На правах рукописи

Уварова Ирина Алексеевна

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ И УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

НОВОСИБИРСК — 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Новосибирский национальный исследовательский государственный университет".

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Демиденко Геннадий Владимирович**
Официальные оппоненты:	**Голубятников Владимир Петрович**, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник
	Финогенко Иван Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук, заведующий лабораторией
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Национальный исследовательский Томский государственный университет"

Защита состоится 20 ноября 2012 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Новосибирский национальный исследовательский государственный университет" по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан "____" октября 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук Старовойтов В.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие математические модели естествознания описываются с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad n \gg 1. \tag{1}$$

К таким системам приводят также классические способы построения приближенных решений краевых задач для уравнений с частными производными. Поэтому изучению систем высокой размерности посвящено очень много работ. При этом естественно рассматривать системы (1), как "укороченные" системы счетных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, x_2, \dots), \quad i = 1, 2, \dots. \tag{2}$$

Построение теории счетных систем дифференциальных уравнений началось с работы А.Н. Тихонова (1934 г.), в которой впервые были доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши для (2). Активные исследования таких систем начались в 50-е годы после работ М.А. Красносельского, М.Г. Крейна, С.Г. Крейна, К.П. Персидского и др. Во многих работах результаты были получены с использованием методов функционального анализа и "укороченных" систем дифференциальных уравнений вида (1), имеющих высокую размерность.

Другой подход к изучению систем высокой размерности (1) заключается в сведении к исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений малой размерности. Однако существует ряд задач, которые принципиально не могут быть сведены к системам малой размерности. В частности, к системам очень высокой размерности приводят исследования в биологии. При этом размерность систем может достигать настолько больших величин, что нахождение численных значений компонент решений на компьютере зачастую невозможно. Например, к таким системам относится следующая нелинейная система дифференциальных уравнений, моделирующая многостадийный синтез вещества

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F(t, x), \tag{3}$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{n-1}{\tau} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \dfrac{n-1}{\tau} & -\dfrac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\dfrac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \dfrac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix},$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{T}}, \quad F(t,x) = (g(t, x_n), 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Процесс синтеза состоит из n стадий, τ — суммарное время протекания стадий, $\theta \geq 0$. Компоненты $x_i(t)$ искомой вектор–функции $x(t)$ определяют концентрацию вещества на i-й стадии процесса.

Отметим, что процесс синтеза вещества может иметь сотни тысяч промежуточных стадий n. В задаче синтеза вещества биологов прежде всего интересует концентрация $x_n(t)$ конечного продукта. Поэтому нужно уметь достаточно точно вычислять последнюю компоненту решения $x_n(t)$ при $n \gg 1$. Отметим также, что систему (3) нельзя рассматривать как "укороченную" систему некоторой счетной системы (2), так как коэффициенты системы являются неограниченными при $n \to \infty$. По этой же причине ни одним уравнением системы (3) нельзя пренебречь, чтобы свести ее к системе меньшей размерности. Построение на компьютере приближенного решения задачи Коши для такой системы представляет серьезную проблему. Поэтому при рассмотрении нелинейной системы (3) с очень большим числом уравнений возникает *"проблема большой размерности"*.

В 2002 г. эта проблема была решена в результате совместной деятельности Г.В. Демиденко, В.А. Лихошвая и С.И. Фадеева. Метод ее решения основан на установленных связях между решениями системы (3) и решениями уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)). \tag{4}$$

Предположение о возможных связях было высказано В.А. Лихошваем, исходя из биологических соображений. Численные расчеты, проведенные С.И. Фадеевым, подтверждали это предположение. Строгое доказательство существования таких связей впервые установлено Г.В. Демиденко и опубликовано в работе [1] (см. теоремы 1–4). Эти теоремы дают обоснование эффективному методу для численного нахождения концентрации $x_n(t)$ конечного продукта при $n \gg 1$ с использованием уравнения с запаздывающим аргументом. Именно, для численного нахождения значений $x_n(t)$ достаточно приближенно решить начальную задачу для уравнения с запаздывающим аргументом (4), при этом можно оценить погрешность аппроксимации $x_n(t) \approx y(t)$ при $n \gg 1$.

Система дифференциальных уравнений (3) является упрощенной моделью процесса синтеза. При описании реальных процессов возникают более сложные системы, и для этих систем также необходимо уметь решать описанную выше *"проблему большой размерности"*. Предельные теоремы Г.В. Демиденко послужили основой при получении аналогичных утверждений для различных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. библиографию в обзорной работе [2]).

Отметим также работы Н.Н. Красовского, Ю.М. Репина, М.Е. Салуквадзе, в которых при решении задач теории управления были установлены связи между решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом. В этих работах изучался обратный вопрос об аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с помощью решений специального класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности.

Теоремы о связях решений систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом имеют важное теоретическое и прикладное значения.

Цель работы. Основной целью диссертации является установление связей между решениями некоторых классов систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом, получение оценок близости решений, изучение влияния начальных данных для систем на начальные данные для уравнения с запаздывающим аргументом, применение полученных результатов к изучению асимптотических свойств решений.

Основные результаты. Исследовано поведение последовательности, составленной из последних компонент решений серии задач Коши для систем вида (3) с различными начальными условиями, при неограниченном увеличении числа уравнений. Доказано, что эта последовательность сходится к решению дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (4). Получены оценки скорости сходимости. Описана зависимость начальных данных для уравнения с запаздывающим аргументом от начальных условий в задаче Коши для систем вида (3) при $n \gg 1$. Изучено асимптотическое поведение решений системы (3) и уравнения (4) при $t \to \infty$.

Рассмотрено два класса систем дифференциальных уравнений высокой размерности. Один из этих классов можно рассматривать как возмущение системы (3) линейными членами, другой — как возмущение системы (3) нелинейными членами. Для этих классов систем установлены связи с уравнением с запаздывающим аргументом (4) и получены оценки близости решений. Для систем из первого класса доказана также обратная предельная теорема об аппроксимации любого решения уравнения с запаздывающим аргументом (4) решениями систем из данного класса.

Методы исследования. При получении результатов были использованы методы теории дифференциально-разностных уравнений, а также методы, предложенные Г.В. Демиденко в цикле работ, посвященных установлению связей между решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом. Вспомогательным аппаратом исследования послужили вейвлеты Хаара и теоремы вложения для соболевских пространств.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. Установлены связи между решениями нескольких классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом. Все полученные результаты являются новыми. Они могут быть использованы при исследовании качественных свойств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом, а также при построении приближенных решений систем высокой размерности.

Апробация работы. Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались и обсуждались на конференциях: XLVIII и XLIX Международные научные студенческие конференции "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 2010 г., 2011 г.), IX молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения-2010" (Казань, 2010 г.), IV Международная конференция "Математика, ее приложения и математическое образование" (Улан-Удэ, 2011 г.), Всероссийская конференция по вычислительной математике КВМ–2011 (Новосибирск, 2011 г.), Международная научная конференция “Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование” (Волгодонск, 2011 г.), Международная конференция “Моделирование, управление и устойчивость” (Украина, Севастополь, 2012 г.).

Основные результаты докладывались на научных семинарах: Общеинститутский математический семинар Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (руководитель: академик Ю.Г. Решетняк), семинар “Математика в приложениях” (руководитель: академик С.К. Годунов), семинар “Избранные вопросы математического анализа” (руководитель: профессор Г.В. Демиденко), а также на заседании Сибирского математического общества (председатель: чл.-корр. РАН С.С. Гончаров).

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127), Российского фонда фундаментальных исследований (№ 10-01-00035) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах, из них 3 — в журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка цитируемой литературы. Объем работы — 149 страниц. Список цитируемой литературы содержит 50 наименований.

Содержание диссертации

Во **введении** дается краткий обзор литературы и излагаются основные результаты диссертации.

Для изложения дальнейшего материала нам понадобится результат Г.В. Демиденко, опубликованный в [1]. Сформулируем этот результат. Для этого рассмотрим серию задач Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_n x + F(t,x), \quad t > 0, \\ x|_{t=0} = x^0, \quad n \geq n_0. \end{cases} \tag{5}$$

Предположим, что функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу. Будем неограниченно увеличивать размерность системы (3) и рассматривать для каждой системы задачу Коши (5) с нулевыми начальными условиями $x^0 = 0$. Ясно, что при любом n задача Коши однозначно разрешима на произвольном отрезке $[0, T]$. Рассматривая только последнюю компоненту решения каждой из задач Коши, получим последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$ (верхний индекс означает число уравнений в системе, нижний — номер компоненты решения).

Теорема 1 (Г.В. Демиденко). *Последовательность* $\{x_n^n(t)\}$ *равномерно сходится на любом отрезке* $[0, T]$, $T > \tau$:

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ *является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, \quad t \in [0, \tau], \quad y(\tau + 0) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

при этом справедлива оценка

$$\max_{t \in [0,T]} |x_n^n(t) - y(t)| \leq \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n \geq n_0, \tag{7}$$

где константа $c > 0$ *зависит от функции* $g(t, z)$, *величины* T *и параметров* τ, θ.

В **первой главе** настоящей диссертации рассмотрена последовательность задач Коши (5) для систем вида (3) с ненулевыми начальными условиями. Основная цель главы — описание предельных свойств последовательности $\{x_n^n(t)\}$ при различных начальных данных в (5), получение оценок скорости сходимости и описание поведения решения при $t \to \infty$.

Первая глава состоит из девяти параграфов. В первых трех параграфах доказываются вспомогательные утверждения, которые используются при доказательстве предельных теорем.

Четвертый параграф первой главы посвящен доказательству предельных теорем для последовательности $\{x_n^n(t)\}$, которые являются аналогами предельной теоремы 1. Сформулируем основные результаты, доказанные в этом параграфе.

Вначале рассмотрим последовательность задач Коши вида (5), предполагая, что векторы начальных данных имеют последнюю компоненту, отличную от нуля, а все остальные компоненты — нулевые, то есть векторы начальных данных в (5) имеют вид

$$x^{n,0} = (0, \dots, 0, a)^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

Неограниченно увеличивая число уравнений и рассматривая только последние компоненты решений каждой из задач Коши вида (5), получим последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$.

Теорема 1.4.1. *Пусть начальные условия в (5) имеют вид (8). Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0,T]$, $T > \tau$:*

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ является решением следующей начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = ae^{-\theta t}, \quad t \in [0,\tau], \quad y(\tau+0) = ae^{-\theta\tau}, \end{cases} \tag{9}$$

при этом имеет место оценка

$$\max_{t\in[0,T]} |x_n^n(t) - y(t)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}, \quad n \geq n_0(\theta,\tau), \tag{10}$$

где константа $c > 0$ не зависит от n.

Рассмотрим последовательность задач Коши вида (5) с начальными данными, имеющими более общий вид. Сформулируем некоторые результаты.

Теорема 1.4.4. *Пусть $n = ml + 1$, $0 \leq s < m$ — целое и начальные условия в (5) имеют вид*

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^{\mathrm{T}}, \quad x_{sl+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \text{ при } j \neq sl+1.$$

Тогда для любого $T > \tau$ для последовательности $\{x_n^n(t)\}$ имеет место сходимость

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_p(0,T)\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

предельная функция $y(t)$ принадлежит пространству $W_p^1(\tau,T)$ и является обобщенным решением начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in \left[0, \frac{m-s}{m}\tau\right), \\ y(t) = ae^{-\theta\left(t-\frac{m-s}{m}\tau\right)}, \quad t \in \left(\frac{m-s}{m}\tau, \tau\right], \\ y(\tau+0) = ae^{-\theta\frac{s}{m}\tau}. \end{cases} \tag{11}$$

Из доказательства теоремы 1.4.4 вытекает оценка скорости сходимости.

Теорема 1.4.7. *Пусть начальный вектор $x^{n,0}$ в (5) такой, что*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j^{n,0}| \le \frac{c}{n^\sigma}, \quad \sigma > 0.$$

Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0,T]$, $T > \tau$, предельная функция $y(t)$ является решением начальной задачи (6), и имеет место оценка

$$\max_{t\in[0,T]} |x_n^n(t) - y(t)| \le \frac{c_1}{\sqrt{n}} + \frac{c_2}{n^\sigma},$$

где константы c_1, $c_2 > 0$ не зависят от n.

Рассмотрим две последовательности начальных векторов $\{\bar{x}^{n,0}\}$ и $\{\tilde{x}^{n,0}\}$ в (5). Пусть $\{\bar{x}_n^n(t)\}$ — последовательность, составленная из последних компонент решений задач Коши вида (5) с начальными векторами из последовательности $\{\bar{x}^{n,0}\}$. Будем предполагать, что последовательность $\{\bar{x}_n^n(t)\}$ является сходящейся в пространстве $L_p(0,T)$

$$\|\bar{x}_n^n(t) - \bar{y}(t), L_p(0,T)\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

при этом предельная функция $\bar{y}(t)$ принадлежит пространству $W_p^1(\tau,T)$ и является обобщенным решением начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{y}(t)}{dt} = -\theta \bar{y}(t) + g(t-\tau, \bar{y}(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ \bar{y}(t) = \bar{\varphi}(t), \quad t \in [0,\tau), \quad \bar{y}(\tau+0) = \bar{a}. \end{cases}$$

Аналогично, последовательность $\{\tilde{x}_n^n(t)\}$, составленная из последних компонент решений задач Коши вида (5) с начальными данными $\tilde{x}^{n,0}$, сходится в $L_p(0,T)$

$$\|\tilde{x}_n^n(t) - \tilde{y}(t), L_p(0,T)\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

к обобщенному решению $\tilde{y}(t) \in W_p^1(\tau, T)$ начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{y}(t)}{dt} = -\theta \tilde{y}(t) + g(t-\tau, \tilde{y}(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ \tilde{y}(t) = \tilde{\varphi}(t), \quad t \in [0,\tau), \quad \tilde{y}(\tau+0) = \tilde{a}. \end{cases}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4.8. *Пусть начальные данные в задаче Коши (5) имеют вид*

$$x^{n,0} = \bar{x}^{n,0} + \tilde{x}^{n,0}.$$

Тогда для любого $T > \tau$ для последовательности $\{x_n^n(t)\}$ имеет место сходимость

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_p(0,T)\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

предельная функция $y(t)$ принадлежит пространству $W_p^1(\tau, T)$ и является обобщенным решением начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \bar{\varphi}(t) + \tilde{\varphi}(t), \quad t \in [0,\tau), \quad y(\tau+0) = \bar{a} + \tilde{a}. \end{cases}$$

В пятом параграфе первой главы изучается поведение решения задачи (5) при $t \to \infty$. При этом на параметры задачи накладываются дополнительные ограничения:

$$0 < L < \theta, \tag{12}$$

где L — константа Липшица для функции $g(t,z)$. Кроме того считаем, что

$$g(t,0) \equiv 0. \tag{13}$$

При этих условиях имеет место теорема.

Теорема 1.5.1. *Нулевое решение задачи Коши (5) асимптотически устойчиво и имеют место следующие оценки*

$$|x_j^n(t)| \le c_j \sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| e^{-\delta t}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$|x_n^n(t)| \le c \sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| e^{-\delta t}, \quad t > 0,$$

где

$$\delta = \min \left\{ \frac{\theta - L}{2}, \frac{1}{\tau} \ln \frac{\theta + L}{2L} \right\}. \tag{14}$$

В шестом параграфе при выполнении условий (12) и (13) доказаны аналоги теорем 1.4.1–1.4.8 на полуоси $\{t > 0\}$. Основной результат этого параграфа заключается в следующем.

Теорема 1.6.3. *Пусть последовательность начальных векторов* $\{x^{n,0}\}$ *в задаче (5) такая, что последовательность* $\{x_n^n(t)\}$*, составленная из последних компонент решений задач Коши вида (5), сходится на отрезке* $[0, T]$ *для любого* $T > \tau$ *к решению начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [0, \tau], \quad y(\tau + 0) = a, \end{cases} \tag{15}$$

для некоторой кусочно-непрерывной начальной функции $\varphi(t)$*. Пусть выполнены условия (12), (13). Тогда при* $n \gg 1$ *справедлива оценка*

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_p(0, \infty)\| \le \frac{c \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}|}{n^{q(p)/(p+1)}},$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* n *и начального вектора* $x^{n,0}$*, функция* $q(p)$ *имеет вид*

$$q(p) = \begin{cases} 1/p, & 1 \le p \le 2, \\ 1/2, & p > 2. \end{cases}$$

При этом
$$\|x_n^n(t)-y(t),W_p^1(\tau,\infty)\|\to 0,\quad n\to\infty.$$

В седьмом параграфе изучена непрерывная зависимость решений уравнения с запаздывающим аргументом (4) от начальных условий.

Теорема 1.7.1. *Пусть выполнено условие (12). Пусть также $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — кусочно-непрерывные функции на отрезке $[0,\tau]$ с конечным числом точек разрыва, причем все разрывы первого рода. Пусть $y_1(t)$, $y_2(t)$ — обобщенные решения задач*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_j(t)}{dt}=-\theta y_j(t)+g(t-\tau,y_j(t-\tau)),\quad t>\tau,\\ y_j(t)=\varphi_j(t),\quad t\in[0,\tau],\quad y_j(\tau+0)=a_j,\end{cases}$$

где $j=1,2$ соответственно. Тогда имеет место оценка

$$\|y_1(t)-y_2(t),W_p^1(\tau,\infty)\|\le c\big(|a_1-a_2|+\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t),L_p(0,\tau)\|\big),$$

где $c>0$ — константа, не зависящая от начальных данных $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и a_1, a_2.

В следующем параграфе доказана теорема об аппроксимации любого решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом последней компонентой решения системы (3).

Теорема 1.8.1. *Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (15) с кусочно-непрерывной начальной функцией $\varphi(t)$, которая имеет конечное число точек разрыва первого рода. Тогда функция $y(t)$ может быть сколь угодно точно аппроксимирована решениями задачи Коши вида (5) при $n\gg 1$.*

В последнем параграфе с использованием полученных ранее оценок показано, что решение уравнения с запаздывающим аргументом имеет такое же асимптотическое поведение, как функция $x_n^n(t)$.

Теорема 1.9.1. *Пусть выполнены условия (12) и (13). Тогда нулевое решение начальной задачи (15) асимптотически устойчиво и имеет место оценка*

$$|y(t)|\le\tilde{c}e^{-\delta t},\quad t>0,$$

где показатель $\delta>0$ определяется (14).

Вторая глава посвящена изучению связей между решениями системы дифференциальных уравнений высокой размерности

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{A}_n\hat{x} + F(t,\hat{x}), \quad t > 0,$$

где

$$\hat{A}_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{n-1}{\tau_1^n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \dfrac{n-1}{\tau_1^n} & -\dfrac{n-1}{\tau_2^n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\dfrac{n-1}{\tau_{n-1}^n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{n-1}{\tau_{n-1}^n} & -\theta \end{pmatrix},$$

$$F(t,\hat{x}) = (g(t,\hat{x}_n), 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}},$$

и решениями уравнения с запаздывающим аргументом (4). Эту систему можно рассматривать как возмущение системы (3) линейными членами. Результаты этой главы существенно опираются на результаты главы 1, обобщают их. Вторая глава состоит из четырех параграфов.

Как и ранее, предполагаем, что $\theta \geq 0$, функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу. Для коэффициентов τ_j^n системы выполнены следующие условия

$$|\tau_j^n - \tau| < \frac{\rho}{n}, \quad \tau > 0,\ \tau_j^n > 0,\ j = 1, \ldots, n-1.$$

Рассмотрим задачу Коши для этой системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}}{dt} = \hat{A}_n\hat{x} + F(t,\hat{x}), \quad t > 0, \\ \hat{x}|_{t=0} = \hat{x}^0. \end{cases} \tag{16}$$

Будем неограниченно увеличивать размерность системы n. При каждом n задача Коши (16) однозначно разрешима на любом отрезке $[0,T]$. Рассмотрим последовательность $\{\hat{x}_n^n(t)\}$, составленную из последних компонент решений задач Коши вида (16). Как и ранее, верхний индекс обозначает размерность системы, а нижний — номер компоненты решения.

В первом параграфе доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *Пусть при любом* n *начальные условия в (16) нулевые. Тогда последовательность* $\{\hat{x}_n^n(t)\}$ *равномерно сходится на любом отрезке* $[0,T]$, $T>\tau$:

$$\hat{x}_n^n(t)\to y(t), \qquad n\to\infty.$$

Предельная функция $y(t)$ *является решением начальной задачи (6) для уравнения с запаздывающим аргументом и имеет место оценка*

$$\max_{t\in[0,T]}|\hat{x}_n^n(t)-y(t)|\le cn^{-1/2}+\hat{c}\max_{j=1,\dots,n-1}|\tau_j^n-\tau|, \quad n\ge n_0(\theta,\tau). \quad (17)$$

Случай ненулевых начальных данных рассмотрен во втором параграфе. В этом параграфе доказаны аналоги теорем 1.4.1–1.4.8. Сформулируем основные результаты.

Теорема 2.2.1. *Пусть начальные условия в (16) имеют вид*

$$\hat{x}^{n,0}=(0,\dots,0,a)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда последовательность $\{\hat{x}_n^n(t)\}$ *равномерно сходится на любом отрезке* $[0,T]$, $T>\tau$:

$$\hat{x}_n^n(t)\to y(t), \quad n\to\infty.$$

Предельная функция $y(t)$ *является решением начальной задачи (9), и имеет место оценка (17).*

Теорема 2.2.4. *Пусть* $n=ml+1$, $0\le s<m$ *— целое и начальные условия в (16) имеют вид*

$$\hat{x}^{n,0}=(\hat{x}_1^{n,0},\dots,\hat{x}_n^{n,0})^{\mathrm{T}}, \quad \hat{x}_{sl+1}^{n,0}=a, \quad x_j^{n,0}=0 \text{ при } j\ne sl+1.$$

Тогда для любого $T>\tau$ *для последовательности* $\{\hat{x}_n^n(t)\}$ *имеет место сходимость*

$$\|\hat{x}_n^n(t)-y(t),L_p(0,T)\|\to 0, \quad n\to\infty,$$

предельная функция $y(t)$ *принадлежит пространству* $W_p^1(\tau,T)$ *и является обобщенным решением начальной задачи (11).*

Теорема 2.2.7. *Пусть $\{x^{n,0}\}$ такая последовательность начальных данных в (5), что последовательность $\{x_n^n(t)\}$ сходится к решению $y(t) \in W_p^1(\tau, T)$ начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [0, \tau), \quad y(\tau + 0) = a. \end{cases}$$

Тогда последовательность $\{\hat{x}_n^n(t)\}$, составленная из последних компонент решений задач Коши вида (16) с начальными данными $x^{n,0}$, также сходится к $y(t)$.

Рассмотрим теперь начальную задачу для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [0, \tau), \quad y(\tau + 0) = a, \end{cases} \tag{18}$$

где функция $\varphi(t)$ имеет специальный вид:

$$\varphi(t) = e^{-\theta t} \sum_{m=0}^{M} \sum_{k=1}^{2^m} c_{m,k} \varphi_{m,k}(t/\tau) + c_0 e^{-\theta t}, \tag{19}$$

$\varphi_{m,k}(s)$ — функции Хаара:

$$\varphi_{m,k}(s) = \begin{cases} 2^{m/2}, & s \in [(k-1)2^{-m}, (k-1/2)2^{-m}), \\ -2^{m/2}, & s \in [(k-1/2)2^{-m}, k2^{-m}), \\ 0, & s \notin [(k-1)2^{-m}, k2^{-m}), \end{cases}$$

$$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^m.$$

Из теорем 1.4.4, 1.4.8 и 2.2.7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2.8. *Пусть $n = 2^{M+1} l + 1$. Тогда существует последовательность начальных данных в серии задач Коши вида (16) такая, что при $l \to \infty$ последовательность $\{\hat{x}_n^n(t)\}$ сходится*

$$\|\hat{x}_n^n(t) - y(t), L_p(0, T)\| \to 0.$$

Предельная функция $y(t)$ является обобщенным решением начальной задачи (18) с начальной функцией (19). При этом

$$\|\hat{x}_n^n(t) - y(t), W_p^1(\tau, T)\| \to 0.$$

Третий параграф посвящен изучению непрерывной зависимости решения начальной задачи (18) от начальных данных в случае, если начальная функция $\varphi(t)$ кусочно-непрерывна на $[0,\tau]$ и имеет конечное число точек разрыва первого рода. Получены оценки близости решений.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — кусочно-непрерывные функции на отрезке $[0,\tau]$ с конечным числом точек разрыва, причем все разрывы первого рода. Пусть $y_1(t)$, $y_2(t)$ — обобщенные решения задач*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_j(t)}{dt} = -\theta y_j(t) + g(t-\tau, y_j(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y_j(t) = \varphi_j(t), \quad t \in [0,\tau], \quad y_j(\tau+0) = a_j, \end{cases}$$

где $j = 1,2$ соответственно. Тогда имеет место оценка

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau,T)\| \le c\big(|a_1 - a_2| + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t), L_p(0,\tau)\|\big),$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от начальных данных $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и a_1, a_2.

В последнем параграфе этой главы доказано, что любое решение задачи (18) может быть аппроксимировано последней компонентой решения задачи (16) при достаточно больших $n \gg 1$.

Теорема 2.4.1. *Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (18) с кусочно-непрерывной начальной функцией $\varphi(t)$, которая имеет конечное число точек разрыва первого рода. Тогда функция $y(t)$ может быть сколь угодно точно аппроксимирована на любом отрезке $[0,T]$ решениями задачи Коши вида (16) при $n \gg 1$.*

Замечание. В четвертом параграфе так же описан алгоритм построения начального вектора для задачи (16) по начальным данным a, $\varphi(t)$ задачи (18).

В **третьей главе** рассмотрена последовательность задач Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}_1}{dt} = -\dfrac{n-1}{\tau}\dfrac{\bar{x}_1}{1+\rho_1\bar{x}_1^{\gamma_1}} + g(t,\bar{x}_n), \quad t > 0, \\ \dfrac{d\bar{x}_j}{dt} = \dfrac{n-1}{\tau}\left(\dfrac{\bar{x}_{j-1}}{1+\rho_{j-1}\bar{x}_{j-1}^{\gamma_{j-1}}} - \dfrac{\bar{x}_j}{1+\rho_j\bar{x}_j^{\gamma_j}}\right), \\ \qquad\qquad j = 2,\dots,n-1, \\ \dfrac{d\bar{x}_n}{dt} = \dfrac{n-1}{\tau}\dfrac{\bar{x}_{n-1}}{1+\rho_{n-1}\bar{x}_{n-1}^{\gamma_{n-1}}} - \theta\bar{x}_n, \\ \bar{x}|_{t=0} = \bar{x}^0. \end{cases} \tag{20}$$

Эту систему можно рассматривать, как возмущение исходной системы (3) нелинейными членами. Как и ранее, предполагаем, что $\theta \geq 0$, $\tau > 0$, кроме того

$$0 \leq \rho_j \leq \rho, \quad \gamma_j \geq \gamma > 0, \qquad j = 1, \dots, n-1.$$

Функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ неотрицательна, ограничена и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу. Будем считать, что начальные данные для задачи (20) неотрицательны $\bar{x}_j^0 \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

В первом параграфе доказывается однозначная разрешимость задачи Коши (20), из которой вытекает, что последовательность $\{\bar{x}_n^n(t)\}$, состоящая из последних компонент решений серии задач Коши (20), определена на любом отрезке $[0, T]$.

Второй параграф посвящен доказательству предельной теоремы для задачи (20) с нулевыми начальными данными, которая является аналогом теоремы 1. Существенным отличием является утверждение о том, что скорость сходимости $\bar{x}_n^n(t) \to y(t)$, $n \to \infty$, можно оценить следующим образом:

$$\max_{t \in [0,T]} |\bar{x}_n^n(t) - y(t)| \leq c_1 n^{-1/2} + c_2 n^{-\gamma}, \qquad n \geq n_0(\theta, \tau, \gamma, \rho). \tag{21}$$

В третьем параграфе доказаны предельные теоремы для некоторых наборов ненулевых начальных данных. В частности, доказана следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Пусть начальные данные в задаче (20) имеют вид*

$$\bar{x}^{n,0} = (0, \dots, 0, a)^{\mathrm{T}}, \qquad a > 0.$$

Тогда последовательность $\{\bar{x}_n^n(t)\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0, T]$, $T > \tau$:

$$\bar{x}_n^n(t) \to y(t), \qquad n \to \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом (9).

Из доказательства теорем 1.4.1 и 3.3.1 вытекает оценка скорости сходимости вида (21).

Замечание. Отметим интересный факт, вытекающий из оценки (21). А именно, для того, чтобы для заданного $\varepsilon > 0$ обеспечить выполнение оценки

$$|\bar{x}_n^n(t) - y(t)| < \varepsilon, \qquad t \in [0, T], \quad n \geq N_0(\varepsilon, \gamma),$$

при малых $\gamma \approx 0$ нужно выбирать значительно бóльшие номера $N_0(\varepsilon, \gamma)$, чем те, которые вытекают из теоремы 1 в случае невозмущенной системы (3). Впервые этот факт был обнаружен в совместных исследованиях Г.В. Демиденко и Т.В. Котовой в 2004–2005 гг. для систем с линейными возмущениями.

Литература

1. Лихошвай В.А., Фадеев С.И., Демиденко Г.В., Матушкин Ю.Г. Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. мат. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
2. Демиденко Г.В. О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер. Математический форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. Т. 5. С. 45–56.

Работы автора по теме диссертации

1. Демиденко Г.В., Мельник (Уварова) И.А. Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
2. Демиденко Г.В., Мельник (Уварова) И.А. О свойствах решений дифференциальных уравнений, моделирующих многостадийный синтез вещества // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань: Издательство Казанского математического общества, 2010. Т. 40. С. 114–118.
3. Мельник (Уварова) И.А. Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. С. 64.
4. Матвеева И.И., Мельник (Уварова) И.А. О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений большой размерности // Новосибирск, 2011. 17 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 261).

5. Мельник (Уварова) И.А. Об одной нелинейной системе дифференциальных уравнений, моделирующей многостадийный синтез вещества // Вестник ТГУ. Серия: Естественные и технические науки. 2011. Т. 16, № 5. С. 1254–1259.

6. Мельник (Уварова) И.А. О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений, моделирующей многостадийный синтез вещества // Материалы IV Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование". Ч. 2. Улан-Удэ: Издательство ВСГТУ, 2011. Ч. 2. С. 115–120.

7. Мельник (Уварова) И.А. О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференция "Студент и научно-технический прогресс": Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2011. С. 53.

8. Мельник (Уварова) И.А. О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений, моделирующей многостадийный синтез вещества // Математика, ее приложения и математическое образование: Аннотации докладов IV Международной конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2011. С. 42.

9. Мельник (Уварова) И.А. О связях между решениями систем нелинейных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом // Международная научная конференция "Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование". Тезисы докладов. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. С. 142–143.

10. Матвеева И.И., Мельник (Уварова) И.А. О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2, С. 312–324.

11. Матвеева И.И., Мельник (Уварова) И.А. Предельные свойства решений одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Международная конференция "Моделирование, управление и устойчивость", посвященная 110-летию Н.Г. Четаева и 80-летию В.М. Матросова. Тезисы докладов. Симферополь: ДИАЙПИ, 2012. С. 57.

Уварова Ирина Алексеевна

Системы обыкновенных дифференциальных
уравнений высокой размерности и
уравнения с запаздывающим аргументом

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать	. .12.	Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 1.3.	Уч.-изд. л. 1.3.	Тираж 100 экз.
Заказ № .		

Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул Пирогова, 2