ..., x_n$, причем $q(x) \equiv 0$ при $x \geq x_*$.

Введем функцию $E(x, \omega)$, удовлетворяющую уравнению (10) с условиями склейки (11) и совпадающую с $exp(i\omega x)$ при $x \geq x_*$. В дальнейшем функцию $E(x, \omega)$ будем называть *решением Йоста* системы (10)–(11), а функцию $J(\omega) = E_x(0, \omega) - hE(0, \omega)$ — *функцией Йоста* системы (10)–(12).

Отметим, что функция $J(\omega)$ и функция Йоста $\mathcal{J}(\omega)$ системы (2)–(3) связаны соотношением

$$\mathcal{J}(\omega) = KJ(\omega),\ K = \sqrt{\frac{\sigma(x_*)}{\sigma(0)}}. \tag{13}$$

В диссертации показано, что коэффициент K однозначно определяется асимптотикой функции Йоста $\mathcal{J}(\omega)$ на бесконечности. Таким образом, исходная обратная спектральная задача сводится к восстановлению кусочно непрерывного коэффициента $q(x)$ и величин $h, x_k, a_k, b_k; k = 1, ..., n$, по функции Йоста $J(\omega)$. Эта задача полностью решается в первых двух главах диссертации.

Подходы, разработанные в первых двух главах, диссертации применяются далее к прикладным вопросам, возникшим в связи с задачей о восстановлении механических параметров межскважинного пространства по результатам измерений волновых полей, порожденных скважинными источниками. Эта проблема относится к классу динамических обратных задач, для которых пока не разработаны достаточно эффективные методы решения. Исключением является одномерный случай, где существуют алгоритмы, основанные на результатах спектральной теории дифференциальных операторов. Постановки обратных динамических задач для системы дифференциальных уравнений упругости впервые рассмотрел А.С. Алексеев. Одномерные обратные динамические задачи исследовались работах А.С. Алексеева, В.Г Романова, А.С. Благовещенского, А.Г. Меграбова, В.С. Белоносова и других авторов. В многомерном случае применяются, главным образом, оптимизационные методы, требующие значительных вычислительных ресурсов и не допускающие использования "в реальном времени". Мы начнем изучение этой проблемы в модельной одномерной ситуации, предполагая в дальнейшем перейти к многомерному случаю.

Рассмотрим процесс распространения плоских волн в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, заполненном упругой средой, механические свойства которой зависят только от одной пространственной координаты y. Считается, что волны поляризованы вдоль некоторой прямой, параллельной плоскости $y = 0$, на которой равномерно распределен внешний источник возмущений. При этих условиях смещение w точек среды относительно положения равновесия зависит только от координаты y и времени t и удовлетворяет уравнению акустики

$$(\mu w_y)_y = \rho w_{tt}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{14}$$

где $\rho(y)$ — плотность, $\mu(y)$ — модуль сдвига.

Положим

$$-\infty = y_0^- < y_*^- \leq y_1^- < ... < y_m^- < y_{m+1}^- = 0,$$
$$0 = y_{n+1}^+ < y_n^+ < ... < y_1^+ \leq y_*^+ < y_0^+ = \infty.$$

Предполагается, что параметры среды $\rho(y), \mu(y)$ являются строго положительными кусочно-гладкими функциями такими, что $\rho(y), \mu(y)$ постоянны вне промежутка $[y_*^-, y_*^+]$ и дважды непрерывно дифференцируемы на каждом из интервалов (y_l^-, y_{l+1}^-), $l = 0, ..., m$; (y_{k+1}^+, y_k^+), $k = 0, ..., n$; причем их производные $\rho^{(j)}(y)$ и $\mu^{(j)}(y)$, $j = 0, 1, 2$, имеют разрывы первого рода в точках $y_1^-, ..., y_m^-, y_1^+, ..., y_n^+$. Потребуем также, чтобы функции $\rho(y), \mu(y)$ были дважды непрерывно дифференцируемы на интервале (y_m^-, y_n^+).

Для того, чтобы уравнение (14) имело смысл, мы будем предполагать, что на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ функции $w(y, t)$, $\mu(y)w_y(y, t)$ принадлежат $W_{2,loc}^1$ относительно переменой y. Внешнее динамическое воздействие при $y = 0$ моделируется краевыми условиями вида

$$w(+0, t) - w(-0, t) = 0, \tag{15}$$

$$\mu(0)w_y(+0, t) - \mu(0)w_y(-0, t) = g_1(t), \tag{16}$$

где функция $g_1(t)$ обращается в нуль вне интервала $(0, +\infty)$. Условие (16) означает, что скачок напряжения при $y = 0$ пропорционален силе внешнего воздействия $g_1(t)$, а условие (15) — непрерывность смещения w при $y = 0$. Тогда уравнение (14) перепишется в виде

$$(\mu w_y)_y = \rho w_{tt}, \quad y \in \bigcup_{l=0}^{m} (y_l^-, y_{l+1}^-) \cup \bigcup_{k=0}^{n} (y_{k+1}^+, y_k^+), \tag{17}$$

с условиями склейки (15)–(16) и

$$\begin{bmatrix} w \\ w_y \end{bmatrix}_{y=y_k^+-0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_k^+ \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w_y \end{bmatrix}_{y=y_k^++0}, \ \mu_k^+ = \frac{\mu(y_k+0)}{\mu(y_k-0)}, \ k = 1, ..., n, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} w \\ w_y \end{bmatrix}_{y=y_l^-+0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_l^- \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w_y \end{bmatrix}_{y=y_l^--0}, \ \mu_l^- = \frac{\mu(y_l-0)}{\mu(y_l+0)}, \ l = 1, ..., m. \tag{19}$$

Будем считать, что до начала воздействия среда покоилась, т.е.

$$w\mid_{t \leq 0} = 0. \tag{20}$$

Естественно также предположить, что на бесконечности выполнены условия отсутствия приходящих волн, называемые условиями излучения Зоммерфельда, которые записываются в виде

$$w_y + \frac{1}{v(y_*^+)} w_t = 0, \quad y \geq y_*^+, \tag{21}$$

$$w_y - \frac{1}{v(y_*^-)} w_t = 0, \quad y \leq y_*^-, \tag{22}$$

где $v(y) = \sqrt{\mu(y)/\rho(y)}$ — скорость распространения упругих волн в точке y.

Мы будем изучать формально более общую задачу, в которой в условии (15) правая часть также может быть отлична от нуля

$$w(+0,t) - w(-0,t) = g_0(t), \tag{23}$$

где функция $g_0(t)$ обращается в нуль вне интервала $(0,+\infty)$.

Прямой динамической задачей мы называем задачу об определении функции $w : R \times R \longrightarrow R$, удовлетворяющей системе (16)–(23), если функции $\rho(y)$, $\mu(y)$, $g_0(t)$ и $g_1(t)$ известны.

Задачу об определении механических параметров среды $\rho(y)$ и $\mu(y)$ для системы (16)–(23), если известны четыре функции $w(+0,t)$, $w(-0,t)$, $w_y(+0,t)$, $w_y(-0,t)$, будем называть *обратной динамической задачей.*

Цель работы.

1. Получить конструктивное решение обратной спектральной задачи для оператора A, состоящей в восстановлении кусочно-гладкого импеданса $\sigma(x)$ с конечным числом разрывов первого рода в точках $x_1, ..., x_n$ по функции Йоста $\mathcal{J}(\omega)$, при этом число n, точки разрыва $x_1, ..., x_n$ и величины $\sigma_1, ..., \sigma_n$ также подлежат восстановлению.

2. Исследовать разрешимость прямой динамической задачи и получить конструктивное решение обратной динамической задачи.

Методы исследования. В диссертации развиваются идеи метода спектральных отображений, в основе которого лежит метод контурного интегрирования Коши–Пуанкаре. Также в работе используются асимптотические методы, аппарат теории почти-периодических, целых и мероморфных функций, теория интегральных уравнений, теория операторов в банаховых пространствах, теория гиперболических уравнений и другие методы вещественного, комплексного и функционального анализа.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Установлено, что если точки разрыва $x_1, \dots, x_n$ несоизмеримы, т.е. никакая их линейная комбинация с целыми коэффициентами не равна нулю, то точки разрыва $x_1, \dots, x_n$ импеданса $\sigma(x)$ и величины $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ однозначно определяются асимптотикой функции Йоста $\mathcal{J}(\omega)$ при $\omega \to \infty$ и $\omega \in \mathbb{R}$. Построен алгоритм позволяющий восстановить эти разрывы за конечное число шагов.

2. Доказано, что если $x_1, \dots, x_n$ несоизмеримы, то функция Йоста $\mathcal{J}(\omega)$ однозначно определяет импеданс $\sigma(x)$ на всем множестве $\bigcup_{k=0}^{n}(x_{k+1}, x_k)$. Показано, что восстановление импеданса $\sigma(x)$ сводится к решению некоторого интегрального уравнения. Построена процедура, позволяющая восстановить импеданс $\sigma(x)$.

3. Доказана однозначная разрешимость прямой динамической задачи в соответствующем функциональном пространстве и получено специальное представление для ее решения.

4. С помощью результатов 1–3 решена обратная динамическая задача о восстановлении импеданса среды $\sigma = \sqrt{\rho\mu}$.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории операторов и ее приложениях. На основе разработанной конструктивной процедуры могут быть построены численные методы решения обратных спектральных задач для операторов Штурма–Лиувилля с разрывными коэффициентами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались

- на I и II Молодежных международных научных школах–конференциях «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 2009 г., 2010 г.),
- на Международной конференции студентов и молодых ученых «Мир науки» (Алма-Ата, 2010 г.),
- на Международной конференции «The World congress on Engineering and Technology» (Shanghai, 2011),
- на Международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева (Новосибирск, 2012),

а также

- на семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы анализа» (руководители семинара – д.ф.-м.н. В.С. Белоносов, д.ф.-м.н. М.В. Фокин),
- на семинаре отдела условно-корректных задач ИМ СО РАН (руководители семинара – чл.-корр. РАН В.Г. Романов, д.ф.-м.н. Д.С. Аниконов),
- на семинаре Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН «Математические модели механики сплошных сред»(руководитель семинара – чл.-корр. РАН П.И. Плотников),
- на семинаре лаборатории обратных задач математической физики ИМ СО РАН (руководитель семинара – д.ф.-м.н. Ю.Е. Аниконов).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 8 работах, 2 из которых — в журналах, рекомендованных ВАК, 5 — в тезисах и сборниках трудов конференций.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения и трех глав. Полный объем диссертации **93** страницы текста. Список литературы содержит **75** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, излагается краткое содержание работы, сформулированы основные результаты.

Первая глава посвящена вопросу восстановления разрывов импеданса $\sigma(x)$, т.е. точек разрыва $x_1, ..., x_n$ и величин $\sigma_1, ..., \sigma_n$.

В **параграфе 1.1** установлено, что функция Йоста $J(\omega)$ системы (10)–(12) при $\omega \to \infty$ и $\omega \in \mathbb{R}$ представима в виде

$$\frac{J(\omega)}{i\omega} = \mathcal{P}(\omega) + O(\frac{1}{\omega}),$$

где $\mathcal{P}(\omega) = A_1 \exp(i\omega p_1) + \ldots + A_N \exp(i\omega p_N)$, $p_1 = 0$. Числа $\pi_k = \frac{1}{2}p_k, k = 1, \ldots, N$, условно будем называть *периодами*, а числа $\mathcal{A}_k = \frac{A_k}{A_1}$,

$k = 1, \ldots, N$, — *амплитудами.* Все периоды образуют *спектр периодов* $\mathcal{SP} = \{\pi_k\}_{k=1,...,N}$, а вместе с амплитудами — *полный спектр пар* $\mathcal{FSP} = \{[\pi_k, \mathcal{A}_k]\}_{k=1,...,N}$.

В дальнейшем мы требуем, чтобы точки $x_1, ..., x_n$ были несоизмеримы: никакая их линейная комбинация с целыми коэффициентами не равна нулю. Тогда $N = 2^n$, т.е. количество точек разрыва n можно найти по N как $n = \ln N / \ln 2$.

Привлекая теорию почти-периодических функций, а также преобразование Фурье удается однозначно восстановить спектр периодов $\mathcal{SP}$, полный спектр пар $\mathcal{FSP}$ и число N.

Аналогичные рассуждения справедливы и для функции Йоста $\mathcal{J}(\omega)$ системы (2)–(3). Функция Йоста $\mathcal{J}(\omega)$ при $\omega \to \infty$ и $\omega \in \mathbb{R}$ имеет вид

$$\frac{\mathcal{J}(\omega)}{i\omega} = B_1 \exp(i\omega p_1) + \ldots + B_N \exp(i\omega p_N) + O(\frac{1}{\omega}),$$

причем показатели и коэффициенты Фурье p_k, B_k; $k = 1, \ldots, N$, определяют в точности те же спектр периодов $\mathcal{SP}$ и полный спектр пар $\mathcal{FSP}$. Кроме того, для коэффициента Фурье B_1 при нулевом показателе π_1 имеет место представление

$$B_1 = K \prod_{k=1}^{n} (\sigma_k^{-\frac{1}{2}} + \sigma_k^{\frac{1}{2}}),$$

где K — коэффициент в формуле (13). Отсюда видно, что вопрос восстановления коэффициента K сводится к восстановлению величин $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

В **параграфе 1.2** доказывается однозначность восстановления разрывов импеданса $\sigma(x)$ по спектру периодов $\mathcal{SP}$ и полному спектру пар $\mathcal{FSP}$.

Теорема 1. *Если точки разрыва* $x_1, \ldots, x_n$ *несоизмеримы, то величины* $x_1 - x_2, ..., x_{n-1} - x_n, x_n$ *однозначно определяются по спектру периодов* $\mathcal{SP}$ *с точностью до перестановки.*

Теорема 2. *Точки разрыва* $x_1, ..., x_n$ *и величины* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *однозначно определяются по полному спектру пар* $\mathcal{FSP}$ *при условии несоизмеримости* $x_1, \ldots, x_n$.

В **параграфе 1.3** построен алгоритм позволяющий восстановить разрывы импеданса $\sigma(x)$ по спектру периодов $\mathcal{SP}$ и полному спектру пар $\mathcal{FSP}$ за конечное число шагов.

Таким образом, если точки разрыва $x_1, \ldots, x_n$ несоизмеримы, то

1. разрывы импеданса $\sigma(x)$, т.е. точки $x_1, \ldots, x_n$ и величины $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, однозначно восстанавливаются по асимптотике любой из функций Йоста $J(\omega)$ или $\mathcal{J}(\omega)$ при $\omega \to \infty$ и $\omega \in \mathbb{R}$;

2. коэффициент K в формуле (13) восстанавливается по асимптотике функции Йоста $\mathcal{J}(\omega)$ при $\omega \to \infty$ и $\omega \in \mathbb{R}$.

Вторая глава посвящена посвящена вопросу восстановления импеданса $\sigma(x)$ на множестве $\bigcup_{k=0}^{n}(x_{k+1}, x_k)$ по функции Йоста $\mathcal{J}(\omega)$. С учетом результатов главы 1 эта задача сводится к восстановлению $\sigma(x)$ по функции $J(\omega)$.

В **параграфе 2.1** доказывается однозначность восстановления импеданса $\sigma(x)$ по функции Йоста $J(\omega)$. Условимся, что если некоторый символ ζ обозначает объект, относящийся к системе (7)–(8) с импедансом $\sigma(x)$, то через $\widetilde{\zeta}$ будем обозначать аналогичный объект, относящийся к системе (7)–(8) с импедансом $\widetilde{\sigma}(x)$.

Теорема 3. *Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$, $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$ — вектора с несоизмеримыми компонентами. Тогда если $J(\omega) \equiv \widetilde{J}(\omega)$, то $q(x) \equiv \widetilde{q}(x)$, $h = \widetilde{h}$, $x_k = \widetilde{x}_k$, $a_k = \widetilde{a}_k$, $b_k = \widetilde{b}_k$; $k = 1, \ldots, n$.*

Следовательно, если точки разрыва $x_1, \ldots, x_n$ несоизмеримы, то функция Йоста $J(\omega)$ однозначно определяет коэффициенты $q(x), h, a_k, b_k; k = 1, \ldots, n$. Тогда в силу определений этих коэффициентов, функции $\sqrt{\sigma(x)}$ и $\sqrt{\widetilde{\sigma}(x)}$ совпадают как решения системы (10)–(12) при $\lambda = 0$, удовлетворяющие условию

$$\sqrt{\sigma(x)}|_{x=0} = \sqrt{\widetilde{\sigma}(x)}|_{x=0}.$$

В **параграфах 2.2, 2.3** строится процедура восстановления импеданса $\sigma(x)$. Условимся, что если некоторый символ ζ обозначает объект, относящийся к системе (7)–(8) с импедансом $\sigma(x)$, то через ζ^0 будем обозначать аналогичный объект, относящийся к системе (7)–(8) с кусочно–постоянным импедансом $\sigma^0(x)$, где $\sigma^0_k = \sigma_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Для решения $\phi(x, \lambda)$ уравнения (10) с условиями склейки (11), удовлетворяющего начальным условиям

$$\phi|_{x=0} = 1, \ \phi_x|_{x=0} = h,$$

получено соотношение

$$\phi^0(x, \lambda) = \phi(x, \lambda) + \int\limits_0^\infty \widehat{V}(\zeta) D^0(x, \lambda, \zeta) \phi(x, \zeta) d\zeta, \ x \in \bigcup_{k=0}^{n}(x_{k+1}, x_k), \qquad (24)$$

называемое *основным уравнением* обратной задачи, где

$$D^0(x,\lambda,\zeta)=\int\limits_0^x \phi^0(t,\lambda)\phi^0(t,\zeta)dt,\ \widehat{V}(\lambda)=\frac{\omega}{\pi|J(\omega)|^2}-\frac{\omega}{\pi|J^0(\omega)|^2},\ \lambda=\omega^2,$$

а функции $\phi^0(x,\lambda)$, $J^0(\omega)$ соответствуют задаче с кусочно-постоянным импедансом и строятся с помощью точек разрыва $x_1,\ldots,x_n$ и величин $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$.

Теорема 4. *Для каждого фиксированного* $x\in\bigcup_{k=0}^n(x_{k+1},x_k)$ *уравнение* (24) *имеет единственное решение* $\phi(x,\lambda)\in\mathcal{C}([0,\infty))$.

Таким образом, исходная нелинейная обратная задача сводится к решению линейного уравнения (24).

Решая основное уравнение (24) при каждом фиксированном x, находим решение $\phi(x,\lambda)$. В силу определения решения $\phi(x,\lambda)$, искомые коэффициенты $q(x)$, h, b_k; $k=1,\ldots,n$ определяются формулой

$$q(x)-\lambda=\frac{\phi_{xx}(x,\lambda)}{\phi(x,\lambda)},\ x\in\bigcup_{k=0}^n(x_{k+1},x_k);\quad h=\phi_x(0,\lambda),$$
$$b_k=\frac{\phi_x(x_k-0,\lambda)+a_k\phi_x(x_k+0,\lambda)}{\phi(x_k-0,\lambda)},\ k=1,\ldots,n.$$

Далее в силу определений коэффициентов $q(x)$, h, a_k, b_k; $k=1,\ldots,n$, импеданс $\sigma(x)$ восстанавливается по формуле

$$\sigma(x)=\sigma(0)\phi^2(x,0),\quad x\in\bigcup_{k=0}^n(x_{k+1},x_k).$$

Третья глава посвящена вопросу о разрешимости одномерной обратной динамической задачи об определении механических параметров неоднородной среды по результатам измерений волновых полей, порожденных внешними источниками. В **параграфе 3.1** прямая и обратная динамические задачи приводятся к каноническому виду. Далее в **параграфах 3.2, 3.3** доказывается однозначная разрешимость прямой динамической задачи в соответствующем функциональном пространстве и выводится специальное представление для ее решения с помощью сведения исходной задачи к вспомогательной спектральной задаче для уравнения Штурма–Лиувилля.

В **параграфе 3.4** изучается обратная динамическая задача. С помощью результатов глав 1, 2 и специального представления решения прямой динамической задачи удается однозначно восстановить импеданс среды

$$\sigma(x) = \sqrt{\rho(y(x))\mu(y(x))},\ x = \tau \mathrm{sgn}(y),$$

где τ — время пробега волны от начала координат до точки y.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору В.С. Белоносову за постановку задачи, постоянное внимание и помощь в работе.

Диссертационная работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00221), Президиума РАН (Программа фундаментальных исследований №2, проект №121), Министерства образования и науки Российской Федерации (проект №2.1.1.10133 «Развитие научного потенциала высшей школы»).

Публикации автора по теме диссертации

1. *Седипков А.А.* Прямые и обратные динамические задачи теории распространения волн в упругой неоднородной среде // Молодежная международная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Тезисы докладов. Новосибирск. — 2009. — С. 89.

2. *Седипков А.А.* Прямые и обратные динамические задачи теории распространения волн в упругой неоднородной среде // Материалы Международной конференции студентов и молодых ученых «Мир науки». Алма-Ата. — 2010. — С. 57.

3. *Седипков А.А.* Обратная спектральная задача для операторов Штурма–Лиувилля с кусочно-непрерывными коэффициентами // II Молодежная международная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Тезисы докладов. Новосибирск. — 2010. — С. 57–59. — URL: *http://math.nsc.ru/conference/onz10/thesis/abstracts.pdf* (дата обращения: 04.06.2012).

4. *Sedipkov A.A.* The inverse spectral problem for the impedance equation with piecewise continuous coefficients // Proceeding of 2011 World congress on Engineering and Technology. IEEE press. Shanghai. — 2011. — Vol. 1. — P. 509–511.

5. *Sedipkov A.A.* Direct and inverse problems of the theory of wave propagation in an elastic inhomogeneous medium // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2011. — Vol. 19. — P. 511–523.

6. *Седипков А.А.* Восстановление разрывов оператора Штурма–Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Вестник НГУ. Новосибирск. — 2012. — Т. 12, Вып. 1. — С. 114–125.

7. *Седипков А.А.* Обратная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля с разрывным потенциалом // Препринт — 277. ИМ СОРАН. — 2012. — С. 26.

8. *Седипков А.А.* Обратная спектральная задача для операторов Штурма–Лиувилля с разрывными коэффициентами // Международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева. Тезисы докладов. Новосибирск. — 2012. — С. 107.

Седипков Айдыс Алексеевич

Обратная спектральная задача для операторов Штурма–Лиувилля с разрывными коэффициентами

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать . .2012. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 1. Уч. изд. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ № .

Редакционно–издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.