На правах рукописи

Саженков Сергей Александрович

Энтропийные решения нелинейных задач динамики многофазных сред

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор Плотников Павел Игоревич

Официальные оппоненты:
Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник

Панов Евгений Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого», профессор

Папин Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Алтайский государственный университет», профессор, заведующий кафедрой

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых»

Защита состоится 25 декабря 2012 года в _____ на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2, ауд. 317а главного корпуса.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан «__» _________ 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук Старовойтов В.Н.

I. Аннотация

Диссертация посвящена исследованию двух типов нелинейных задач механики неоднородных сплошных сред.

Во-первых, изучаются вопросы математической корректности краевых задач для вырождающихся параболически-гиперболических квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка и для систем, включающих в себя такие уравнения. Эти системы описывают динамику гетерогенных сплошных сред с нелинейными свойствами.

Во-вторых, рассматриваются задачи гомогенизации для нелинейных моделей вязких жидкостей и газов, механические характеристики которых быстро осциллируют. Целью исследования является обоснование процедур гомогенизации на строгом математическом уровне.

Предыдущая история исследований задач этих двух типов показывает, что они имеют различную математическую природу. Тем не менее, в диссертации их удается плодотворно исследовать с помощью единой концепции кинетического уравнения — теоретического инструмента, предложенного первоначально Я. Бренье, Б. Пертамом, П.-Л. Лионсом, Э. Тадмором, Л. Тартаром.

II. Общая характеристика работы

II.1. Актуальность темы диссертации. Обзор литературы по теме диссертации. Целый ряд задач, связанных с переносом тепла и массы в неоднородных и анизотропных средах, сводится к исследованию неклассических нелинейных уравнений диффузии. С точки зрения теории дифференциальных уравнений эти задачи являются частным случаем общей проблемы о построении теории краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка вида

$$\partial_t \alpha(u) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} a_i(\boldsymbol{x}, t, u) - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}(a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\partial_{x_j} b(u)) = 0$$

($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0$) с неотрицательной квадратичной формой при старших производных, поставленной О.А. Олейник (1964). Изучение этой проблемы является одним из двух направлений, рассматриваемых в настоящей диссертации. Общая теория линейных уравнений с неотрицательной квадратичной формой была построена в работах Г. Фикеры (G. Fichera, 1960), Дж. Кона и Л. Ниренберга (J.J. Kohn, L. Nirenberg, 1967), О.А. Олейник и Е.В. Радкевича (1971, 2010).

Теория энтропийных решений задачи Коши для общего квазилинейного уравнения первого порядка была построена в работе С.Н. Кружкова (1970) и получила дальнейшее развитие в работах Е.Ю. Панова (1994–2010).

Х. Карильо (J. Carrillo, 1999) успешно применил технику удвоения переменных из указанной выше работы С.Н. Кружкова и с помощью этой техники построил теорию корректности начально-краевых задач с однородными граничными условиями для вырождающегося квазилинейного эллиптически-параболически-гиперболического уравнения второго порядка

$$\partial_t \alpha(u) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} a_i(u) - \Delta_x b(u) = 0$$

в классе слабых энтропийных решений. Обратим внимание, что нелинейности в рассматриваемом Х. Карильо уравнении являются автономными, то есть они в явном виде зависят только от искомой переменной и не зависят от независимых переменных $\boldsymbol{x}$ и t. Следует отметить, что достижения Х. Карильо представляют значительный интерес в нелинейной механике сплошных сред. В частности, его результаты дополняют теорию обобщенных решений задачи Стефана о фазовых переходах.

В 1980-х и начале и середине 1990-х Я. Бренье (Y. Brenier, 1983), П.-Л. Лионсом, Э. Тадмором и Б. Пертамом (P.-L. Lions, E. Tadmor, B. Perthame, 1994) был разработан метод кинетического уравнения, который позволил авторам метода взглянуть на проблему с новой точки зрения и получить ряд интересных результатов.

Заметное место в изучении квазилинейных уравнений первого и второго порядков занимает понятие об *истинной нелинейности* или *невырожденности* уравнений; в английском оригинале: the notion of *genuine nonlinearity* or *nondegeneracy*. Наличие условия истинной нелинейности (невырожденности) доставляет следующее качественное свойство решениям: если в начальный момент времени имеются осцилляции — сильные колебания начальных данных по пространственным переменным, — то в энтропийных решениях уравнений (если, конечно, решения существуют) они моментально подавляются. Более точно: из всякой слабо сходящейся последовательности энтропийных решений уравнения можно выбрать сильно сходящуюся подпоследовательность.

Первое условие такого рода было предложено П.Д. Лаксом (P.D. Lax, 1957): П.Д. Лакс назвал уравнение $u_t + a(u)_x = 0$ истинно нелинейным, если заданная функция $u \mapsto a(u)$ строго выпукла или вогнута. Легко объяснить геометрическую суть термина «истинная нелинейность»: уравнение вида $u_t + a(u)_x = 0$ называется истинно нелинейным, если ни на одном невырожденном интервале в $\mathbb{R}_\lambda$ функция $\lambda \mapsto a(\lambda)$ не является линейной. Конечно, строго выпуклые и вогнутые функции этим свойством обладают. В дальнейшем понятие истинной нелинейности или невырожденности было многократно обобщено для более сложных уравнений как первого, так и второго порядков, см., например, статьи Л. Тартара (L. Tartar, 1983) и

П.-Л. Лионса, Б. Пертама и Э. Тадмора (1994), а также цикл работ Е.Ю. Панова (1994–2011). Истинно нелинейными являются знаменитое уравнение Хопфа $u_t + uu_x = 0$ и система одномерных уравнений невязкого сжимаемого газа. Вообще, исследование истинно нелинейных задач представляет отдельный интерес в построении теории корректности краевых задач для квазилинейных уравнений. В диссертации исследованию истинно нелинейных уравнений и систем посвящены главы 3 и 4.

Следует отметить, что общая теория краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка с неотрицательной квадратичной формой до сих пор не создана. Ее построение остается весьма актуальным.

Второе направление, на котором сфокусировано внимание в настоящей диссертации — это задачи усреднения или гомогенизации для термомеханических систем с быстро осциллирующими данными.

Главной сложностью в изучении задач динамики сплошных сред с быстро осциллирующими, то есть быстро колеблющимися, термомеханическими свойствами, является наличие малого параметра, скажем, ε, характеризующего частоту колебаний. Как замечено в предисловии в монографии А.Л. Пятницкого, Г.А. Чечкина и А.С. Шамаева (2007), описание таких процессов на микроскопических масштабах, то есть на масштабах, на которых различается каждое отдельное колебание, затруднено даже с использованием современных суперкомпьютеров, так как шаг разностного метода в данной ситуации должен быть много меньше, чем ε, а это при малых значениях ε приводит к практически невыполнимым объемам вычислений. Поэтому естественным является стремление построить математически корректную *усредненную* модель, не зависящую от ε, решения которой были бы близки к решению исходной задачи при малых ε. Проблема нахождения такой усредненной модели называется проблемой усреднения или гомогенизации. Процесс построения усредненной модели общепринято называть процедурой гомогенизации (усреднения), а его строгое математическое обоснование — обоснованием процедуры гомогенизации (усреднения).

Классическим методом в теории усреднения является метод формальных асимптотических разложений для получения усредненных уравнений. Он развит Н.С. Бахваловым и Г.П. Панасенко (1984), А. Бенсуссаном, Ж.-Л. Лионсом и Г. Папаниколау (A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, 1978), Р. Барриджем и Дж.Б. Келлером (R. Burridge, J.B. Keller, 1981). Другой подход, основанный на систематическом применении метода компенсированной компактности, предложен Ф. Мюра (F. Murat) и Л. Тартаром (1978, 1983). Используя метод компенсированной компактности, В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник и Ха Тьен Нгоан (1979, 1981, 1993) получили исчерпывающие результаты по теории усреднения линейных эллиптических и параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Существенный прогресс был достигнут в теории уравнений в перфорированных областях и областях с мелкозернистой границей.

Общим местом в постановках задач усреднения является требование условий на некоторую упорядоченность рассматриваемой структуры. Чаще всего предполагают, что среда является периодической, квазипериодической или случайной однородной. Снабжение микроструктуры периодической геометрией широко распространено в задачах усреднения в геофизике, а именно, в проблемах описания фильтрации жидкостей и газов через пористый грунт. Пионерские работы по построению процедур гомогенизации и результирующих усредненных моделей фильтрации в периодических пористых средах изложены в монографиях Н.С. Бахвалова и Г.П. Панасенко (1984), А. Бенсуссана, Ж.-Л. Лионса и Г. Папаниколау (1978), Э. Санчеса-Паленсии (E. Sanchez-Palencia, 1984) и статье Р. Барриджа и Дж.Б. Келлера (1981). Первое строгое математическое доказательство метода гомогенизации принадлежит, по-видимому, Л. Тартару (1984, приложение в монографии Э. Санчеса-Паленсии), обосновавшему вывод закона Дарси, исходя из стационарных уравнений Стокса.

В 1989 г. Габриэль Нгуетсенг (G. Nguetseng) предложил интересную концепцию двухмасштабной сходимости, что привело к развитию нового способа выполнения и одновременно строгого обоснования процедур усреднения — *метода двухмасштабной сходимости Аллера–Нгуетсенга*. Этот метод оказался в ряде случаев очень удобным при усреднении периодических структур, поскольку двухмасштабная сходимость позволяет установить предельные режимы последовательностей периодических функций при стремлении длины периода к нулю более точно, чем слабая (в L^2, например) сходимость. В этой связи следует отметить работы Р.П. Джилберта, А. Микелича, Т. Клопо и Ж.Л. Феррэна (R.P. Gilbert, A. Mikelić, Th. Clopeau, J.L. Ferrin, 2000, 2001), в которых метод двухмасштабной сходимости был применен для построения двух различных изотермических макроскопических моделей движения линейной сжимаемой вязкой жидкости в упругом пористом грунте. В последнее время эта тематика стала очень актуальной: имеется большое количество работ, в том числе и для неизотермических моделей (см., например, статьи А.М. Мейрманова (2008-2010), посвященные исследованию линейной неизотермической акустики). Каждое новое достижение в этом направлении вносит вклад в лучшее понимание геофизических процессов. В этом ряду стоит материал главы 10 настоящей диссертации.

Далее отметим проблематику, связанную с гомогенизацией нелинейных уравнений вязкой жидкости и вязкого газа с быстро осциллирующими начальными данными. Наличие вязкости в задачах существенно облегчает исследование проблем усреднения: оно открывает возможности для рассмотрения сложных задач, имеющих важное прикладное значение. Следует заметить, что распространение высокочастотных колебаний в сжимаемой нелинейной среде изучено недостаточно и требует дальнейшего исследования. Все известные результаты были получены Н.С. Бахваловым, М.Э. Эглит (1983), А.А. Амосовым и А.А. Злотником (1994-1996), рассмотревшими вопрос об акустических колебаниях в вязком газе в предположении, что начальные данные представляют собой высокочастотные периодические колебания, модулированные по частоте или амплитуде. Одной из наиболее интересных и актуальных проблем является проблема описания изменения реологических свойств среды под действием высокочастотных колебаний. Здесь надо отметить эффект Леонтовича–Мандельштама (1936, 1937, 1947) об изменении второй вязкости, который до сих пор не получил строгого обоснования.

Еще заметим, что с физической точки зрения упомянутые выше предположения о периодичности, квазипериодичности, случайной однородности и т.п. не всегда выглядят корректными. Поэтому актуальным является построение процедур усреднения для моделей, на структуру которых требований упорядоченности не накладывается. В задачах о баротропном вязком газе и мелкодисперсной несжимаемой вязкой жидкости, рассматриваемых в настоящей диссертации в главах 6–8, таких требований нет: эволюция быстрых осцилляций описывается с помощью кинетического уравнения. В этом состоит критическая новизна подхода.

В заключение сделаем комментарии о сущности метода кинетического уравнения для исследования нелинейных задач механики сплошных сред. Метод был предложен сравнительно недавно в работах Я. Бренье (1983), Б. Пертама, П.-Л. Лионса, Э. Тадмора (1994) и Л. Тартара (1990) и получил свое применение в исследовании широкого ряда задач, например, при рассмотрении уравнений изэнтропической газовой динамики и p-систем (П.-Л. Лионс, Б. Пертам, П. Суганидис (P. Souganidis) (1996)), квазилинейных законов сохранения первого и второго порядков (Бренье (1983), Дж.-К. Чен (G.-Q. Chen) и Б. Пертам (2003), П.-Л. Лионс, Б. Пертам, Э. Тадмор (1994), Б. Пертам (1998)) и изучении распространения особенностей — концентраций и быстрых осцилляций — в решениях линейного гиперболического уравнения первого порядка и линейного волнового уравнения (Тартар (1990)). Концепция кинетического уравнения, предложенная Л. Тартаром, связана с конструкцией H-мер. Конструкция H-мер оказывается полезной в задачах гомогенизации, так как с ее помощью можно исследовать структуру пределов квадратичных выражений, аргументами которых являются осциллирующие решения. Метод, предложенный Я. Бренье, Б. Пертамом, П.-Л. Лионсом и Э. Тадмором, позволяет сводить квазилинейные уравнения и системы к линейным скалярным уравнениям для функций распределения, содержащих дополнительные кинетические переменные. Эти скалярные уравнения называются кинетическими по аналогии с уравнением Больцмана в кинетической теории газов, поскольку линейные части уравнений имеют структуру линейной части уравнения Больцмана, а нелинейная часть может быть формально по аналогии с оригинальным определением названа оператором столкновений. Уравнение Тартара имеет вид уравнения Больцмана с тривиальным оператором столкновений. В работах Е.Ю. Панова (1998), П.И. Плотникова и соавторов (2000-2007) предложена версия метода кинетического уравнения, основанная на конструкции мер Янга, ассоциированных с последовательностями быстро осциллирующих решений изучаемых уравнений или их регуляризаций. Эта версия представляет собой мощный инструмент для изучения нелинейных законов сохранения в механики сплошных сред, содержащих малый параметр.

II.2. Направления исследований: а) исследование вопросов математической корректности краевых задач для вырождающихся параболически-гиперболических квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка; б) исследование вопросов математической корректности краевых задач для моделей фильтрации, содержащих ультрапараболические уравнения; в) обоснование процедур гомогенизации на строгом математическом уровне для нелинейных моделей вязких жидкостей и газов, механические характеристики которых быстро осциллируют.

II.3. На защиту выносятся:

- результаты о математической корректности краевых задач для вырождающихся параболически-гиперболических квазилинейных уравнений второго порядка (уравнений Гратца–Нуссельта);
- результаты о математической корректности ультрапараболической задачи Веригина о фильтрации жидкости с примесью через анизотропную пористую структуру и о математической корректности задачи Дарси–Стефана о фазовых переходах в насыщенном пористом грунте;
- конструкции усредненных уравнений динамики сплошных сред с быстро осциллирующими данными и строгие математические обоснования процедур усреднения.

II.4. Основные научные результаты диссертации.

- Доказаны существование и единственность энтропийных решений задачи Коши для уравнения Гратца–Нуссельта с разрывными коэффициентами конвекции и частичной диффузией.

- Установлено существование энтропийных решений задачи Коши для истинно нелинейного уравнения Гратца–Нуссельта с разрывными коэффициентами конвекции и матрицей диффузии переменного ранга. Доказана относительная компактность ограниченных семейств энтропийных решений такого уравнения.

- Установлена разрешимость задачи Дарси–Стефана о фазовых переходах типа лёд–вода в жидкости, фильтрующейся через пористую структуру. Построена кинетическая формулировка этой задачи.

- Доказано существование энтропийных решений задачи Коши для двухмерной модели Веригина, описывающей фильтрацию вязкой несжимаемой жидкости, содержащей примесь, с учетом эффекта диффузии примеси в пористую среду. Пористая среда состоит из одномерных волокон, и ее геометрия удовлетворяет дополнительному условию истинной нелинейности.

- Проведено усреднение многомерной модели динамики баротропного вязкого газа с быстро осциллирующими начальными распределениями плотности при стремлении частот осцилляций к бесконечности без каких-либо ограничений на структуру осцилляций (типа периодичности или случайной однородности). Как результат, получена предельная эффективная модель динамики сжимаемого вязкого газа с быстро осциллирующими начальными данными.

- Проведено усреднение одномерной модели динамики баротропного вязкого газа с быстро осциллирующими начальными распределениями плотности, заданной в массовых лагранжевых координатах, при стремлении частот осцилляций к бесконечности без каких-либо ограничений на структуру осцилляций (типа периодичности или случайной однородности). Как результат, получена предельная эффективная модель динамики сжимаемого вязкого газа с быстро осциллирующими начальными данными. Показано, что если начальные данные осциллируют периодически, то полученная предельная модель сводится к системе усредненных (квази-осредненных) уравнений Бахвалова–Эглит.

- Проведено усреднение гетерогенной модели динамики мелкодисперсной смеси с быстро осциллирующими начальными распределениями вязкости без каких-либо ограничений на структуру смеси (типа периодичности или случайной однородности). В результате построена корректная замкнутая гомогенная модель, включающая в себя кинетическое уравнение Тартара для H-мер, ассоциированных с распределениями вязкости.

- Доказана корректность задачи Коши для уравнения Тартара в случае негладких соленоидальных полей скоростей.

- Проведено усреднение линеаризованной модели периодической микроструктуры «сжимаемая вязкая жидкость — упругое пористое тело» с учетом теплопереноса при стремлении длины периода к нулю. В результате получена корректная линейная модель термовязкоупругого тела с памятью.

II.5. Теоретическая и практическая ценность работы заключается в следующем.

- Построены новые результаты в теории корректности начально-краевых задач для ультрапараболических уравнений типа уравнения Гратца-Нуссельта и для систем, содержащих такие уравнения. Эти результаты открывают новые перспективы в изучении неклассических задач механики сплошных сред с анизотропной диффузией.

- Построены новые модели динамики жидкостей и газов с быстро осциллирующими данными с помощью процедур гомогенизации; обоснована корректность построенных моделей. Эти модели могут быть использованы для дальнейшего теоретического изучения физических свойств рассматриваемых сильно неоднородных сплошных сред.

- Получил развитие метод кинетического уравнения для начально-краевых задач для ультрапараболических уравнений и систем, содержащих такие уравнения, и для обоснования процедур гомогенизации моделей динамики сплошных сред с быстро осциллирующими данными. Построена новая версия этого метода, восходящего изначально к работам Л. Тартара, П.-Л. Лионса, Б. Пертама и Э. Тадмора. Построенная версия представляет собой мощный инструмент для изучения нелинейных законов сохранения в механики сплошных сред, содержащих малые параметры.

- Результаты и методы работы активно используются при выполнении научно-исследовательских работ по бюджетным темам ИГиЛ СО РАН, по грантам РФФИ, по ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг.» и по ряду других научно-исследовательских проектов. Результаты работы могут быть использованы научно-исследовательскими организациями и высшими учебными заведениями (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургский государственный университет, Новосибирский государственный университет, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Институт математики им.

С.Л. Соболева СО РАН, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Институт вычислительного моделирования СО РАН и др.), научные направления которых связаны с изучением вопросов математической корректности линейных и нелинейных задач механики неоднородных сплошных сред, содержащих малые параметры.

- Часть разработанных теоретических методов и полученных результатов внедрена в образовательный процесс студентов и аспирантов механико-математического факультета НГУ и ИГиЛ СО РАН и используется в курсах лекций и семинаров.

II.6. Апробация работы.

Результаты по теме диссертации получены в ходе выполнения исследовательских проектов: грант Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (№НШ-7525-2006.1, рук. академик РАН В.Н. Монахов, чл.-корр. РАН П.И. Плотников), гранты Российского фонда фундаментальных исследований (№№00-01-00911, 03-01-00829, 07-01-00309, 10-01-00447, рук. чл.-корр. РАН. П.И. Плотников, №01-01-06016-мас, рук. С.А. Саженков), грант Министерства образования РФ (№8247, рук. С.А. Саженков); ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК №02.740.11.0617, рук. чл.-корр. РАН П.И. Плотников). Соискатель награжден премией им. Академика И.Н. Векуа для молодых ученых СО РАН в 2005 году за цикл работ «Метод кинетического уравнения в изучении нелинейных задач динамики многофазных сред».

Результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных научных конференциях по математике и механике, среди которых:
— Международные конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященные памяти И.Г. Петровского (Москва, МГУ, 2001, 2004, 2011);
— VIII и X Всероссийские съезды по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Пермь, 2001; Нижний Новгород, 2011);
— Международный семинар «Нелинейные уравнения в частных производных и задачи со свободными границами» (Обидуш, Португалия, CMAF, 2002);
— Международная конференция «Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных NPDE–2003» (Алушта, Украина, 2003);
— Четырнадцатая зимняя школа по проблемам механики сплошных сред (Пермь, ИМСС УрО РАН, 2005);
— Международные конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященные памяти М. А. Лаврентьева (Новосибирск, ИГиЛ СО РАН, 2005, 2010);
— 12-я Международная региональная конференция по математической

физике (Исламабад, Пакистан, Нац. центр физики, 2006);
— Российская конференция «Математика в современном мире», посвященная 50-летию Института математики им. С.Л. Соболева (Новосибирск, ИМ СО РАН, 2007);
— XXXIII Дальневосточная математическая школа-семинар им. академика Е.В. Золотова (Владивосток, ИАПУ ДВО РАН, 2008);
— Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, ИМ СО РАН, 2008);
— Международная конференция «Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии», посвященная памяти профессора Ц.Б. Шойнжурова (Улан-Удэ, ВСГТУ, 2009);
— XXXVIII Летняя школа-конференция «Актуальные проблемы механики - 2010 (APM–2010)» (Санкт-Петербург, ИПМаш РАН, 2010);
— Всероссийская конференция «Нелинейные волны: теория и новые приложения», посвященная памяти чл.-корр. РАН В.М. Тешукова и приуроченная к 65-летию со дня его рождения (Новосибирск, ИГиЛ СО РАН, 2011);
— Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, МИАН, ВлГУ, МГУ, 2012);
— Международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева (Новосибирск, ИМ СО РАН, НГУ, 2012).

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах: «Математические проблемы механики сплошной среды» под руководством академика В.Н. Монахова и чл.-корр. РАН П.И. Плотникова (ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, 1999-2012); «Групповой анализ дифференциальных уравнений» под руководством академика Л.В. Овсянникова и д.ф.-м.н. А.П. Чупахина (ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, 2011, 2012); «Прикладная гидродинамика» под руководством чл.-корр. РАН В.В. Пухначёва (ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, 2012); «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы анализа» под руководством д.ф.-м.н. В.С. Белоносова и д.ф.-м.н. М.В. Фокина (ИМ СО РАН, 2012); семинар отдела условно-корректных задач под руководством чл.-корр. РАН В.Г. Романова и д.ф.-м.н. Д.С. Аниконова (ИМ СО РАН, 2012); «Избранные вопросы математического анализа» под руководством д.ф.-м.н. Г.В. Демиденко (ИМ СО РАН, 2012); «Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики» под руководством д.ф.-м.н. А.М. Блохина (ИМ СО РАН, 2012); «Задачи прикладной и индустриальной математики» под руководством д.ф.-м.н. А.А. Папина (АлтГУ, Барнаул, 2012); «Анализ и дифференциальные уравнения» под руководством профессора Ж.Ф. Родригеша (Центр математики и фундаментальных приложений, Лиссабон, Португалия, 2002); «Углерод в газовых фазах: элементарные реакции, структуры, материалы» под руководством профессора Э. Шнака (Институт технической механики университета Карлсруэ, Германия, 2004); семинар Центра современной математики и физики под руководством академика НАН Пакистана профессора А. Кадира (Национальный университет науки и технологий, Равалпинди, Пакистан, 2006).

II.7. Публикации. Все результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 15-и статьях автора в периодических рецензируемых научных журналах и трудах научных конференций [1]–[15]. Из них 12 работ [1]–[6], [9]–[11], [13]–[15] — в журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК. Глава 2 написана по материалам работ автора [4, 5], совместных с П.И. Плотниковым. Вклад авторов в эти работы равнозначен и его трудно разделить. Чтобы сделать изложение замкнутым, эти результаты целиком введены в диссертацию.

II.8. Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, десяти глав и списка литературы, содержащего 163 наименования работ отечественных и зарубежных авторов. Работа изложена на 368 страницах текста.

III. Краткое изложение содержания диссертации

Введение содержит обоснование актуальности темы диссертации, обзор современного состояния теории, с которой связаны построения в диссертации. Изложены предварительные сведения об изучаемых в диссертации уравнениях и о структуре диссертации.

III.1. Первая глава содержит основные обозначения и сведения из функционального анализа, которые являются теоретическим фундаментом исследования.

III.2. Во **второй главе** проводится построение теории существования и единственности решений квазилинейного уравнения с частичной диффузией и разрывными коэффициентами конвекции. Более точно, рассматривается задача Коши для уравнения

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}a(u)) - \operatorname{div}_x(\mathbb{A}\nabla_x b(u)) = 0, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T), \tag{2.1a}$$

снабженного периодическими начальными данными, принадлежащими пространству $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, и условиями периодичности

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}) \;\; \text{для п.в.} \;\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.1b}$$

$$u(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i, t) = u(\boldsymbol{x}, t) \;\; \text{для п.в.} \;\; (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T). \tag{2.1c}$$

Без ограничения общности полагаем, что

$$0 \le u_0(\boldsymbol{x}) \le 1 \quad \text{п.в. в} \quad \mathbb{R}^d. \tag{2.2}$$

Здесь, $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, ..., d)$ — вектора стандартного декартова базиса в $\mathbb{R}^d$, $u(\boldsymbol{x}, t)$ — искомая функция, $\mathbb{A} \neq 0$ — симметричная неотрицательная матрица, функция потока a и диффузионная функция b удовлетворяют условиям

$$a \in C^1_{loc}(\mathbb{R}), \quad b \in C^2_{loc}(\mathbb{R}), \quad b'(u) > 0 \ \text{ при } \ u \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Поле скоростей $\boldsymbol{v}$ задано. Предполагается, что $\boldsymbol{v}, \nabla_x \boldsymbol{v} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ и

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t), \quad \mathrm{div}_x \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad \text{в} \ \ \mathbb{R}^d \times [0, T]. \tag{2.4}$$

Матрица $\mathbb{A}$ переводит $\mathbb{R}^d$ в пространство

$$\mathcal{L} := \Im(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}^d \tag{2.5}$$

размерности $k := \mathrm{rank}\ \mathbb{A}$. Если $k < d$, то уравнение (2.1a) является ультрапараболическим.

Будем использовать следующие обозначения линейных пространств периодических функций. Через $L^p \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ и $H^{s,p} \subset W^s_{p,loc}(\mathbb{R}^d)$ обозначаем банаховы пространства, состоящие из 1-периодических функций и снабженные нормами $\|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$, $\|u\|_{H^{s,p}} = \|u\|_{W^s_p(\Omega)}$, где Ω — это единичный куб $(0,1)^d$. Для $l \ge 0$ через C^l обозначим замкнутое подпространство функций $u \in C^l(\mathbb{R}^d)$, таких, что u 1-периодичны по x_i, $1 \le i \le d$.

Дифференциальный оператор $\boldsymbol{A} = \mathrm{div}_x(\mathbb{A}\nabla_x \cdot)$: $C^\infty \mapsto L^2$ является симметричным и неотрицательным в гильбертовом пространстве L^2. По теореме Фридрихса он имеет самосопряженное расширение $\boldsymbol{A}$: $D(\boldsymbol{A}) \mapsto L^2$. Для описания области определения $D(\boldsymbol{A})$ заметим, что $\mathbb{A} = O^t \mathcal{D} O$, $\mathcal{D} = \mathrm{diag}\ \{\lambda_1, ..., \lambda_k, 0, \dots, 0\}$, $O^t O = \mathbb{I}$, где λ_i — положительные постоянные. Произвольно зафиксируем $u \in L^2$ и введем в рассмотрение функцию $w \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ и векторное поле $\partial w \in W^{-1}_{2,loc}(\mathbb{R}^d)$, определенные по формулам

$$w(\boldsymbol{x}) = u(O\boldsymbol{x}), \quad \partial w = \{\partial_{x_1} w, .., \partial_{x_k} w, 0, \dots, 0\}^t.$$

Функция $u \in L^2$ принадлежит $D(\boldsymbol{A})$ тогда и только тогда, когда $w \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ и $\partial w \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Снабженное нормой

$$\|u\|^2_{\mathfrak{H}} := \|u\|^2_{L^2} + \|\mathbb{A}^{1/2}\nabla_x u\|^2_{L^2}, \quad \mathbb{A}^{1/2}\nabla_x u(\boldsymbol{x}) := O\mathcal{D}^{1/2}\partial w(O\boldsymbol{x}),$$

$D(\boldsymbol{A})$ становится гильбертовым пространством, которое будем в дальнейшем обозначать через $\mathfrak{H}$.

Сформулируем теперь понятие обобщенного решения задачи (2.1).

Определение 2.1. Функция $u \in L^\infty \cap L^2(0,T;\mathfrak{H})$ называется энтропийным решением задачи (2.1), если она удовлетворяет интегральному неравенству

$$\int_Q \{\varphi(u)\partial_t\zeta + \psi(u)\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x\zeta + \omega(u)\mathrm{div}_x(\mathbb{A}\nabla_x\zeta)$$
$$-\varphi''(u)b'(u)|\mathbb{A}^{1/2}\nabla_x u|^2\zeta\Big\}\,d\boldsymbol{x}dt + \int_\Omega \varphi(u_0)\zeta(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} \geq 0 \qquad (2.6)$$

для всех функций φ, ψ и ω, таких, что

$$\varphi \in C^2_{loc}(\mathbb{R}), \quad \varphi''(u) \geq 0, \quad \psi'(u) = a'(u)\varphi'(u), \quad \omega'(u) = b'(u)\varphi'(u), \qquad (2.7)$$

и для всех неотрицательных 1-периодических по $\boldsymbol{x}$ пробных функций $\zeta \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^d \times [0,T])$, таких, что $\zeta|_{t=T} = 0$.

Наряду с задачей (2.1) рассматриваем ее параболическую аппроксимацию

$$\mathbb{R}^d \times (0,T): \quad \partial_t u_\varepsilon + \mathrm{div}_x(\boldsymbol{v}_\varepsilon a_\varepsilon(u_\varepsilon)) - \mathrm{div}_x(\mathbb{A}\nabla_x b(u_\varepsilon)) = \varepsilon \Delta_x u_\varepsilon, \qquad (2.8)$$

снабженную краевыми условиями (2.1b) и (2.1c). Здесь соленоидальные векторные поля $\boldsymbol{v}_\varepsilon \in C^\infty(0,T;C^\infty)$ и гладкие функции $a_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ ($\varepsilon > 0$) удовлетворяют соотношениям

$$\|\boldsymbol{v}_\varepsilon - \boldsymbol{v}\|_{L^1(0,T;H^{1,1})} + \|a_\varepsilon - a\|_{W^1_1(0,1)} \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \searrow 0. \qquad (2.9)$$

Из общей теории параболических уравнений второго порядка следует, что эта задача имеет единственное гладкое решение. Из принципа максимума и энергетических оценок вытекают неравенства

$$0 \leq u_\varepsilon \leq 1 \ \text{ и } \ \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathfrak{H})} \leq c, \qquad (2.10)$$

в которых постоянная c не зависит от ε.

Кратко поясним мотивировку конструкции энтропийного решения. Для этого проведем следующее эвристическое рассуждение. Возьмем произвольную гладкую функцию $\varphi(u)$, такую, что $\varphi''(u) \geq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$, и неотрицательную 1-периодическую по $\boldsymbol{x}$ функцию $\zeta \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^d \times [0,T])$, такую, что $\zeta|_{t=T} = 0$. Домножим уравнение (2.8) на $\varphi'(u_\varepsilon)\zeta(\boldsymbol{x},t)$, проинтегрируем на Q и проинтегрируем надлежащим образом по частям по $\boldsymbol{x}$ и t. Получим интегральное равенство

$$\int_Q \Big\{\varphi(u_\varepsilon)\partial_t\zeta + \psi_\varepsilon(u_\varepsilon)\boldsymbol{v}_\varepsilon\cdot\nabla_x\zeta + \omega(u_\varepsilon)\mathrm{div}_x(\mathbb{A}\nabla_x\zeta) + \varepsilon\varphi(u_\varepsilon)\Delta_x\zeta$$
$$-\varphi''(u_\varepsilon)b'(u_\varepsilon)|\mathbb{A}^{1/2}\nabla_x u_\varepsilon|^2\zeta - \varepsilon\varphi''(u_\varepsilon)(\nabla_x u_\varepsilon\cdot\nabla_x u_\varepsilon)\zeta\Big\}d\boldsymbol{x}dt$$
$$+\int_\Omega \varphi(u_0)\zeta(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} = 0, \qquad (2.11)$$

в котором
$$\psi'_\varepsilon(u) = a'_\varepsilon(u)\varphi'(u), \quad \omega'(u) = b'(u)\varphi'(u).$$
Отбросим в (2.11) интеграл со знакоопределенным выражением $\varepsilon\varphi''(u_\varepsilon)(\nabla_x u_\varepsilon \cdot \nabla_x u_\varepsilon)\zeta \geq 0$ и в получившемся неравенстве формально перейдем к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, предполагая сильную сходимость последовательности u_ε к некоторому u и имея в виду свойство полунепрерывности снизу
$$\liminf_{\varepsilon \searrow 0} \int_Q \varphi''(u_\varepsilon)b'(u_\varepsilon)|\mathbb{A}^{1/2}\nabla_x u_\varepsilon|^2 \zeta d\boldsymbol{x}dt \geq \int_Q \varphi''(u)b'(u)|\mathbb{A}^{1/2}\nabla_x u|^2 \zeta d\boldsymbol{x}dt.$$
Получим в точности интегральное неравенство (2.6). В смысле теории распределений оно эквивалентно *энтропийному неравенству*
$$\partial_t\varphi(u) + \operatorname{div}_x(\psi(u)\boldsymbol{v}) - \operatorname{div}_x(\mathbb{A}\nabla_x\omega(u)) + \varphi''(u)b'(u)|\mathbb{A}^{1/2}\nabla_x u|^2 \leq 0 \quad (2.12)$$
и начальным данным $u|_{t=0} = u_0$. Заметим, что выбирая в (2.12) $\varphi(u) = u$ и $\varphi(u) = -u$, сразу выводим уравнение (2.1a), то есть энторпийное решение является слабым обобщенным решением уравнения (2.1a).

Целью главы является обоснование утверждений, что задача (2.1) имеет единственное энтропийное решение u, и что последовательность приближенных решений u_ε сходится по мере к u при $\varepsilon \searrow 0$. Основным результатом исследования задачи (2.1) является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для любых данных $u_0 \in L^\infty$, удовлетворяющих оценке* (2.2), *задача (2.1) имеет единственное энтропийное решение $u \in L^\infty(0,T;L^\infty) \cap L^2(0,T;\mathfrak{H})$.*

Последовательность решений u_ε задачи (2.8), (2.1b), (2.1c) сходится к энтропийному решению u сильно в L^1 при $\varepsilon \searrow 0$.

Доказательство теоремы основано на методе кинетического уравнения и на использовании аппарата теории мер Янга. Кратко напомним понятие мер Янга и поясним идею метода кинетического уравнения и схему доказательства.

В силу оценок (2.10) найдутся последовательность $\{u_\varepsilon\}$ и предельная функция $u \in L^\infty(0,T;L^\infty) \cap L^2(0,T;\mathfrak{H})$, такие, что $u_\varepsilon \to u$ слабо* в $L^\infty(0,T;L^\infty)$, $\mathbb{A}^{1/2}\nabla_x u_\varepsilon \to \mathbb{A}^{1/2}\nabla_x u$ слабо в $L^2(0,T;L^2)$.

По теоремам Тартара и Болла найдутся подпоследовательность из $\{u_\varepsilon\}$ и два семейства вероятностных мер $\mu_{x,t} \in Prob(\mathbb{R}_\lambda)$ и $\sigma_{x,t} \in Prob(\mathbb{R}_\lambda \times \mathbb{R}_q)$, называемых *мерами Янга*, такие, что
$$\varphi(u_\varepsilon) \underset{\varepsilon \searrow 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}_\lambda} \varphi(\lambda)d\mu_{x,t}(\lambda) \text{ слабо* в } L^\infty(Q),$$

$$F(u_\varepsilon, \mathbb{A}^{1/2}\nabla_x u_\varepsilon) \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}_\lambda\times\mathcal{L}_q} F(\lambda,\boldsymbol{q})d\sigma_{x,t}(\lambda,\boldsymbol{q}) \text{ слабо в } L^r(Q),\ 1<r\le 2/p,$$

при п.в. $(\boldsymbol{x},t)\in Q$ для всевозможных непрерывных функций φ и F, причем F удовлетворяет условию на рост $|F(\lambda,\boldsymbol{q})|\le c(1+|\lambda|+|\boldsymbol{q}|)^p$, $0\le p<2$.

Домножим приближенное уравнение (2.8) на $\varphi'(u_\varepsilon)$, где φ — гладкая, не обязательно выпуклая функция. На строгом математическом уровне удается обосновать предельный переход в получившемся в результате этого домножения равенстве при $\varepsilon\searrow 0$ и как результат вывести предельное уравнение

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x(a'(\lambda)f\boldsymbol{v} - b'(\lambda)\mathbb{A}\nabla_x f) + \partial_\lambda\left(b'(\lambda)\partial_\lambda\chi + M\right) = 0, \tag{2.13}$$

в котором $f=f(\boldsymbol{x},t,\lambda)$ — это функция распределения меры Янга $\mu_{x,t}$, а именно, $f(\boldsymbol{x},t,\lambda)=\int_{\mathbb{R}_s} 1_{s\le\lambda}d\mu_{x,t}(s)$; $\chi=\chi(\boldsymbol{x},t,\lambda)$ — это монотонная и непрерывная справа по λ функция, определяемая мерой Янга $\sigma_{x,t}$ посредством интеграла $\chi(\boldsymbol{x},t,\lambda)=\int_{(-\infty,s]\times\mathcal{L}_q}|\boldsymbol{q}|^2d\sigma_{x,t}(\lambda,\boldsymbol{q})$; M — неотрицательная мера Радона, носитель которой лежит в полосе $\{0\le\lambda\le 1\}$; λ — это новая независимая переменная. Уравнение (2.13) называется *кинетическим уравнением.* Понимается оно в смысле распределений. Систематический и весьма нетривиальный анализ кинетического уравнения приводит к заключению, что если уравнение снабжено начальными данными

$$f(\boldsymbol{x},0,\lambda) = 1_{\lambda\ge u_0(x)} \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda\ge u_0(\boldsymbol{x}),\\ 0 & \text{при } \lambda< u_0(\boldsymbol{x})\end{cases} \tag{2.14}$$

с некоторой начальной функцией $u_0\in L^\infty$, $0\le u_0\le 1$ п.в. в Ω, то функция распределения имеет структуру

$$f(\boldsymbol{x},t,\lambda) = 1_{\lambda\ge \tilde u(x,t)} \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda\ge \tilde u(\boldsymbol{x},t),\\ 0 & \text{при } \lambda< \tilde u(\boldsymbol{x},t)\end{cases} \tag{2.15}$$

с некоторой функцией $\tilde u\in L^\infty(0,T;L^\infty)$, $0\le\tilde u\le 1$ п.в. в Q.

Остается заметить, что для функций вида (2.15) имеет место элементарное тождество

$$\varphi(\tilde u(\boldsymbol{x},t)) = -\int_{\mathbb{R}}\varphi'(\lambda)f(\boldsymbol{x},t,\lambda)d\lambda \quad \forall\,\varphi\in C_0^1(\mathbb{R}). \tag{2.16}$$

Из этого тождества и кинетического уравнения (2.13) непосредственно вытекает энтропийное неравенство (2.12) с функцией $\tilde u$. Наконец, представление (2.15) означает, что мера Янга $\mu_{x,t}$ является параметризованной мерой Дирака на $\mathbb{R}_\lambda$, сосредоточенной в точке $\lambda=\tilde u(\boldsymbol{x},t)$, то есть $\mu_{x,t}(\lambda)=\delta_{\lambda=\tilde u(x,t)}(\lambda)$. По теории мер Янга отсюда вытекает, что $u_\varepsilon \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow}\tilde u$ сильно в

$L^2(0,T;L^2)$ а значит и в $L^1(0,T;L^1)$. При этом ясно, что $\tilde{u}(\boldsymbol{x},t) = u(\boldsymbol{x},t)$ п.в. в Q, где u — предельная точка семейства решений приближенной параболической задачи (2.8), (2.1b), (2.1c).

Таким образом устанавливается существование энтропийных решений и предельное соотношение из формулировки теоремы 2.1. Единственность решений следует из несложного наблюдения, что если (f', χ', M') и (f'', χ'', M'') удовлетворяют кинетическому уравнению с одними и теми же начальными данными (2.14), то тройка $\left(\dfrac{f'+f''}{2}, \dfrac{\chi'+\chi''}{2}, \dfrac{M'+M''}{2}\right)$ удовлетворяет кинетическому уравнению с теми же начальными данными и, следовательно, $(f'+f'')/2$ имеет структуру (2.15), откуда $f' = f''$ п.в. в $Q \times \mathbb{R}_\lambda$ и $u' = u''$ п.в. в Q.

III.3. В **третьей главе** рассматривается задача Коши для истинно нелинейного уравнения диффузии-конвекции вида

$$u_t + \partial_{x_i} a_i(\boldsymbol{x},t,u) - \partial_{x_i}(a_{ij}(\boldsymbol{x},t)\partial_{x_j} b(u)) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\ t \in (0,T), \tag{3.1a}$$

с начальными данными, принадлежащими пространству $L^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$u|_{t=0} = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{3.1b}$$

В (3.1) u — это искомая функция, а вектор потока $\boldsymbol{a} := (a_i)$, диффузионная матрица $\mathbb{A} := (a_{ij})$ и диффузионная функция b являются заданными и удовлетворяют условиям

$$a_i, D_{x_i} a_i \in L^4_{loc}(\mathbb{R}^d_x \times (0,T); C^1_{loc}(\mathbb{R}_u)),\ a_{ij} \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^d_x \times [0,T]), \tag{3.2}$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij}(\boldsymbol{x},t)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad \forall\, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\, t \in [0,T], \tag{3.3}$$

$$b \in C^2_{loc}(\mathbb{R}), \quad b'(u) > 0, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Считается, что для уравнения (3.1) априори гарантируется принцип максимума, то есть, например (см. в монографии О.А. Ладыженской, В.А. Солонникова и Н.Н. Уральцевой, 1967), что для заданных функций выполняется неравенство

$$u D_{x_i} a_i(\boldsymbol{x},t,u) \geq -c_1 u^2 - c_2, \quad \text{при п.в. } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\, t \in [0,T],\ \forall\, u \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

с некоторыми положительными постоянными c_1 и c_2.

В (3.1)–(3.5) используется общепринятое правило суммирования по повторяющимся в произведении индексам от одного до d. Производная D_{x_i} определена по формуле

$$D_{x_i} g(\boldsymbol{x},t,u) = (\partial_{x_i} g(\boldsymbol{x},t,\lambda))|_{\lambda=u(x,t)} \quad \forall\, g \in C^1(\mathbb{R}^d_x \times (0,T) \times \mathbb{R}_\lambda).$$

В частности, производные ∂_{x_i} и D_{x_i} связаны тождеством

$$\partial_{x_i} g(\boldsymbol{x}, t, u) = D_{x_i} g(\boldsymbol{x}, t, u) + \partial_u g(\boldsymbol{x}, t, u) \partial_{x_i} u.$$

Предполагается, что ранг d_0 матрицы $\mathbb{A}$ в общем случае может быть меньше размерности пространства $\mathbb{R}^d_x$, а в случае, когда $\mathbb{A}$ — диагональная матрица, т.е. $\mathbb{A} = \operatorname{diag}\{a_{11}(\boldsymbol{x}, t), \ldots, a_{dd}(\boldsymbol{x}, t)\}$, может меняться в зависимости от $\boldsymbol{x}$ и t. Таким образом, (3.1a) является ультрапараболическим уравнением.

Условие *истинной нелинейности* формулируется следующим образом.

Условие G3. Для п.в. $(\boldsymbol{x}, t) \in \Pi = \mathbb{R}^d_x \times (0, T)$ выполнено требование: для любых $(\boldsymbol{\xi}, \tau) \in \mathbb{R}^{d+1}$, таких, что $|\boldsymbol{\xi}|^2 + \tau^2 = 1$ и $a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\xi_i \xi_j = 0$, множество

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \quad | \quad \tau + a_{i\lambda}(\boldsymbol{x}, t, \lambda)\xi_i = 0\}$$

имеет нулевую меру Лебега. (Здесь, $a_{i\lambda} = \partial_\lambda a_i$.)

Следующая теорема является основным результатом третьей главы диссертации.

Теорема 3.1. *Пусть уравнение* (3.1a) *истинно нелинейно в смысле условия G3. Пусть для матрицы $\mathbb{A}$ выполняется одно из двух условий: (1) ранг d_0 этой матрицы постоянен; (2) эта матрица диагональна.*

Тогда справедливы утверждения:

(a) при любых начальных данных $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ задача (3.1) *имеет по меньшей мере одно ограниченное энтропийное решение $u \in L^\infty(\Pi)$, такое, что $\mathbb{A}^{1/2}\nabla_x u \in L^2_{loc}(\Pi)$;*

(b) любое ограниченное в $L^\infty(\Pi)$ множество ограниченных энтропийных решений уравнения (3.1a) *относительно компактно в $L^1_{loc}(\Pi)$.*

Отметим, что условие (2) в формулировках теоремы допускает случай, когда ранг матрицы

$$\mathbb{A} = \operatorname{diag}\{a_{11}(\boldsymbol{x}, t), \ldots, a_{dd}(\boldsymbol{x}, t)\}$$

является переменным.

Понятие энтропийного решения вводится стандартным образом, т.е. аналогично определению во второй главе диссертации (см. определение 2.1 выше в п. III.2 автореферата). Доказательство теоремы 3.1 основано на методе кинетического уравнения, на конструкции мер Янга и на версии Е.Ю. Панова H-мер Л. Тартара.

В четвертой и пятой главах диссертации методы и результаты, построенные во второй и третьей главах, применяются для исследования двух задач о фильтрации вязких несжимаемых жидкостей в пористых средах, включающих в свои постановки вырождающиеся параболически-гиперболические уравнения второго порядка.

III.4. В **четвертой главе** изучается ультрапараболическая модель Веригина, описывающая динамику фильтрации вязкой жидкости, содержащей растворенное в ней вещество (примесь), через пористую среду с учетом эффекта диффузии примеси. При этом считается, что поры имеют геометрически анизотропную вырожденную структуру. Эта модель является следствием наиболее общей модели фильтрации жидкости с примесью, предложенной Н.Н. Веригиным в 1953 г. Состоит она в следующем.

Задача A4. (Ультрапараболическая задача Веригина.) В пространственно-временном слое $\Pi := \mathbb{R}^2_x \times (0,T)$, $T = \mathrm{const} > 0$, требуется отыскать распределение концентраций $u = u(\boldsymbol{x}, t)$, поле скоростей фильтрации $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = (v_1(\boldsymbol{x}, t), v_2(\boldsymbol{x}, t))$ и распределение давлений $p_* = p_*(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющие ультрапараболическому уравнению баланса массы

$$a(u)_t + \mathrm{div}_x(\boldsymbol{v}u + \boldsymbol{c}(u)) = \partial_n^* \partial_n b(u), \tag{4.1a}$$

закону Дарси

$$\boldsymbol{v} = -\nabla_x p_* + g(u)\boldsymbol{e}_1, \tag{4.1b}$$

условию несжимаемости

$$\mathrm{div}_x \boldsymbol{v} = 0, \tag{4.1c}$$

1-периодическим по $\boldsymbol{x}$ начальным условиям из класса $L^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad 0 \le u_0(\boldsymbol{x}) \le 1, \quad u_0(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ (i = 1, 2), \tag{4.1d}$$

и условиям периодичности:

$$u(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i, t) = u(\boldsymbol{x}, t), \quad \nabla_x p_*(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i, t) = \nabla_x p_*(\boldsymbol{x}, t), \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Pi \ (i = 1, 2). \tag{4.1e}$$

Функции $a(u)$, $b(u)$, $c_1(u)$, $c_2(u)$ и $g(u)$ заданы и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &a, b, c_1, c_2, g \in C^2_{loc}(\mathbb{R}), \quad a'(u), b'(u) > 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}, \\ &g'(u) = 0 \quad \forall u \ge u_g, \quad \text{где } u_g = \mathrm{const} \text{ достаточно велико.} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Дифференциальные операторы ∂_n и ∂_n^* определены по формулам

$$\partial_n = n_1(\boldsymbol{x})\partial_{x_1} + n_2(\boldsymbol{x})\partial_{x_2}, \quad \partial_n^* = \partial_{x_1}(n_1(\boldsymbol{x})\cdot) + \partial_{x_2}(n_2(\boldsymbol{x})\cdot),$$

в которых $\boldsymbol{n} \in C^2(\mathbb{R}_x^2)$ — заданное 1-периодическое по $\boldsymbol{x}$ невырожденное векторное поле: $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ $(i=1,2)$, $|\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})| \neq 0$ в $\mathbb{R}_x^2$.

Заметим, что слагаемое второго порядка $\partial_n^* \partial_n b(u)$ может быть записано в виде $\operatorname{div}_x(\mathbb{A}\nabla_x b(u))$ с диффузионной матрицей $\mathbb{A} = \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$ (то есть $a_{ij} = n_i n_j$). Такой вид матрицы $\mathbb{A}$ означает, что эффект диффузии в направлении, перпендикулярном $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$, отсутствует. Геометрически это соответствует ситуации, когда пористый скелет состоит из нитей, для которых в каждой точке $\boldsymbol{x}$ направление $\boldsymbol{n}^\perp$ является касательным.

Накладывается дополнительное условие истинной нелинейности.

Условие G4. Для почти всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ функция

$$\lambda \mapsto -c_1(\lambda) n_2(\boldsymbol{x}) + c_2(\lambda) n_1(\boldsymbol{x})$$

нелинейна на любом невырожденном интервале из множества

$$\{\lambda \in [0,1] : \, a''(\lambda) = 0\}$$

и функция

$$\begin{aligned} \lambda \quad \mapsto \quad & \frac{a'(\lambda)}{a''(\lambda)} \big(-c_1''(\lambda) n_2(\boldsymbol{x}) + c_2''(\lambda) n_1(\boldsymbol{x})\big) \\ & + c_1'(\lambda) n_2(\boldsymbol{x}) - c_2'(\lambda) n_1(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

непостоянна на любом невырожденном интервале из множества

$$\{\lambda \in [0,1] : \, a''(\lambda) \neq 0\}.$$

Вводится понятие энтропийного решения задачи A4, и с помощью методов третьей главы в сочетании с известной теорией эллиптических уравнений второго порядка, устанавливаются следующие теоремы, которые являются основными результатами главы.

Теорема 4.1. *(Существование энтропийных решений.) Пусть задача A4 истинно нелинейна в смысле условия G4. Тогда она имеет по меньшей мере одно энтропийное решение при любых начальных данных $u_0 \in L^\infty$, таких, что $0 \le u_0(\boldsymbol{x}) \le 1$ п.в. в $\mathbb{R}^2$.*

Теорема 4.2. *(О подавлении быстро осциллирующих начальных режимов.) Пусть задача A4 истинно нелинейна в смысле условия G4 и снаб-*

жена быстро осциллирующими начальными данными, которые моделируются как слабый предел последовательности $\{u_0^k\}_{k=1,2,\dots} \subset L^\infty$*, так что*

$$u_0^k \to u_0 \text{ слабо* в } L^\infty \text{ при } k \nearrow \infty. \tag{4.3}$$

Тогда существует подпоследовательность энтропийных решений (u^k, p_*^k)*, соответствующих начальным данным* u_0^k*, сходящаяся сильно в* $L^2(0,T;L^2) \times L^2(0,T;H^{1,2})$ *при* $k \nearrow \infty$ *к энтропийному решению* (u, p_*)*, соответствующему начальным данным* u_0*.*

Своеобразие задачи A4 заключается в вырожденности диффузионного процесса по пространственным направлениям, чего не наблюдается в хорошо изученных классических моделях двухфазной фильтрации Маскета–Леверетта и Веригина. В этой связи теоремы 4.1 и 4.2 являются продолжением обширной теории уравнений двухфазной фильтрации.

III.5. В **пятой главе** исследуется задача Коши для модели Дарси–Стефана, предложенной португальскими учеными Ж. Ф. Родригешем и Ж.М. Урбану (J.F. Rodrigues, J.M. Urbano, 1999) для описания фазовых переходов типа лед/вода в пористых грунтах с учетом фильтрации жидкой фазы. Формулируется задача следующим образом.

Задача D-S. Предполагается, что сплошная среда в каждый момент времени $t \in [0,T]$, где T — произвольно заданная положительная постоянная, заполняет плоскость $\mathbb{R}^2$ или трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$. Часть среды пребывает в твердом (замерзшем) состоянии при температуре $\theta < 0$ и занимает некоторую область

$$\mathcal{S}(t) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \theta(\boldsymbol{x},t) < 0\}$$

$(d = 2,3)$, часть — в жидком (растаявшем) состоянии при температуре $\theta > 0$ и занимает область

$$\mathcal{L}(t) := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{S}(t)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \theta(\boldsymbol{x},t) > 0\}.$$

При этом расположение областей $\mathcal{S}(t)$ и $\mathcal{L}(t)$ и межфазной границы

$$\Gamma(t) = \overline{\mathcal{S}(t)} \cap \overline{\mathcal{L}(t)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \theta(\boldsymbol{x},t) = 0\}$$

заранее не известно.

Требуется отыскать распределение удельной внутренней энергии $e = e(\boldsymbol{x},t)$, поле скоростей фильтрации $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ и распределение давлений $p_* = p_*(\boldsymbol{x},t)$, удовлетворяющие уравнению баланса энергии

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}e) = \Delta_x \theta, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma(t), \quad t \in (0,T); \tag{5.1a}$$

термодинамическому уравнению состояния сплошной среды

$$\theta = \begin{cases} \theta_s(e) & \text{при } e < 0, \\ 0 & \text{при } e \in [0, l], \\ \theta_l(e) & \text{при } e > l, \end{cases} \tag{5.1b}$$

где функции θ_s и θ_l заданы так, что $\theta = \theta(e)$ обладает ограниченной второй производной, является, вообще говоря, нестрого монотонно возрастающей, причем $0 < \theta_s'(e), \theta_l'(e) < +\infty$, $\forall\, e \in \mathbb{R} \setminus [0, l]$; условию неподвижности замерзшей фазы

$$\boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}(t),\ t \in (0, T); \tag{5.1c}$$

уравнению неразрывности (другими словами, условию несжимаемости) и закону фильтрации Дарси при $\theta \geq 0$:

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\mathcal{L}(t)},\ t \in (0, T), \tag{5.1d}$$

$$\boldsymbol{v} = -\nabla_x p_* + \boldsymbol{g}(\theta), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\mathcal{L}(t)},\ t \in (0, T); \tag{5.1e}$$

уравнениям баланса массы и тепла на межфазной границе $\Gamma(t)$

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad [\nabla_x \theta]_s^l \cdot \boldsymbol{n} = l \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma(t), \quad t \in (0, T) \tag{5.1f}$$

(второе из условий также имеет название условия Стефана); ограниченным периодическим начальным данным для распределения удельной внутренней энергии

$$e(\boldsymbol{x}, 0) = e_0(\boldsymbol{x}), \quad \text{где} \quad |e_0(\boldsymbol{x})| \leq c_0 = \text{const}, \quad e_0(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}_i) = e_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \tag{5.1g}$$

и условиям пространственной периодичности

$$e(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}_i, t) = e(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}_i, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t), \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]. \tag{5.1h}$$

В уравнениях (5.1a)–(5.1h) $\boldsymbol{k}_i$ $(1 \leq i \leq d)$ — единичные орты стандартного декартова базиса в $\mathbb{R}^d$; θ — температура сплошной среды, постоянная при значениях удельной внутренней энергии из невырожденного интервала $[0, l]$, что выражает собой явление фазового перехода; значения $\theta = 0$ и $e = l$ — это температура протаивания–замерзания и скрытая удельная теплота таяния, соответственно; $\boldsymbol{g} \in C^2(\mathbb{R})$ — плавучесть, т.е. вектор распределенных архимедовых сил, которая может быть в общем случае нелинейной функцией температуры; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к $\Gamma(t)$, направленный в сторону $\mathcal{S}(t)$; $\boldsymbol{V}$ — скорость перемещения $\Gamma(t)$; скобка $[\nabla_x \theta]_s^l = (\nabla_x \theta)^l - (\nabla_x \theta)_s$ обозначает скачок градиента температуры $\nabla_x \theta$ через границу $\Gamma(t)$, где $(\nabla_x \theta)^l$ и $(\nabla_x \theta)_s$ — это предельные значения $\nabla_x \theta$ на $\Gamma(t)$ со сторон $\mathcal{L}(t)$ и $\mathcal{S}(t)$, соответственно.

Вводится понятие энтропийного решения задачи D-S и с помощью методов и результатов второй главы диссертации в сочетании с известной теорией эллиптических уравнений второго порядка доказывается теорема существования энтропийных решений.

Дополнительно проводится эвристическое рассмотрение, в результате которого устанавливается, что всякое энтропийное решение удовлетворяет второму началу термодинамики, постулирующему неотрицательное производство энтропии. С физической точки зрения в этом заключается преимущество понятия энтропийного решения перед стандартным понятием слабого обобщенного решения.

III.6. В **шестой главе** рассматривается задача динамики вязкой баротропной сплошной среды с быстро осциллирующими начальными данными.

Задача A6. В пространственно-временном цилиндре $Q_T = \{(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times (0, T)\}$ (Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $T = const > 0$) требуется определить плотность $\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$, поле скоростей $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ и давление $P = P(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющие уравнению баланса массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}_x(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{6.1}$$

уравнению баланса количества движения

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \mathrm{div}_x(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mu \Delta_x \boldsymbol{u} - \xi \nabla_x \mathrm{div}_x \boldsymbol{u} + \nabla_x P = \rho \boldsymbol{g},$$
$$(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{6.2}$$

и уравнения состояния баротропного газа

$$P = a\rho^{\gamma}, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times (0, T). \tag{6.3}$$

Система дополняется условием прилипания на границе течения

$$\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T), \tag{6.4}$$

и начальными данными

$$\rho|_{t=0} = \rho_0^{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0^{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{6.6}$$

Значения вязкости $\mu > 0$, $\xi > -\mu$ и коэффициент $a > 0$ постоянны и заданы. Постоянная адиабаты γ больше трёх. Гладкая вектор-функция $\boldsymbol{g}$ — заданная плотность распределенных массовых сил. Начальные данные зависят от малого параметра $\varepsilon > 0$ и удовлетворяют следующим условиям и предельным соотношениям:

$$\rho_0^\varepsilon \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega, \quad \rho_0^\varepsilon \in L^\gamma(\Omega), \tag{6.7}$$

$$\boldsymbol{u}_0^\varepsilon \in L^{2\gamma/(\gamma-1)}(\Omega), \tag{6.8}$$

$$\rho_0^\varepsilon \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} \rho_0^* \text{ слабо в } L^\gamma(\Omega), \tag{6.9}$$

$$\boldsymbol{u}_0^\varepsilon \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} \boldsymbol{u}_0^* \text{ сильно в } L^{2\gamma/(\gamma-1)}(\Omega). \tag{6.10}$$

Слабое предельное соотношение (6.9) моделирует эффект быстрых осцилляций распределений плотности.

При произвольно фиксированном $\varepsilon > 0$ задача А6 имеет по меньшей мере одно обобщенное решение $(\rho^\varepsilon, \boldsymbol{u}^\varepsilon, P^\varepsilon)$. Это гарантируется существующей теорией краевых задач для уравнений сжимаемого вязкого газа (П.-Л. Лионс, 1998, Э. Файрайзл, А. Новотны, Х. Петцельтова (E. Feireisl, A. Novotný, H. Petzeltová, 2001)).

Основным результатом шестой главы является следующая теорема.

Теорема 6.1. *(Об усреднении уравнений вязкого газа с быстро осциллирующими начальными данными.) Пусть* $\{(\rho^\varepsilon, \boldsymbol{u}^\varepsilon, P^\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ *— семейство обобщенных решений задачи А6, соответствующее быстро осциллирующим начальным данным* $\{(\rho_0^\varepsilon, \boldsymbol{u}_0^\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$. *Тогда существует четверка функций* $(\rho^*, \boldsymbol{u}^*, P^*, f)$ *и подпоследовательность* $\{\varepsilon \searrow 0\}$, *такие, что*

$$\rho^\varepsilon \underset{\varepsilon\searrow 0}{\to} \rho^* \qquad \text{слабо в } L^\gamma(\Omega \times (0,T)), \tag{6.11}$$

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon \underset{\varepsilon\searrow 0}{\to} \boldsymbol{u}^* \qquad \text{слабо в } L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{6.12}$$

$$P^\varepsilon \underset{\varepsilon\searrow 0}{\to} P^* \qquad \text{слабо в } L^{1+\kappa}(\Omega \times (0,T)) \quad (\text{для малых } \kappa > 0), \tag{6.13}$$

и четверка функций $(\rho^*, \boldsymbol{u}^*, P^*, f)$ *является решением сформулированной ниже задачи H6.*

Задача H6. (Усредненная задача динамики вязкого газа с быстро осциллирующими начальными данными.) В области $(\boldsymbol{x}, t, \lambda) \in \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R}_\lambda$ требуется определить эффективные плотность $\rho^* = \rho^*(\boldsymbol{x}, t)$, поле скоростей $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}, t)$, давление $P^* = P^*(\boldsymbol{x}, t)$, а также непрерывную справа и монотонно неубывающую по λ функцию распределения $f = f(\boldsymbol{x}, t, \lambda)$, $0 \leq f \leq 1$ почти всюду в $\Omega \times (0,T) \times \mathbb{R}_\lambda$, удовлетворяющие

1) тем же уравнениям баланса массы и количества движения, что и в исходной задаче А6, с функциями ρ^*, $\boldsymbol{u}^*$ и P^* на месте ρ, $\boldsymbol{u}$ и P;

2) уравнению состояния

$$P^*(\boldsymbol{x},t) = a\gamma \int_{[0,\infty)} \lambda^{\gamma-1}(1 - f(\boldsymbol{x},t,\lambda))d\lambda; \tag{6.14}$$

3) кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_x(f\boldsymbol{u}^*) - \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda f \mathrm{div}_x \boldsymbol{u}^*) + \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda \mathfrak{C}) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T) \times \mathbb{R}_\lambda), \tag{6.15}$$

в котором функция нелинейный оператор $\mathfrak{C}$ от функции f определен формулой

$$(\mathfrak{C}(f))(\boldsymbol{x},t,\lambda) := \frac{1}{\mu+\xi} \int_\lambda^\infty (as^\gamma - P^*(\boldsymbol{x},t))d_s f(\boldsymbol{x},t,s); \tag{6.16}$$

4) а также начальным условиям

$$\rho^*|_{t=0} = \rho_0^*(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{u}^*|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0^*(\boldsymbol{x}), \quad f|_{t=0} = f_0(\boldsymbol{x},\lambda), \tag{6.17}$$

где f_0 — функция распределения меры Янга, ассоциированной с подпоследовательностью $\{\rho_0^\varepsilon\}_{\varepsilon\searrow 0}$, и граничному условию

$$\boldsymbol{u}^*|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0,T). \tag{6.18}$$

Решение задачи Н6 понимается в обобщенном смысле, то есть в смысле соответствующих интегральных равенств.

В формуле (6.16) $d_s f(\boldsymbol{x},t,s)$ — мера Стильтьеса, порожденная функцией $s \mapsto f(\boldsymbol{x},t,s)$ при почти всех $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times (0,T)$.

Заметим, что от начальных данных в настоящей работе не требуется никаких свойств упорядоченности, например периодичности, квазипериодичности, случайной однородности: полную информацию об эволюции осцилляций содержит кинетическое уравнение (6.15). Функция f — это функция распределения меры Янга, ассоциированной с последовательностью ρ^ε.

III.7. В **седьмой главе** Рассматривается одномерная математическая модель динамики вязкого баротропного газа с быстро осциллирующими начальными распределениями удельного объема, заданная в массовых лагранжевых координатах $x \in \Omega := (0,X)$, $t \in [0,T]$ ($X = \mathrm{const} > 0$, $T = \mathrm{const} > 0$). Быстрые осцилляции в начальных данных моделируются посредством малого параметра $\varepsilon > 0$, характеризующего частоты осцилляций. Считается, что $\eta_\varepsilon^0 \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} \eta_*^0$ слабо в $L^\infty(\Omega)$, где заданная функция η_*^0 описывает эффективное начальное распределение удельного объема, возникающее при стремлении частоты осцилляций к бесконечности. Существование решений у этой модели при фиксированных значениях параметра ε

гарантируется известными положениями теории уравнений вязкого баротропного газа (А.А. Амосов, А.А. Злотник, 1994, 1996).

Проводится гомогенизация рассматриваемой модели, т.е. предельный переход в уравнениях и краевых условиях при $\varepsilon \searrow 0$. При этом в рассматриваемой постановке не предполагается, чтобы начальные распределения удельного объема имели какую-либо упорядоченную микроструктуру: периодическую, квазипериодическую, случайную однородную и т.п. Как и в шестой главе диссертации, для изучения предельных режимов, возникающих в распределении удельного объема при $\varepsilon \searrow 0$, вводятся в рассмотрения меры Янга, ассоциированные с подпоследовательностями $\{\eta^\varepsilon\}_{\varepsilon\searrow 0}$. Функции распределения мер Янга становятся новыми искомыми функциями. Для них конструируется дополнительное кинетическое уравнение, которое точно описывает эволюцию быстрых осцилляций. Это уравнение совместно с усредненными уравнениями баланса массы, количества движения, напряженного состояния, усредненным кинематическим уравнением движения частиц и набором граничных и начальных условий составляет замкнутую гомогенную модель динамики вязкого сжимаемого газа с быстро осциллирующими начальными данными. Построенная гомогенная модель и строгое обоснование процедуры гомогенизации являются первым основным результатом главы.

Второй основной результат заключается в следующем: в случае, когда осцилляции начальных распределений удельного объема являются 1-периодическими функциями, то есть имеют вид $\eta^0_\varepsilon(x) = \eta^0\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, где $\eta^0(x,y)$ — 1-периодическая непрерывная по y функция, показано, что построенная гомогенная модель приводится к одномерной квазиосредненной модели Н.С. Бахвалова и М.Э. Эглит в изэнтропическом случае.

В **восьмой главе** рассматривается математическая модель, описывающая нестационарное течение Стокса мелкодисперсной смеси вязких несжимаемых жидкостей с быстро осциллирующими начальными данными, происходящее в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ в течение промежутка времени $[0,T]$ ($T = \mathrm{const} < \infty$). При этом считается, что значения вязкости $\nu_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,\lambda)$ переносятся вдоль траекторий движения частиц со скоростью $\boldsymbol{v}_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,\lambda)$, где ε и λ — малые произвольные положительные параметры, характеризующие соответственно частоты осцилляций распределений вязкости и скорости и амплитуды отклонений этих распределений от постоянного значения вязкости $a_0 > 0$ и достаточно гладкого поля скоростей $\boldsymbol{v}^{(0)}(\boldsymbol{x},t)$, определяющих некоторое «плавное невозмущенное» течение «средней» однородной вязкой жидкости. Существование решений у этой модели (*задача A8*) при фиксированных значениях параметров ε и λ гарантируется известными положениями теории уравнений Стокса и Навье–Стокса.

Проводится гомогенизация рассматриваемой модели, то есть предельный переход в уравнениях и краевых условиях при $\varepsilon \searrow 0$, и возникает проблема нахождения эффективных характеристик гомогенной среды, связанная с необходимостью предельного перехода в произведении $\nu_\varepsilon(\nabla_x \boldsymbol{v}_\varepsilon + (\nabla_x \boldsymbol{v}_\varepsilon)^t)$, в то время как ν_ε и $\nabla_x \boldsymbol{v}_\varepsilon$ сходятся всего лишь слабо* в $L^\infty(\Omega \times [0,T])$ и слабо в $L^2(\Omega \times [0,T])$, соответственно. В современном состоянии теория гомогенизации позволяет преодолевать проблемы такого рода только тогда, когда среда имеет определенную упорядоченную микроструктуру: периодическую, квазипериодическую, случайную однородную и т.п. Следует отметить, что исходные данные для смеси, описываемые решениями задачи А8, не обладают какими-либо условиями упорядоченности.

Предлагается и реализуется метод приближенного определения эффективных характеристик мелкодисперсных гомогенных смесей, не имеющих упорядоченной структуры, основанный на использовании предложенной Л. Тартаром концепции H-меры: наряду с исходной задачей А8 рассматривается приближенная задача В8, решения которой γ_ε и $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ близки к решениям ν_ε и $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ задачи А8; в терминах H-меры, соответствующей последовательности $\{\gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, приближенно с повышенной точностью аппроксимации определяется структура слабого предела $w\text{-}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \gamma_\varepsilon(\nabla_x \boldsymbol{u}_\varepsilon + (\nabla_x \boldsymbol{u}_\varepsilon)^t)$. Как следствие, конструируется система приближенных гомогенных уравнений, в рамках которой H-мера является неизвестной, подлежащей определению. Наконец, полученная система замыкается добавлением к ней макроскопического, то есть не содержащего параметр ε, эволюционного *уравнения Тартара*, единственным решением которого служит H-мера. Итогом проводимых действий является построение корректной замкнутой модели (в диссертации она называется *моделью Б8*, решения которой с повышенной точностью аппроксимируют слабые пределы решений задачи В8 и поэтому с достаточно хорошим приближением описывают движение гомогенной смеси.

Девятая глава посвящена исследованию *уравнения Тартара*

$$\partial_t \mu_t + \sum_{i=1}^{2} v_i \partial_{x_i} \mu_t + \sum_{i,j=1}^{2} \partial_y (\mu_t Y_{ij} \partial_{x_i} v_j) = 0,$$

описывающего эволюцию H-меры μ_t, ассоциированной с последовательностью решений линейного уравнения переноса $\partial_t \rho + \sum\limits_{i=1}^{2} v_i \partial_{x_i} \rho = 0$ в случаях, когда заданное поле скоростей $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ является соленоидальным и достаточно гладким. Здесь, $(t, \boldsymbol{x}, y) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{S}^1$, $0 < T < +\infty$, Ω — ограниченное открытое подмножество в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{S}^1$ — единичная окружность в $\mathbb{R}^2$, заданные коэффициенты $Y_{ij} = Y_{ij}(y)$ являются бесконечно гладкими.

В предположении, что $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, в настоящей главе устанавливается корректность задачи Коши для уравнения Тартара в том же пространстве мер, которому как раз и принадлежат H-меры. С этой целью конструируется продолжение теории лагранжевых координат для случая негладких соленоидальных полей скоростей.

В **десятой главе** рассматривается линеаризованная модель совместного движения упругого пористого грунта и целиком заполняющей поровое пространство вязкой сжимаемой жидкости с учетом теплопроводности. Считается, что поровое пространство обладает периодической геометрией, и что модель содержит малый параметр – отношение характерных размеров микро- и макроуровней, а именно длины ребра ячейки периодичности и характерного размера полной термомеханической системы. Проводится процедура усреднения, то есть предельный переход в уравнениях модели при стремлении малого параметра к нулю. При этом предполагается, что физические характеристики отдельных фаз от малого параметра не зависят. В результате конструируется корректно поставленная начально-краевая задача для модели линейной термовязкоупругости с памятью формы и тепла, решением которой являются пределы решений исходной задачи, и коэффициенты которой однозначно определяются микроструктурой. Усреднение проводится методом двухмасштабной сходимости и математически строго обосновано.

Основные публикации по теме диссертации

[1] Саженков С.А. Уравнение Тартара для гомогенизации модели динамики мелкодисперсных смесей // Сибирский матем. журн. - 2001. - Т. 42. - № 6. - С. 1375-1390.

[2] Саженков С.А. Обобщенные лагранжевы координаты и единственность решения линейного транспортного уравнения // Дифференц. уравн. - 2002. - Т. 38. - № 1. - С. 117-125.

[3] Sazhenkov S.A. Cauchy problem for the Tartar equation // Proc. R. Soc. Edinb. - 2002. - Vol. 132A. - P. 395-418.

[4] Плотников П.И., Саженков С.А. Задача Коши для ультрапараболического уравнения Гратца–Нуссельта // Докл. АН. - 2005. - Т. 401. - № 4. - С. 455-458.

[5] Plotnikov P.I., Sazhenkov S.A. Kinetic formulation for the Graetz–Nusselt ultra-parabolic equation // J. Math. Anal. Appl. - 2005. - Vol. 304. - P. 703-724.

[6] Саженков С.А. Истинно нелинейное ультрапараболическое уравнение Гратца–Нуссельта // Сибирский матем. журн. - 2006. - Т. 47. - № 2. - С. 431-454.

[7] Meirmanov A.M., Sazhenkov S.A. Generalized solutions to linearized equations of thermoelastic solid viscous thermofluid // Electron. J. Differential Equat. - 2007. - Vol. 2007. - No. 41. - P. 1-29.

[8] Sazhenkov S.A. Entropy solutions to a genuinely nonlinear ultraparabolic Kolmogorov-type equation // In: Jamil Aslam, Faheem Hussain, Asghar Qadir, et. al., eds. Mathematical Physics, Proceedings of the 12th Regional conference held in Islamabad, Pakistan, on 27 March – 1 April 2006. - Singapore: World Scientific, 2007. - P. 47-52.

[9] Саженков С.А. Исследование задачи Дарси–Стефана о фазовых переходах в насыщенном пористом грунте // Прикл. мех. и техн. физ. - 2008. - Т. 49. - № 4. - С. 81-93.

[10] Саженков С.А. Эффективная термовязкоупругость насыщенного пористого грунта // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: математика, механика, информатика. - 2008. - Т. 8. - № 2. - С. 106-130.

[11] Саженков С.А. Энтропийные решения ультрапараболической задачи Веригина // Сибирский матем. журн. - 2008. - Т. 49. - № 2. - С. 449-463.

[12] Sazhenkov S.A. Kinetic formulation for the Darcy–Stefan problem on phase transitions in a saturated porous ground // Proceedings of the XXXVIII Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics APM–2010" held in Saint-Petersburg (Repino), on July 1–5, 2010. - Saint-Petersburg, Institute for Problems in Mechanical Engineering, 2010. - P. 584-590.

[13] Саженков С.А. Эффективная модель динамики баротропного газа с быстро осциллирующими начальными данными // Сибирский журн. индустриальной матем. - 2011. - Т. XIV. - № 3(47). - С. 100-111.

[14] Зубкова А.В., Саженков С.А. Эффективное уравнение турбулентной диффузии в трещиновато-пористой среде // Известия Алтайского гос. ун-та, Барнаул. - 2012 - Вып. 1(73). - С. 47-54.

[15] Саженков С.А. Версия усредненной модели Бахвалова–Эглит с кинетическим уравнением эволюции осцилляций // Дифференц. уравн. - 2012. - Т. 48. - № 8. - С. 1150-1165.

Энтропийные решения нелинейных задач динамики многофазных сред

автореферат

Саженков Сергей Александрович

Подписано в печать «_».09.2012 г.	Заказ №__
Формат бумаги 60×84	Объем 2 п.л.
Тираж 100 экз.	Бесплатно

Ротапринт ИГиЛ СО РАН

630090 Новосибирск, просп.акад. Лаврентьева 15