На правах рукописи

Рудой Евгений Михайлович

Метод гладких возмущений в задачах теории упругости с односторонними ограничениями для областей с негладкими границами

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор Хлуднев Александр Михайлович

Официальные оппоненты:
Аннин Борис Дмитриевич, доктор физико-математических наук, академик РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, заведующий лабораторией

Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник

Слуцкий Андрей Семенович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Сибирский федеральный университет»

Защита состоится 25 декабря 2012 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2, ауд. 317а главного корпуса.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан «__» _________ 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук   Старовойтов В.Н.

Аннотация. Диссертационная работа посвящена исследованию качественных свойств решений неклассических краевых задач в областях с негладкими границами в приложении к теории упругости, и, в частности, к задачам теории трещин на основе современных методов решения уравнений математической физики, функционального анализа и вариационного исчисления.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Среди широкого спектра проблем механики сплошных сред в настоящее время одним из наиболее активно развивающихся направлений является теория трещин. Моделирование процессов разрушения в виде краевых задач позволяет наиболее точно описать поведение тел с различного рода включениями. Условно можно выделить два подхода к исследованию краевых задач в негладких областях: классический, когда рассматривается линейная математическая модель, в рамках которой на границе, соответствующей трещине, задаются линейные краевые условия, и неклассический, когда на трещине задаются нелинейные граничные условия – условия одностороннего ограничения.

В рамках классического подхода в работах И.И. Аргатова, Р.В. Гольдштейна, А.Н. Гузя, Р. Дудучавы, В.М. Ентова, В.В. Зозули, В.А. Козлова, В.А. Кондратьева, В.Г. Мазьи, Ю.Г. Матвиенко, А.Б. Мовчана, Е.М. Морозова, Н.Ф. Морозова, С.А. Назарова, В.В. Панасюка, В.З. Партона, Б.А. Пламеневского, Ю.Н. Работнова, М.П. Саврука, Л.И. Слепяна, А.С. Слуцкого, Е.И. Шифрина, Г.П. Черепанова, H.D. Bui, M. Costabel, G. Dal Maso, L.B. Freund, G.A. Francfort, P. Grisvard, D. Knees, J.-J. Marigo, A. Mielke, M. Negri, K. Ohtsuka, A.-M. Sandig, J. Sokolowski, J.R. Rice, J. Simon, R. Toader и др. исследовались краевые задачи в негладких областях, в том числе и в областях с трещинами. В сравнении с аналогичными краевыми задачами в гладких областях, решения задач теории трещин представляется в виде суммы регулярной и сингулярной частей. Первая имеет ту же гладкость, что и решение для гладкой области, а вторая – определяет максимальную возможную гладкость во всей области из-за наличия особенностей. Отметим, что в общем случае для задач теории трещин с произвольной геометрией или для нелинейных задач вопрос о представлении решения остается открытым.

Учет нелинейных эффектов взаимодействия между берегами трещины приводит к новым классам математических задач. В частности, хорошо известен тот факт, что при решении задач с линейными краевыми условиями на трещине возможно взаимное проникание ее берегов друг в друга. С математической точки зрения это ничему не противоречит, а с физической – невозможно. Наиболее естественно рассматривать условия типа Синьорини одностороннего ограничения решения на границе – условие непроникания берегов трещины. Теория трещин с ограничениями получила свое развитие в последние два десятилетия в работах А.М. Хлуднева с соавторами.

Направление исследований:

а) анализ корректности нелинейных краевых задач в областях с негладкими границами; б) анализ чувствительности функционалов энергии в теории упругости к изменению формы области (shape sensitivity analysis); в) оптимизация геометрических параметров областей, содержащих трещины; г) исследование качественных свойств решений нелинейных краевых задач теории упругости, определенных в негладких областях.

Методы исследования, достоверность и обоснованность результатов. В диссертационной работе используются теоретические методы исследований: методы решений уравнений математической физики, функционального анализа, вариационного исчисления и оптимального управления. Достоверность результатов обосновывается строгими математическими доказательствами, сравнением с другими результатами, известными автору в литературе по математическим и прикладным наукам.

Целью диссертационной работы является строгое математическое обоснование и анализ неклассических краевых задач математической физики, моделирующих поведение упругих тел с жесткими включениями и трещинами и учитывающих нелинейные эффекты взаимодействия между берегами трещины и жесткими включениями.

На защиту выносятся:

- Метод анализа чувствительности функционалов энергии к изменению формы негладкой области в линейных и нелинейных краевых задачах теории упругости для тел с жесткими включениями и трещинами;
- Вывод достаточных условий, при которых производная функционала энергии по параметру возмущения области может быть представлена в виде инвариантного интеграла;
- Результаты об исследовании задач оптимального управления формами трещин в упругих телах;
- Результаты о корректности вариационной постановки и асимптотических свойствах нелинейных контактных задач.

Научная новизна. В диссертационной работе изучен новый класс математических моделей, описывающих поведение упругих тел с трещинами и жесткими включениями и учитывающих нелинейные эффекты на разрезах. На основе современных подходов разработан метод вычисления производных функционалов энергии по форме области для различных моделей упругих тел.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация является опытом успешного систематического применения теории вариационного исчисления, функционального анализа и теории пространств Соболева для анализа чувствительности решений нелинейных краевых задач теории упругости к изменению формы области. Разработан и предложен метод вычисления производных функционалов энергии по параметру, характеризующему изменение формы негладкой области, основанный на вариационных свойствах решений соответствующих краевых задач и позволяющий избежать вычисления материальных производных от решений. Результаты диссертации и разработанные методы полезны специалистам, работающим в области дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, оптимального управления, численного решения задач оптимизации форм. Кроме того, предложенный метод вычисления производных по форме области может быть адаптирован и для других моделей механики сплошных сред, которые допускают вариационную постановку.

Результаты работы могут быть использованы научно-исследовательскими организациями и высшими учебными заведениями (ФГУП Сибирский научно-исследовательский институт авиации, Институт горного дела СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Институт вычислительного моделирования СО РАН и др.), научные направления которых связаны с изучением несущей способности материалов и разработкой технологий оптимизации упругих тел.

Разработанные теоретические методы и полученные результаты внедрены в образовательный процесс студентов и аспирантов механико-математического факультета НГУ и ИГиЛ СО РАН и используются в курсах лекций и семинарах.

Апробация работы.

Результаты по теме диссертации получены в ходе выполнения исследовательских проектов: Гранты Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ (№№МК-9627.2006.1, МК-4338.2008.1, МК-222.2010.1, рук. Е.М. Рудой; №НШ-7525-2006.1, рук. академик РАН В.Н. Монахов, чл.-корр. РАН П.И. Плотников), Российского фонда фундаментальных исследований (№№00-01-00842, 03-01-00124, 06-01-00209, 10-

01-00054, рук. проф. А.М. Хлуднев); Министерства образования РФ (№8247, рук. С.А. Саженков), Министерства образования РФ и Германской службы академических обменов (№71629, рук. Е.М. Рудой); ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"(ГК №П597, рук. проф. А.М. Хлуднев, ГК №02.740.11.0617, рук. чл.-корр. РАН П.И. Плотников) и др. Автор награжден премией им. И.Н. Векуа для молодых ученых СО РАН в 2011 году за цикл работ «Дифференцирование интегралов энергии по форме области в задачах теории упругости, определенных в негладких областях, с односторонними ограничениями на границе».

Результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных научных конференциях, среди которых:
— Международная конференция, посвященная 110-ой годовщине И.Г. Петровского «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (Москва, 2011);
— 6th Singular days on asymptotic methods for PDE's (Berlin, Germany, 2010);
— International Conference on Applied Mathematics and Informatics (ICAMI-2010) (San Andres Island, Colombia, 2010);
— Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященная 110-летию академика М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2010);
— Advanced Problems in Mechanics (Актуальные проблемы механики) (Санкт-Петербург, 2008, 2009, 2010, 2012);
— Всероссийская конференция, приуроченная к 90-летию академика Л.В. Овсянникова «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение» (Новосибирск, 2009);
— Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева «Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений» (Новосибирск, 2008);
— Дальневосточная Математическая Школа-Семинар имени академика Е.В. Золотова (Владивосток, 2003, 2008);
— Пятая Всероссийская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2008);
— Workshop on Destruction: Mathematical Modeling of Tsunami Waves and Cracks Propagation (Keio University, Yakohama, Japan, 2007);
— Международная конференция по математическому моделированию (Якутск, 2007, 2011);
— Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения» (Новосибирск, 2007);
— Фундаментальные и прикладные вопросы механики (Владивосток, 2006).

Результаты работы были представлены на научных семинарах под руководством академика РАН Б.Д. Аннина (ИГиЛ СО РАН); чл.-корр. РАН П.И. Плотникова (ИГиЛ СО РАН); чл.-корр. РАН В.В. Пухначева (ИГиЛ СО РАН); чл.-корр. РАН В.Г. Романова (ИМ СО РАН); д.ф.-м.н. А.М. Хлуднева (ИГиЛ СО РАН); д.ф.-м.н. В.С. Белоносова, д.ф.-м.н. М.В. Фокина (ИМ СО РАН); д.ф.-м.н. Г.В. Демиденко (ИМ СО РАН); д.ф.-м.н. А.М. Блохина (ИМ СО РАН); профессора Ф. Трельча (Институт математики, Технический университет, Берлин, Германия); профессора В.Л. Вендланда (Институт прикладного анализа и численного моделирования, Технический университет, Штутгарт, Германия).

Публикации. Полученные результаты содержатся в 15 статьях, опубликованных в рецензируемых научных журналах [1]–[15], а также в сборниках и трудах конференций. Работа [14] написана совместно с чл.-корр. РАН П.И. Плотниковым, а работа [10] – с проф. А.М. Хлудневым. Вклад авторов в эти работы является равноценным, поэтому результаты целиком вошли в настоящую диссертацию.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 222 наименования работ отечественных и зарубежных авторов. Работа изложена на 292 страницах текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность тематики диссертации, дан обзор литературы по краевых задачам в негладких областях в приложении к задачам теории трещин, контактным задачам и смежным областям. Приведена структура и изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава состоит из двух параграфов. В первом параграфе содержатся некоторые вспомогательные сведения из функционального анализа, уравнений математической физики, теории пространств Соболева, вариационного исчисления. Вводится понятие гладкости области с трещиной, определятся функциональные пространства на границе областей с трещинами.

Второй параграф главы посвящен описанию основных математических моделей теории упругости, рассматриваемых в диссертации. Кроме того, в параграфе формулируются основные постулаты механики деформируемого твердого тела, приводятся обобщенные формулы Грина как для гладких областей, так и для областей с разрезами.

Определим область с разрезом. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$. Пусть внутри Ω содержится многообразие γ размерности Хаусдорфа $N-1$ (кривая – при $N = 2$ или поверхность – при $N = 3$). Считаем, что γ – не замкнуто. Мы будем отождествлять такое многообразие γ с разрезом или трещиной. Обозначим через $\partial\gamma$ край многообразия γ. Отметим, что в случае $N = 2$ это есть вершины трещины, а в случае $N = 3$ — фронт трещины. Будем считать, что $\gamma = \gamma \setminus \partial\gamma$ и $\overline{\gamma} = \gamma \cup \partial\gamma$.

Выберем и зафиксируем направление единичной нормали $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ к γ, которое определит положительный берег γ^+ разреза γ (с внешней нормалью $(-\nu)$) и отрицательный берег γ^- (с внешней нормалью ν). Определим область с трещиной Ω_γ как $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \overline{\gamma}$, граница которой $\partial\Omega_\gamma$ есть $\partial\Omega \cup \gamma^- \cup \gamma^+ \cup \partial\gamma$. Очевидно, что граница области с трещиной не является Липшиц-непрерывной.

Предположим, что существует замкнутое расширение Σ многообразия γ, делящее Ω на две подобласти Ω_1, Ω_2 с границами $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$, такими что $\gamma \subset \Sigma$. Предполагается, что $\partial\Omega_1 = \Sigma$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma$. Будем говорить, что граница $\partial\Omega_\gamma$ принадлежит классу $C^{k,1}$, если $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ принадлежат $C^{k,1}$. Заметим, что если граница $\partial\Omega_\gamma \in C^{0,1}$, то она удовлетворяет условию конуса.

Обозначим через $u = (u_1, \ldots, u_n)$ – вектор перемещений, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ – тензор напряжений, $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ – линейный тензор деформаций,

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

При формулировке краевых задач теории упругости в работе используется подход Лагранжа, при котором считается, что каждая частица тела находится в естественном состоянии, и задача состоит в отыскании u, σ, ε как функций координат. Будем считать, что тензор напряжений σ и тензор деформаций ε связаны между собой линейным законом Гука (уравнение состояния):

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1, \ldots, N,$$

где $\{c_{ijkl}\}$ – тензор коэффициентов упругости, удовлетворяющий условию симметричности и положительной определенности,

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}, \quad i, j, k, l = 1, \ldots, N,$$

$$c_0\xi_{ij}\xi_{ij} \geq c_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0^{-1}\xi_{ij}\xi_{ij},$$
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : \ \xi_{ij} = \xi_{ji},\, c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Другой моделью упругого тела, которую мы будем изучать, является модель пластины Кирхгофа-Лява. Пластиной мы будем называть тело, которое в естественном состоянии занимает объем вида $\Omega \times (-h, h)$, где $2h$ – толщина пластины, являющаяся малым параметром. В качестве искомых величин выступают горизонтальные перемещения $U = (u_1, u_2)$ и прогибы w срединной поверхности пластины $\Omega \times \{0\}$. При этом перемещения U^z и прогибы w^z произвольной точки пластины зависят от срединных по следующему правилу

$$w^z = w, \quad U^z = U - z\nabla w, \quad z \in (-h, h)\,.$$

Уравнения состояния имеют вид:

$$\sigma_{ij}(U) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(U), \quad m_{ij} = d_{ijkl}w_{,kl}, \; i,j = 1,2,$$

где тензоры $\{c_{ijkl}\}$ и $\{d_{ijkl}\}$ удовлетворяют условиям симметричности и положительной определенности. Тензор $m = \{m_{ijkl}\}$ называется тензором моментов.

В приложениях механики деформируемого твердого тела встречаются такие материалы, которые содержат неоднородности, коэффициенты упругости которых значительно больше коэффициентов упругости матрицы. В этом случае при моделировании поведения таких тел естественно считать, что такие неоднородности не деформируется. С математической точки зрения это означает, что тензор деформаций $\varepsilon(u)$ равен нулю в некоторой подобласти ω исходной области. В этом случае векторное поле u называется инфинитезимальным жестким перемещением. Множество всех инфинитезимальных жестких перемещений на ω будем обозначать через $R(\omega)$. Инфинитезимальные жесткие перемещения имеют специальную структуру:

$$u(x) = Bx + C, \quad x \in \omega,$$

$B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ – кососимметрическая матрица, $C \in \mathbb{R}^N$ – постоянный вектор. В частности, при $N = 3$ множество $R(\omega)$ имеет следующую структуру

$$R(\omega) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \mid \rho(x) = Bx + C, \; x \in \omega\},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c^1, c^2, c^3); \quad b_{ij}, c^i = const, \; i,j = 1,2,3.$$

При $N = 2$ имеем

$$R(\omega) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Bx + C, \; x \in \omega\},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \; C = (c^1, c^2); \; b, c^1, c^2 = const.$$

Пусть область $\Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^N$ – область с трещиной γ класса $C^{1,1}$. Пусть ν – вектор единичной нормали к γ, $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$. Рассмотрим тензоры напряжений $\sigma(u)$ и деформаций $\varepsilon(u)$, где u, v – векторы перемещений в Ω_γ. Разложим векторы $(\sigma_{1j}(u)n_j, \dots, \sigma_{Nj}(u)n_j)$ и $v = (v_1, \dots, v_N)$ на нормальную и касательные составляющие на γ:

$$\sigma_{ij}(u)\nu_j = \sigma_\nu(u)\nu_i + \sigma_{\tau i}(u),\ i = 1, \dots, N,$$

$$\sigma_\nu(u) = \sigma_{ij}(u)\nu_j\nu_i,$$

$$v_i = v_\nu \nu_i + v_{\tau i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad v_\nu = v_i \nu_i.$$

Определим векторное пространство

$$H(\Omega_\gamma) = \{u \in H^1(\Omega_\gamma)^N \mid \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$$

с нормой

$$\|u\|^2_{H(\Omega_\gamma)} = \sum_{i=1}^{N} \|u\|^2_{L_2(\Omega_\gamma)} + \sum_{i,j=1}^{N} \|u_{i,j}\|^2_{L_2(\Omega_\gamma)},$$

и пространство

$$H_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma) = \{u \in H(\Omega_\gamma) \mid \quad \sigma_{ij,j}(u) \in L_2(\Omega_\gamma),\ i = 1, \dots, N\}$$

с нормой

$$\|u\|^2_{H_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma)} = \|u\|^2_{H(\Omega_\gamma)} + \sum_{i=1}^{N} \|\sigma_{ij,j}(u)\|^2_{L_2(\Omega_\gamma)}.$$

Рассмотрим в нем множество

$$\tilde{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma) = \{u \in H_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma) \mid \quad [\sigma_{ij}(u)\nu_j] = 0 \text{ на } \Sigma\},$$

где Σ – некоторое замкнутое $(N-1)$-мерное многообразие, являющееся $C^{1,1}$-гладким продолжением трещины γ. Справедлива обобщенная формула Грина.

Теорема 1.1 *Пусть граница $\partial\Omega_\gamma$ класса $C^{1,1}$. Пусть $u \in \tilde{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma)$. Существует линейный непрерывный оператор*

$$\tilde{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma) \to [H^{1/2}_{00}(\gamma)^*]^{N+1},$$

который определяет на трещине γ единственным образом значения

$$\sigma_\nu(u),\ \sigma_{\tau i} \in [H^{1/2}_{00}(\gamma)^*]^N, \quad i = 1, \dots, N$$

и справедлива обобщенная формула Грина

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\,dx = -\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij,j}(u)v_i\,dx -$$

$$- \langle \sigma_\nu(u), [v_\nu] \rangle_{00,1/2,\gamma} - \langle \sigma_{\tau i}(u), [v_{\tau i}] \rangle_{00,1/2,\gamma}$$

для произвольной $v \in H(\Omega_\gamma)$*; скобки* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{00,1/2,\gamma}$ *обозначают двойственность между* $H^{1/2}_{00}(\gamma)$ *и* $H^{1/2}_{00}(\gamma)^*$*.*

Обратно, существует линейный непрерывный оператор поднятия

$$[H^{1/2}_{00}(\gamma)^*]^{N+1} \to \tilde{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma),$$

который для любых заданных λ_ν, $\lambda_{\tau i} \in H^{1/2}_{00}(\gamma)^*$, $i = 1, \ldots, N$, *определяет функцию* $u \in \tilde{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma)$*, обладающую свойствами*

$$\sigma_\nu(u) = \lambda_\nu, \quad \sigma_{\tau i}(u) = \lambda_{\tau i},\ i = 1, \ldots, N, \quad \text{на } \gamma.$$

Рассмотрим основные граничные условия, которые мы будем задавать на трещине. Пусть Ω_γ – упругое тело с трещиной γ. Как правило в диссертационной работе рассматриваются краевые задачи, в которых на трещине задаются условия одностороннего ограничения – условие непроникания берегов трещины, которое в теории упругости имеет вид:

$$[u]\nu \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Здесь $[u] = u|_{\gamma^+} - u|_{\gamma^-}$ обозначает скачок функции u на γ.

Для модели пластин Кирхгофа-Лява условие непроникания имеет следующий вид:

$$[U]\nu \geq h \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right|,$$

где $U = (u_1, u_2)$ – горизонтальные перемещения срединной поверхности пластины; w – ее вертикальные прогибы; h – половина толщины пластины.

Основным результатом первой главы является обоснование корректности основных математических моделей упругих тел, содержащих трещины и жесткие включения. Модели представлены в виде вариационных задач – задач минимизации соответствующих функционалов потенциальной энергии на множестве допустимых смещений.

Во второй главе исследуется чувствительность функционалов энергии к изменению формы области для задач N-мерной ($N = 2, 3$) теории упругости, описывающих поведение тел с трещинами с возможным контактом берегов.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Пусть строго внутри области Ω расположен разрез Γ_0 как $(N-1)$-мерное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^N$. Пусть γ_0 обозначает край разреза Γ_0. Определим область, содержащую разрез, в пространстве $\mathbb{R}^N$ как $\Omega_0 = \Omega \backslash \overline{\Gamma}_0$ с границей $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \cup \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^- \cup \gamma_0$. Определим вектор нормали $\nu_0 = (\nu_{01}, \ldots, \nu_{0N})$ к Γ_0. Пусть задана функция $f = (f_1, \ldots, f_N) \in C^1(\overline{\Omega})$. Введем вектор перемещений точек тела $U = (u_1, \ldots, u_N)$.

Рассмотрим краевую задачу в негладкой области, соответствующую равновесию упругого тела с трещиной, на берегах которой выполняется условие непроникания, под действием внешних сил:

$$-\sigma_{ij,j}(U) = f_i, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \text{в} \;\; \Omega_0,$$

$$U = 0 \quad \text{на} \;\; \partial\Omega,$$

$$[U]\nu_0 \geq 0, \quad [\sigma_{\nu_0}(U)] = 0, \quad \sigma_{\nu_0}(U)([U]\nu_0) = 0 \quad \text{на} \;\; \Gamma_0,$$

$$\sigma_{\tau i}(U) = 0, \; i = 1, \ldots, N, \quad \sigma_{\nu_0}(U) \leq 0 \quad \text{на} \;\; \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-.$$

При этом дифференциальные уравнения и краевые условия выполняются в обобщенном смысле.

Задача формулируется в вариационном виде – в виде минимизации функционала энергии

$$\Pi(\Omega_0; U) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(U)\,dx - \int\limits_{\Omega_0} fU\,dx$$

на множестве допустимых смещений

$$K_0(\Omega_0) = \Big\{ U \in H(\Omega_0) \mid [U]\nu_0 \geq 0 \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0 \Big\},$$

т.е. требуется найти такую функцию $U_0 \in K_0(\Omega_0)$, что

$$\Pi(\Omega_0; U_0) = \inf_{U \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; U).$$

В силу коэрцитивности, слабой полунепрерывности снизу и строгой выпуклости функционала Π, а так же выпуклости и замкнутости множества $K_0(\Omega_0)$, задача минимизации имеет единственное решение.

Для малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ рассмотрим возмущение $\Phi_\varepsilon = (\Phi_{\varepsilon 1}(x), \ldots, \Phi_{\varepsilon N}(x))$, которое задается функциями $\Phi_i \in C^1[0, \varepsilon_0; W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N))$ и, кроме того, $\Phi_0(x) = x$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и применим взаимно однозначное координатное преобразование

$$y = \Phi_\varepsilon(x)$$

для $x \in \Omega$, $x \in \partial\Omega$ и $x \in \Gamma_0$. В результате получим возмущенную область $\Phi_\varepsilon(\Omega)$ с границей $\Phi_\varepsilon(\partial\Omega)$ и возмущенный разрез $\Gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Gamma_0)$. Определим возмущенную область с разрезом как $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega)\backslash\overline{\Gamma}_\varepsilon$. В возмущенной области Ω_ε по аналогии с невозмущенной определим функционал энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon; U)$, множество допустимых смещений $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ и рассмотрим задачу минимизации: найти такую функцию $U^\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, что

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; U^\varepsilon) = \inf_{U \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; U),$$

которая для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет единственное решение.

Для того, чтобы найти производную функционала энергии по форме области необходимо вычислить предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; U^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; U_0)}{\varepsilon}.$$

Для вычисления этого предела предложен метод, основанный на вариационных свойствах решения задачи минимизации и позволяющий избежать вычисления слабой материальной производной от решения которая, вообще говоря, из-за нелинейности задачи может определяться неоднозначно. Все функции и интегралы, входящие в определение возмущенной задачи, с помощью обратного преобразования координат отображаются на невозмущенную область. Важно отметить, что в то время, как пространство $H(\Omega_\varepsilon)$ отображается в пространство $H(\Omega_0)$ взаимно однозначно при действии обратного отображения, множество допустимых смещений $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, вообще говоря, не переходит во множество допустимых смещений $K_0(\Omega_0)$. Такое соответствие, например, имеет место в случае, когда прямолинейная (плоская) трещина переходит в прямолинейную (плоскую) при возмущении области. В общем же случае такого соответствия нет.

Обозначим прообраз множества $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ в пространстве $H(\Omega_0)$ через

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \Big\{ U \in H(\Omega_0) \mid [U]\nu_\varepsilon \geq 0 \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0 \Big\}.$$

Здесь $\nu_\varepsilon(x) = \nu^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))$ – преобразованный вектор нормали к возмущенной трещине, $x \in \Gamma_0$.

Используя предполагаемую гладкость функции возмущения, доказывается следующая лемма.

Лемма 2.1 *Пусть* $U_0 \in K_0(\Omega_0)$ *– решение невозмущенной задачи,* $U_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ *– решение возмущенной задачи, отображенное на невозмущенную область. Тогда существуют два семейства функций* Q_ε^1 *и* Q_ε^2 *такие, что*

$$\|Q_\varepsilon^i\|_{H(\Omega_0)} \le c, \quad i = 1, 2$$

равномерно по ε*, и справедливы следующие включения:*

$$U_0 + \varepsilon Q_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0), \quad U_\varepsilon - \varepsilon Q_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0).$$

Используя лемму 2.1, доказывается теорема, характеризующая устойчивость решений задач минимизации при возмущении области.

Теорема 2.1 *Справедлива оценка*

$$\|U_\varepsilon - U_0\|_{H(\Omega_0)} \le c\sqrt{\varepsilon}$$

с константой c*, не зависящей от* ε*.*

Отметим, что функции Q_ε^i строятся таким образом, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2 *Для функций* Q_ε^1 *и* Q_ε^2 *верны следующие сходимости при* $\varepsilon \to 0$*:*

$$Q_\varepsilon^1 \to Q_0 \quad \textit{сильно в} \quad H(\Omega_0),$$
$$Q_\varepsilon^2 \to Q_0 \quad \textit{сильно в} \quad H(\Omega_0),$$

где $Q_0 = (V_{1,i}u_{0i}, \ldots, V_{N,i}u_{0i}) \in H(\Omega_0)$*,* $V = (V_1, \ldots, V_N)$ *– скорость преобразования, т.е.*

$$V = \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Одним из основных результатов диссертации является следующая теорема.

Теорема 2.2 *Для каждого возмущения* $\Phi_\varepsilon \in C^1[0, \varepsilon_0; W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$ *существует первая производная функционала энергии* $\Pi(\Omega_\varepsilon; U^\varepsilon)$ *по параметру* *возмущения ε при $\varepsilon = 0$, которая задается формулой*

$$\Pi'(\Phi_0) = \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; U^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Bigg|_{\varepsilon=0} = \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(U_0)\varepsilon_{ij}(Q_0)\,dx - \int\limits_{\Omega_0} fQ_0\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} A_1(V; U_0, U_0)\,dx - \int\limits_{\Omega_0} \mathrm{div}(Vf_i)u_{0i}\,dx,$$

где U_0 – решение невозмущенной задачи, $Q_0 = (V_{1,i}u_{0i}, \ldots, V_{N,i}u_{0i})$,

$$A_1(V; U_0, U_0) = \mathrm{div} V \sigma_{ij}(U_0)\varepsilon_{ij}(U_0) - 2\sigma_{ij}(U_0)E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; U_0\right),$$

$$E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; U\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}V_{k,j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}V_{k,i}\right).$$

Далее показывается, что производная функционала энергии представима в виде инвариантного интеграла. Если существует подобласть D в Ω такая, что: решение $U_0 \in H^2(D)$; $V = 0$ или $f = 0$ в $\Omega_0 \setminus D$; справедливо условие

$$c_{ijkl}\xi_{kl}\left(\frac{1}{2}\mathrm{div} V\xi_{ij} - \xi_{in}V_{n,j} + \xi_{nj}V_{i,n} + V_{i,nj}\eta_n\right) = 0$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $\eta \in \mathbb{R}^N$, то $\Pi'(\Phi_0) = I(V)$ с инвариантным интегралом общего вида

$$I(V) = \int\limits_{\partial D} \sigma_{ij}(U_0)\left(\frac{1}{2}(V \cdot n)\varepsilon_{ij}(U_0) - n_j(V \cdot \nabla u_{0i}) + n_jV_{i,k}u_{0k}\right) ds$$

по границе ∂D с внутренней нормалью $n = (n_1, \ldots, n_N)$.

Построены инвариантные интегралы в частных случаях возмущения области с трещиной: сдвиг всего разреза для $N = 2$ и $N = 3$; растяжение криволинейной трещины в $\mathbb{R}^2$ вдоль заданной кривой. В последнем случае инвариантный интеграл имеет вид

$$J = \int\limits_{\partial D} \sigma_{ij}(U_0)\left(\frac{1}{2}(\tau \cdot n)\varepsilon_{ij}(U_0) - n_j(V \cdot \nabla u_{0i})\right) ds +$$

$$+ \int\limits_{\partial D}\Big(-\sigma_{11}(U_0)n_1u_{02} + \sigma_{12}(U_0)(n_1u_{01} - n_2u_{02}) +$$

$$+ \sigma_{22}(U_0)n_2u_{01}\Big)\,ds$$

и носит название интеграла Черепанова-Райса. Для криволинейных трещин с условием непроникания такой интеграл получен впервые.

Для двухмерной теории упругости получена производная функционала энергии по длине криволинейной трещины с условиями одностороннего ограничения ее берегов. Пусть кривая Σ на плоскости (x_1, x_2) задается функцией $\psi \in H^3(-l_0, l_1)$ такой, что

$$\Sigma = \{x_2 = \psi(x_1), \quad -l_0 < x_1 < l_1\}, \quad l_0, l_1 > 0.$$

Пусть трещина Γ_l, лежащая внутри области Ω, описывается частью кривой Σ:

$$\Gamma_l = \{x_2 = \psi(x_1), \quad 0 < x_1 < l\}, \quad 0 < l < l_1,$$

где l – параметр, определяющий длину проекции Γ_l на ось x_1. Тогда возмущение

$$y_1 = x_1 + \varepsilon\theta(x_1, x_2), \quad y_2 = x_2 + \psi(x_1 + \varepsilon\theta(x_1, x_2)) - \psi(x_1),$$

задает квазистатический рост трещины Γ_l вдоль кривой Σ. Здесь θ – произвольная гладкая финитная в Ω функция, которая равна единице в некоторой окрестности вершины трещины. Формула для производной функционала энергии по длине трещины имеет следующий вид

$$\Pi'(s) = \frac{\Pi'(l)}{\sqrt{\psi'(l)^2 + 1}},$$

где s – длина трещины Γ_l,

$$\Pi'(l) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \sigma_{ij}(U_0) \varepsilon_{ij}(U_0)\, dx -$$
$$- \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(W_0) E_{ij}(\theta; U_0)\, dx - \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau}(\theta f_i) u_{i0}\, dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(U_0) \varepsilon_{ij}(Q_0)\, dx - \int\limits_{\Omega_0} f Q_0\, dx,$$

$Q_0 = (0, \theta\psi'' u_{01})$, τ – единичный касательный вектор к трещине Γ_l.

Также для трехмерного тела с трещиной, на берегах которой заданы условия непроникания, установлена дифференцируемость функционала энергии по параметру, характеризующему квазистатический рост трещины вдоль заданной поверхности. Пусть $\omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная плоская область в пространстве $\mathbb{R}^3$, ограниченная контуром γ_0. Будем считать, что точка

$(0,0,0)$ лежит строго внутри области ω_0, и область ω_0 описывается в полярных координатах (r,ϕ), определенных в $\mathbb{R}^2$, следующим образом:

$$\omega_0 = \{r < R(\phi),\ \phi \in [0,2\pi],\ R(0) = R(2\pi),\ R > 0\}.$$

В этом случае

$$\gamma_0 = \{r = R(\phi),\ \phi \in [0,2\pi],\ R(0) = R(2\pi),\ R > 0\},$$

$$\overline{\omega}_0 = \omega_0 \cup \gamma_0.$$

Будем считать, что трещина Γ_0, лежащая строго внутри области Ω, является частью поверхности Ξ и задается следующим образом:

$$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \psi(x_1,x_2),\ (x_1,x_2) \in \omega_0\}.$$

Определим следующее возмущение области, соответствующее квазистатическому росту трещины вдоль поверхности Ξ:

$$y_1 = x_1 + \delta h(\phi(x_1,x_2)) \cos\phi(x_1,x_2)\eta(x),$$

$$y_2 = x_1 + \delta h(\phi(x_1,x_2)) \sin\phi(x_1,x_2)\eta(x),$$

$$y_3 = x_3 + \psi(y_1,y_2) - \psi(x_1,x_2),$$

где η – финитная в Ω функция, равная единице в некоторой окрестности фронта трещины; h – функция, задающая возмущение фронта трещины. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2.3 *Производная функционала энергии $\Pi(\Omega_\delta;U^\delta)$ по параметру δ при $\delta=0$ существует и задается формулой*

$$\left.\frac{d\Pi(\Omega_\delta;U^\delta)}{d\delta}\right|_{\delta=0} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} (h\theta_k)_{,k}\sigma_{ij}(U_0)\varepsilon_{ij}(U_0)\,dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(U_0)E_{ij}(\eta;U_0)\,dx - \int\limits_{\Omega_0} h(\theta_i f_j)_{,i} u_{0j}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(U_0)\varepsilon_{ij}(Q_0)\,dx - \int\limits_{\Omega_0} fQ_0\,dx.$$

где $\theta_k = x_k\eta/\sqrt{x_1^1 + x_2^2}$, $k=1,2$, $\theta_3 = \theta_1\psi_{,1} + \theta_2\psi_{,2}$, $Q_0 = (0,0,h\theta_\beta\psi_{,\alpha\beta}u_{0\alpha})$, $E_{ij}(\eta;U) = 1/2\left((h\theta_k)_{,j}\frac{\partial u_i}{\partial y_k} + (h\theta_k)_{,i}\frac{\partial u_j}{\partial y_k}\right)$.

Исследованы задачи оптимального управления формой трещины и ее фронтом в трехмерной теории упругости. При этом функционалом качества выступает производная функционала энергии по параметру возмущения области, соответствующему квазистатическому росту трещины. Доказаны теоремы существования решений задач минимизации соответствующих функционалов на некотором множестве допустимых функций. С точки зрения критерия Гриффитса ищутся наиболее опасные формы разрезов в упругих телах.

Исследована двумерная вариационная модель упругого тела с отслоившемся тонким участком границы и находящегося в равновесии под действием внешних сил (F, g), действующих как на упругое тело, так и на отслоившийся участок. При этом на таком участке задаются условия одностороннего ограничения. Задача равновесия формулируется в виде задачи минимизации функционала энергии системы

$$\Pi(\bar{U}, \bar{w}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{U})\varepsilon_{ij}(\bar{U})dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha} a\bar{w}_{,11}^2 dx_1 - \int\limits_{\Omega} F\bar{U}dx - \int\limits_{\alpha} g\bar{w}dx_1$$

на множестве допустимых смещений

$$K_0 = \{\bar{U}, \bar{w}) \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times H^2_0(\alpha) \mid \bar{U}\nu \geq \bar{w} \quad \text{п.в. на} \quad \alpha\}.$$

Здесь Ω – область, занимаемая упругим телом, α – отслоившейся участок границы (балка), U – перемещения точек тела, w – прогибы балки.

Показано, что слабое решение (U, w) удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям и краевым условиям:

$$-\sigma_{ij,j}(U) = f_i \quad \text{в} \quad \Omega, \quad i = 1, 2,$$

$$(aw_{,11})_{,11} - g \leq 0 \quad \text{на} \quad \alpha,$$

$$\sigma_{\tau i}(U) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \sigma_\nu(U) \leq 0 \quad \text{на} \quad \alpha,$$

$$\sigma_\nu(U) = (aw_{,11})_{,11} - g, \quad \sigma_\nu(U)(U\nu - w) = 0 \quad \text{на} \quad \alpha,$$

$$U = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D,$$

$$w = w_{,1} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \text{ и } x_1 = l.$$

Определены функциональные пространства, в смысле которых выполнены дифференциальные уравнения и краевые условия.

Исследованы асимптотические свойства решения при варьировании длины балки и ее жесткостных характеристик. В частности, показано, что при стремлении жесткости балки к бесконечности последовательность решений стремится к функции, являющейся решением классической задачи

Синьорини об одностороннем контакте упругого тела с жестким гладким штампом.

Основными результатами второй главы являются анализ чувствительности форм нелинейных трещин с условием одностороннего ограничения для N-мерных ($N = 2, 3$) задач теории упругости; изучение модели упругого тела с отслоившимся участком границы; исследование задач оптимального управления формой.

В третьей главе рассматриваются эллиптические краевые задачи четвертого порядка, описывающие поведение упругих пластин. Отличительной особенностью общих зависимостей, относящихся к пластинам, является сведение уравнений трехмерной теории упругости к уравнениям для двух измерений. Модель пластины основана на гипотезе Кирхгофа-Лява, которая состоит в том, что любое нормальное к срединной поверхности волокно до деформации остается нормальным к срединной поверхности и после деформации. Дополнительное допущение состоит в том, что нормальными напряжениями в направлении нормали к срединной поверхности можно пренебречь по сравнению с основными напряжениями (нормальными и касательными напряжения в срединной поверхности).

Пусть дана область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей. Пусть кривая Γ_0 лежит строго внутри Ω. Пусть $f \in C^1(\overline{\Omega})$ — заданный вектор внешних сил. В области $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_0$ рассмотрим смешанную нелинейную краевую задачу

$$\sigma_{ij,j}(W_0) = f_i, \quad i = 1, 2 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega_0,$$

$$\Delta^2 w_0 = f_3, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega_0,$$

$$[W]\nu_0 \geq \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu_0} \right] \right| \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0,$$

$$\sigma_\nu(W_0) \leq 0, \quad \sigma_{\tau i}(W_0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0,$$

$$t(w_0) = 0, \quad m(w_0) \left[\frac{\partial w_0}{\partial \nu} \right] + \sigma_\nu [W_0]\nu = 0 \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0,$$

$$[\sigma_\nu(W_0)] = 0, \quad [m(w_0)] = 0, \quad |m(w_0)| \leq -\sigma_\nu(W_0) \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0,$$

$$w_{01} = w_{02} = w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0 \quad \text{п.в. на} \quad \partial\Omega.$$

Здесь W – вектор перемещений, w – прогибы срединной поверхности пластины; $\sigma_\nu(W_0)$, $\sigma_{\tau 1}(W_0)$, $\sigma_{\tau 2}(W_0)$, $t(w_0)$ и $m(w_0)$ задаются следующими формулами:

$$\sigma_\nu(W_0) = \sigma_{ij}(W_0)\nu_j\nu_i,$$

$$\sigma_{\tau i}(W_0) = \sigma_{ij}(W_0)\nu_j - \sigma_\nu(W_0)\nu_i, \ i = 1, 2,$$

$$t(w_0) = \frac{\partial}{\partial \nu}\Delta w_0 + (1-k)\frac{\partial^3 w_0}{\partial \nu \partial \tau^2},$$

$$m(w_0) = k\Delta w_0 + (1-k)\frac{\partial^2 w_0}{\partial \nu^2},$$

где $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ — единичный касательный вектор к Γ_0; n — единичный вектор внешней нормали к Ω; ν_0 – единичный вектор нормали к Γ_0.

Основным результатом главы является вывод формулы для производной функционала энергии по форме области. Для того, чтобы найти такую производную, вводится взаимно однозначное возмущение $y = \Phi_\varepsilon(x)$ области Ω_0, зависящее от малого параметра $\varepsilon > 0$. При этом поле кинематических скоростей $V = \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ принадлежит пространству $W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Для каждого $\varepsilon \geq 0$ определяется функционал потенциальной энергии

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; \chi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)\ dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} b(w,w)\ dy - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f^t \chi\ dy,$$

и множество допустимых смещений пластины

$$K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) = \left\{\chi \in H(\Omega_\varepsilon) \mid [W]\nu^\varepsilon \geq \left|\left[\frac{\partial w}{\partial \nu^\varepsilon}\right]\right| \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_\varepsilon\right\}.$$

Здесь $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega_0)$ – возмущенная область с трещиной $\Gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Gamma_0)$, ν^ε – единичная нормаль к Γ_ε,

$$H(\Omega_\varepsilon) = H^{1,0}(\Omega_\varepsilon) \times H^{1,0}(\Omega_\varepsilon) \times H^{2,0}(\Omega_\varepsilon),$$

$$H^{1,0}(\Omega_\varepsilon) = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon) \mid u = 0 \quad \text{п.в. на } \partial\Omega\},$$

$$H^{2,0}(\Omega_\varepsilon) = \left\{w \in H^2(\Omega_\varepsilon) \mid w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{п.в. на } \partial\Omega\right\},$$

$$b(u,v) = u_{,11}v_{,11} + u_{,22}v_{,22} + ku_{,11}v_{,22} + ku_{,22}v_{,11} + 2(1-k)u_{,12}v_{,12}.$$

Для вычисления производной функционала энергии по параметру ε все функции и интегралы, входящие $\Pi(\Omega_\varepsilon; \chi)$, отображаются на невозмущенную область Ω_0. При этом образом множества допустимых смещений возмущенной задачи $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ в пространстве $H(\Omega_0)$ является множество

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \{\chi \in H(\Omega_0) \mid [W^t]\nu_\varepsilon \geq \left| \left[(\nabla w)^t \Psi^t \nu_\varepsilon\right] \right| \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0\},$$

где $\nu_\varepsilon(x) = \nu^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))$, $x \in \Gamma_0$. Заметим, что $K_0(\Omega_0) \neq K_\varepsilon(\Omega_0)$. Это связано, во-первых, с тем, что ν_ε в общем случае не совпадает с вектором единичной нормали ν_0 к невозмущенной трещине Γ_0. Такого совпадения нет даже для прямолинейных трещин. Во-вторых, условие непроникание содержит оператор градиента, который не инвариантен относительной произвольного преобразования координат.

Решающую роль при выводе формулы для производной функционала энергии играет следующая лемма.

Лемма 3.1 *Пусть* $\chi_0 \in K_0(\Omega_0)$ *— решение невозмущенной задачи,* $\chi_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ *— решение возмущенной задачи, отображенное на область* Ω_0*. Тогда можно построить два семейства функций* λ_ε^1 *и* λ_ε^2 *такие, что справедливы следующие включения:*

$$\chi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0), \quad \chi_\varepsilon - \varepsilon\lambda_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0).$$

При доказательстве леммы 3.1 используется линейный непрерывный оператор поднятия с нелипшицевой границы $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \cup \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$ в область Ω_0. Функции λ_ε^1 и λ_ε^2 строятся таким образом, что существует вектор-функция $\lambda_0 = (\tilde{W}_0, \tilde{w}_0) \in H(\Omega_0)$ такая, что

$$\lambda_\varepsilon^i \to \lambda_0 \quad \text{сильно в} \quad H(\Omega_0), \quad i = 1, 2.$$

При этом на разрезе Γ_0 вектор-функция λ_0 удовлетворяет следующим условиям:

$$\tilde{W}_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t W_0 \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0^\pm,$$

$$(\nabla\tilde{w}_0)^t\nu_0 = (\nabla w_0)^t\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t\right)\nu_0 \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0^\pm.$$

Лемма 3.1 позволяет исследовать чувствительность функционала энергии к изменению формы области. Справедлива следующая

Теорема 3.1 *Для любого возмущения* $\Phi_\varepsilon \in C^1[0, \varepsilon_0; W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N))$ *существует первая производная функционала энергии* $\Pi(\Omega_\varepsilon; \chi^\varepsilon)$ *по параметру возмущения* ε *при* $\varepsilon = 0$*, которая задается формулой*

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; U^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} A_1(V; W_0, W_0)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} A_2(V; w_0, w_0)\,dx -$$
$$- \int\limits_{\Omega_0}\Big(\operatorname{div}(Vf_i)w_{0i} + \operatorname{div}(Vf_3)w_0\Big)\,dx -$$
$$- \langle\sigma_\nu(W_0), [W_0^t]\frac{\partial V}{\partial x}\nu_0\rangle_{00,1/2,\Gamma_0} -$$
$$- \langle m(w_0), [(\nabla w_0)^t]\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t\right)\nu_0\rangle_{00,1/2,\Gamma_0},$$

где

$$A_1(V;W_0,W_0)=\mathrm{div}V\sigma_{ij}(W_0)\varepsilon_{ij}(W_0)-2\sigma_{ij}(W_0)E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x};W_0\right),$$

$$A_2(V;w_0,w_0)=b(w_0,w_0)\mathrm{div}V-2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)^t K\bar{\psi}(V)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-$$
$$-2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)^t K\bar{a}(V)\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\bar{a}(V)=\begin{pmatrix} V_{1,11} & V_{2,11}\\ V_{1,12} & V_{2,12}\\ V_{1,22} & V_{2,22}\end{pmatrix},\quad \bar{\psi}(V)=\begin{pmatrix} 2V_{1,1} & 2V_{2,1} & 0\\ V_{1,2} & V_{1,1}+V_{2,2} & V_{2,1}\\ 0 & 2V_{1,2} & 2V_{2,2}\end{pmatrix},$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 0 & k\\ 0 & 2(1-k) & 0\\ k & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$\partial/\partial x=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2)$, $\partial^2/\partial x^2=(\partial^2/\partial x_1^2,\partial^2/\partial x_1\partial x_2,\partial^2/\partial x_2^2)$.

Рассмотрена задача о равновесии пластины, срединная поверхность которой занимает область Ω_0 с трещиной Γ_0. На берегах трещины задаются линейные краевые условия. Пластина находится в равновесии под действием внешней силы f. Ищется только функция прогибов w_0 срединной поверхности пластины, которая является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta^2 u_0=f\quad \text{п.в. в}\quad \Omega_0,$$

$$u_0=\frac{\partial u_0}{\partial n}=0\quad \text{п.в. на}\quad \partial\Omega,$$

$$m(u_0)=0,\ t(u_0)=0\quad \text{на}\quad \Gamma_0^{\pm}.$$

Пусть кинематическое поле скоростей V принадлежит пространству $W^{2,\infty}_{loc}(\Omega)$. Рассматривается возмущение области, соответствующее полю скоростей V. Выводится формула для производной функционала энергии пластины по параметру возмущения области.

Далее на основе формулы для производной функционала энергии строятся инвариантные интегралы. Если существует подобласть D в Ω_0 такая, что решение $u_0\in H^4(D)$; $V=0$ или $f=0$; справедливы тождества

$$\xi^t(K\mathrm{div}V-K\bar{\psi}(V)-\bar{\psi}^t(V)K)\xi=0,$$

$$\xi^t K\bar{a}(V)\zeta = 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega_0 \setminus \overline{D} \ \ \forall (\xi,\zeta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2,$$

то производная функционала энергии представляется в виде инвариантного интеграла по границе ∂D.

Приведены примеры инвариантных интегралов для частных случаев: возмущение всего разреза и возмущение одной из вершин трещины в направлении касательного вектора.

Четвертая глава посвящена исследованию задач теории упругости для различных моделей упругих тел с трещинами и жесткими включениями.

Исследована модель упругой пластины Ω_0, содержащей трещину γ_0 и жесткое включение ω. С математической точки зрения под жестким включением подразумевается такая часть области, в которой заранее задана структура решения. В данной задаче это означает, что сужения допустимых функций на область ω, среди которых ищется минимум интеграла энергии, являются непрерывными аффинными функциями. Краевая задача имеет следующий вид:

$$\Delta^2 u_0 = f \quad \text{п.в. в} \quad \Omega \backslash \overline{\omega},$$

$$u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0 \quad \text{п.в. на} \quad \partial\Omega,$$

$$u_0(x) = a_0^0 + a_0^1 x_1 + a_0^2 x_2 \quad \text{п.в. в} \quad \omega, \ a_0^i = const, \ i = 0,1,2$$

$$[u_0] = 0, \ \left[\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right] = 0 \quad \text{п.в. в} \quad \partial\omega \setminus \overline{\gamma}_0,$$

$$m(u_0) = 0, \ t(u_0) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0^+,$$

$$-\int\limits_{\partial\omega^+} t(u_0) l + \int\limits_{\partial\omega^+} m(u_0) \frac{\partial l}{\partial \nu} = \int\limits_{\omega} f l \, dx \quad \forall l \in L(\omega).$$

Через $L(\omega)$ обозначено пространство жестких перемещений на ω, т.е.

$$L(\omega) = \{ l \mid l(x_1, x_2) = a^0 + a^1 x_1 + a^2 x_2, \\ a^i \in \mathbb{R}, \ i = 0,1,2, \ (x_1, x_2) \in \omega \}.$$

С помощью линейного возмущения сдвига

$$y_1 = x_1 + \delta\theta(x_1, x_2), \quad y_2 = x_2,$$

получена формула для производной интеграла энергии по длине трещины. Показано, что такая производная представима в виде криволинейного интеграла вдоль незамкнутой кривой, концы которой лежат на границе области, занимаемой жестким включением. При этом значение криволинейного интеграла не зависит от выбора пути интегрирования.

Исследована N-мерная ($N = 2, 3$) задача теории упругости для тела, содержащего жесткое включение ω_0 и трещину γ_0:

$$-\sigma_{ij,j}(U_0) = f_i \quad \text{в} \quad \Omega \backslash \overline{\omega}_0,\ i = 1, 2,$$

$$u_{01} = u_{02} = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

$$U_0 = \rho_0 \text{ в } \omega_0,$$

$$\sigma_\tau(U_0) = 0,\ \sigma_\nu(U_0) = 0 \text{ на } \gamma_0^+$$

$$-\langle \sigma(U_0)\nu_0, \rho \rangle_{1/2, \partial\omega_0} = \int\limits_{\omega_0} F^t \rho\, dx, \quad \forall \rho \in R(\omega_0).$$

Предполагается, что на части границы соединения включения и упругой матрицы имеется трещина γ_0, а на остальной части границы – полное сцепление. Поверхность трещины свободна от напряжений. Здесь через ω_0 обозначена область, соответствующая жесткому включению, $R(\omega_0)$ – пространство жестких перемещений,

$$R(\omega_0) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Bx + C,\ x = (x_1, x_2) \in \omega_0\},$$

где B — произвольная постоянная кососимметрическая матрица, C — произвольный постоянный вектор. Получена производная функционала энергии по форме области. Рассмотрены частные случаи возмущений области, соответствующие квазистатическому росту трещины по границе жесткого включения.

Для двухмерной модели упругого тела с жестким включением и трещиной построены J- и M-инвариантные интегралы. Показано существование инвариантных интегралов по незамкнутым кривым, вершины которых лежат на границе жесткого включения:

$$J_p^\omega = \int\limits_S \Big((p \cdot n) W(U_0) - t_i(U_0)(p \cdot \nabla u_{0i}) + b_0 (t_1(U_0) p_2 - t_2(U_0) p_1) \Big)\, ds,$$

$$M^\omega = \int\limits_S \Big((x \cdot n) W(U_0) - t_i(U_0)(x \cdot \nabla u_{0i}) + b_0 (t_1(U_0) x_2 - t_2(U_0) x_1) \Big)\, ds,$$

где $W(U_0) = 1/2 \sigma_{ij}(U_0) \varepsilon_{ij}(U_0)$ – плотность упругой энергии, $p = (p_1, p_2)$ – произвольный постоянный вектор, $t(U_0) = (t_1(U_0), t_2(U_0))$ – вектор поверхностных усилий, $t_i(U_0) = \sigma_{ij}(U_0) n_j$, $i = 1, 2$.

Кроме того, для прямолинейных трещин установлена связь между $J_{(1,0)}^\omega$ и M^ω инвариантными интегралами

$$M^\omega = l \cdot J_{(1,0)}^\omega,$$

где l – длина прямолинейной трещины.

Последний параграф четвертой главы посвящен исследованию дифференцируемости функционалов энергии по форме области в двумерной теории упругости для тел с жесткими включениями и трещинами, берега которых могут контактировать, то есть задаются условия непроникания – условия одностороннего ограничения; на геометрию трещины не накладывается никаких ограничений, за исключением ее гладкости. Дифференциальная постановка задачи имеет следующий вид:

$$-\sigma_{ij,j}(U_0) = f_i \quad \text{в} \quad \Omega\backslash\overline{\omega}_0, \ (i=1,2)$$

$$u_{01} = u_{02} = 0 \quad \text{п.в. на} \quad \partial\Omega,$$

$$U_0 = B_0 x + C_0 \quad \text{п.в. в} \quad \omega_0,$$

$$[U_0^t]\nu_0 \geq 0 \quad \text{п.в. на} \quad \gamma_0,$$

$$\sigma_\tau(U_0) = 0, \ \sigma_{\nu_0}(U_0) \leq 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0,$$

$$\sigma_{\nu_0}(U_0)[U_0^t]\nu_0 = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0,$$

$$-\langle\sigma(U_0)\nu_0, \rho\rangle_{1/2,\partial\omega_0} = \int\limits_{\omega_0} F^t\rho \, dx \quad \forall\rho \in R(\omega_0).$$

Как и ранее, для того, чтобы вычислить производную функционала энергии по форме области, вводится достаточно гладкое преобразование координат – возмущение области, зависящее от малого параметра $\varepsilon > 0$ с полем кинематических скоростей $V \in W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Основная трудность при выводе формулы для производной функционала энергии по форме области состоит в том, что преобразование координат не задает взаимно однозначного соответствия между множествами допустимых смещений невозмущенной и возмущенной задач. Это связано с тем, что в случае криволинейной трещины вектор нормали к невозмущенному разрезу отображается в вектор, не совпадающей с вектором нормали к возмущенному разрезу. Кроме того, структура множества жестких перемещений не сохраняется при нелинейном возмущении области. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть $U_0 \in K_0(\Omega_0)$ – решение невозмущенной задачи, $U_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ – решение возмущенной задачи, отображенное на невозмущенную область. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют функции W^1_ε, W^2_ε, W_0, P_0, Q_0 такие, что*

$$U_0 + \varepsilon W^1_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0), \quad U_\varepsilon - \varepsilon W^2_\varepsilon \in K_0(\Omega_0).$$

Кроме того, при $\varepsilon \to 0$

$$W_\varepsilon^i \to W_0 \quad \text{сильно в} \quad H(\Omega_0)\ (i=1,2),$$

где $W_0 = P_0 + Q_0$, $Q_0 = \theta B_0 V$, *а след функции* P_0 *на* γ_0 *равен* $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t [U_0]$; θ *– произвольная финитная в* Ω *функция, равная единице в* ω_0.

Основываясь на вариационных свойствах решения задач равновесия и используя Лемму 4.1 вычисляется производная функционала энергии по форме области

$$\Pi'(\Omega_0; U_0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} A_1(V; U_0, U_0)\,dx - \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(V f_i) u_{0i} -$$

$$- \int\limits_{\omega_0} F^t B_0 V\,dx - \langle \sigma(U_0)\nu_0, B_0 V\rangle_{1/2,\partial\omega_0} - \left\langle \sigma_{\nu_0}(U_0), [U_0^t]\frac{\partial V}{\partial x}\nu_0 \right\rangle_{00,1/2,\gamma_0}.$$

Отметим, что формула для производной функционала энергии для тела с жестким включением не может быть получена предельным переходом в аналогичной формуле для тела с упругим включением при стремлении жесткости включения к бесконечности.

Данный результат так же является одним из центральных результатов настоящей диссертации.

Основные научные результаты диссертации:

- Разработан метод исследования асимптотики функционалов энергии в задачах теории упругости с жесткими включениями и нелинейными трещинами, на которых задаются условия одностороннего ограничения. С помощью метода получены формулы для производных функционалов энергии по форме области для:
  - N-мерной модели упругого тела ($N = 2, 3$);
  - модели пластины Кирхгофа-Лява с вертикальной трещиной, на берегах которых задано точное условие непроникания;
  - моделей упругих тел с жесткими включениями и трещинами, на которых задаются как условия одностороннего ограничения, так и линейные краевые условия.
- Рассмотрены частные случаи, соответствующие квазистатическому росту трещины вдоль заданного многообразия и имеющие важное

прикладное значение в механике разрушения. В этом случае производная функционала энергии определяет формулу Гриффитса в механике разрушения. Кроме того, показано, что полученные формулы обобщают известные.

- Для N-мерной задачи теории упругости для тела с трещиной при условии непроникания ее берегов выведены достаточные условия, при которых производная функционала энергии по параметру возмущения области может быть представлена в виде инвариантного интеграла. Рассмотрены различные частные виды возмущений области, имеющие прикладное значение в механике разрушения и задачах идентификации трещин в упругих телах. В частности, построен инвариантный интеграл Черепанова-Райса для криволинейных трещин с условием непроникания.

- Для двухмерной линейной модели упругого тела с жестким включением и трещиной выведены достаточные условия, при которых производная функционала энергии по параметру возмущения области может быть представлена в виде инвариантного интеграла. Построены J- и M-инвариантные интегралы. Показано, что существуют инвариантные интегралы по незамкнутым кривым, вершины которых лежат на границе жесткого включения. В частности, получен интеграл типа Черепанова-Райса для прямолинейных трещин, лежащих на границе жесткого включения.

- Исследованы задачи оптимального управления формой трещин в трехмерных упругих телах. Целевым функционалом выступает производная потенциальной энергии тела по параметру возмущения области, соответствующего квазистатическому росту трещины вдоль некоторой поверхности. Доказаны теоремы существования решений задач управления формой трещины и ее фронтом.

- Изучена нелинейная модель упругого тела с отслоившимся тонким упругим участком границы. При этом на множестве, соответствующему отслоившемуся участку, задаются условия типа Синьорини – условия одностороннего ограничения. Исследованы асимптотические свойства решения при варьировании параметров задачи. Показано, что при стремлении параметра, характеризующего жесткость отслоившегося участка границы, к бесконечности, предельная функция является решением классической задачи Синьорини о контакте упругого тела с жестким штампом.

- Проведено исследование линейной модели пластины, имеющей вертикальную трещину и жесткое включение. Получена формула для производной функционал энергии по длине прямолинейной трещины и показано, что такая производная представима в виде инвариантного интеграла по незамкнутым кривым, концы которых лежат на границе жесткого включения.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Рудой Е. М.* Устойчивость решения задачи равновесия пологой оболочки, содержащей трещину, при возмущении границы // Сиб. журнал индустр. мат. 2001. Т. 4. N 1. С. 171–176.

2. *Рудой Е. М.* Формула Гриффитса для пластины с трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5. N 3. С. 155–161.

3. *Рудой Е. М.* Инвариантные интегралы для задачи равновесия пластины с трещиной // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 466–477.

4. *Рудой Е. М.* Дифференцирование функционалов энергии в двумерной теории упругости для тел, содержащих криволинейные трещины // Прикл. механика и техн. физика. 2004. Т. 45, № 6. С. 83–94.

5. *Рудой Е.М.* Дифференцирование функционалов энергии в трехмерной теории упругости для тел, содержащих поверхностные трещины // Сиб. журнал индустр. математики. 2005. Т. 8. N 1. С. 106–116.

6. *Рудой Е.М.* Выбор оптимальной формы поверхностных трещин в трехмерных телах // Вестник НГУ. Серия "Математика, механика, информатика". 2006. Т. 6. Вып. 2. С. 76–87.

7. *Рудой Е.М.* Дифференцирование функционалов энергии в задаче о криволинейной трещине с возможным контактом берегов // Механика твердого тела. 2007. N 6. С. 113–127.

8. *Рудой Е. М.* Дифференцирование функционалов энергии в задаче о криволинейной трещине в пластине с возможным контактом берегов // Прикл. механика и техн. физика. 2008. Т. 49. № 5. С. 153–168.

9. *Рудой Е.М.* Асимптотика функционала энергии для смешанной краевой задачи четвертого порядка в области с разрезом // Сиб. мат. журнал. 2009. N 2. Т. 50. С. 430-445.

10. *Рудой Е.М., Хлуднев А.М.* Односторонний контакт пластины с тонким упругим препятствием // Сиб. журнал индустр. математики. 2009. Т. 12. N 2. С. 120–130.

11. *Рудой Е.М.* Формула Гриффитса и интеграл Черепанова-Райса для пластины с жестким включением и трещиной // Вестник НГУ. Серия "Математика, механика, информатика". 2010. Т. 10. Вып. 2. С. 98–117.

12. *Рудой Е.М.* Асимптотика функционала энергии для трехмерного тела с жестким включением и трещиной // Прикл. механика и техн. физика. 2011. Т. 52. N 2. С. 114–127.

13. *Рудой Е.М.* Асимптотика функционала энергии для упругого тела с трещиной и жестким включением. Плоская задача // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 6. С. 1038–1048.

14. *Плотников П.И., Рудой Е.М.* Анализ чувствительности интегралов энергии к изменению формы области для тел с жесткими включениями и трещинами // Доклады Академии наук. 2011. Т. 440. N 5. С. 589–592.

15. *Рудой Е.М.* Инвариантные интегралы в плоской задаче теории упругости для тел с жесткими включениями и трещинами // Сиб. журнал индустр. математики. 2012. Т. 15. N 1. С. 99–109.

Метод гладких возмущений в задачах теории упругости с односторонними ограничениями для областей с негладкими границами

автореферат

Рудой Евгений Михайлович

Подписано в печать «_».08.2012 г.	Заказ №__
Формат бумаги 60×84	Объем 2 п.л.
Тираж 100 экз.	Бесплатно

Ротапринт ИГиЛ СО РАН

630090 Новосибирск, просп.акад. Лаврентьева 15