

В. В. Прокошев, В. А. Скляренко, П. Ю. Шамин

Владимирский государственный университет
ул. Горького, 87, Владимир, 600000, Россия

E-mail: trace83@mail.ru

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ПЕРКОЛЯЦИОННОГО ТИПА ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОЦЕССА ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛА В БОЛЬШИХ АНСАМБЛЯХ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ *

Рассмотрены вопросы применения теории перколяции для моделирования динамических информационных сетей. Подтверждается существование порога перколяции и качественного изменения надежности доставки пакетов данных при его превышении.

Ключевые слова: динамические сети, порог перколяции, прохождение сигнала.

Введение

Перколяционные модели различных видов в настоящее время весьма широко используются в приложениях, см. например, [1]. Математическая же перколяционная теория (дискретный случай) заключается в следующем. За основу берется бесконечный граф; часто это просто регулярная решетка. Далее, выделяется случайный подграф этого графа, а именно: вершинам случайно и независимо с одинаковой вероятностью p присваивается состояние «проводящая». Подграф состоит только из проводящих вершин; смежными вершинами подграфа считаются любые соседние вершины исходного графа, находящиеся в проводящем состоянии. Основным предметом изучения теории является структура связных компонент. Наиболее интересный обнаруженный эффект – перколяционный фазовый переход по параметру p . Установлено, что в ряде случаев существует p^* (порог перколяции). А именно: при $p < p^*$ «почти наверное» все связные компоненты конечны, а при $p > p^*$ «почти наверное» существует бесконечная связная компонента, которая называется «перколяционным кластером». В случае его существования говорят, что происходит протекание на бесконечность – перколяция. В ситуации квадратной решетки, например, $p^* = 0,5$ см [2].

В данной работе исследуется взаимодействие (передача «сигнала») внутри ансамбля движущихся объектов. В этом случае естественно использовать именно дискретный вариант перколяционной модели. Более того, учитывая специфику подобных задач, удобнее рассматривать граф, где в двух состояниях могут находиться не вершины, а ребра, модель связей. При этом в подграф входят все вершины, а смежными считаются только те, которые соединены ребром, находящимся в проводящем (сигнал проходит) состоянии. Естественно, при

* Данная работа выполнена в рамках НИР по госзаданию «Наука» (регистрационный № 8.3534.2011 от 23.11.2011).

моделировании рассматриваются достаточно большие, но все же конечные графы. В этом случае порог перколяции – это значение вероятности p^* , при котором в графе образуется «перколяционный кластер» – связная область, обеспечивающая протекание, прохождение сигнала от одной границы до другой. Характерной особенностью всех упомянутых выше моделей является свойство независимости розыгрыша состояния (узла или связи). Это условие, как показано ниже, нарушается в исследуемой нами модели. Сначала в статье обосновывается существование таких зависимостей и их влияние на значение порога перколяции, а затем рассматривается влияние одного из параметров передачи сигнала (времени жизни) на передачу сигнала в изучаемых моделях и предлагается возможный подход к сведению модели динамической системы к ранее рассмотренным моделям с независимым розыгрышем состояния.

Определение порога перколяции в среде движущихся объектов

Теоретический анализ. Учитывая роль, которую играют циклические периодические и почти периодические процессы, мы рассматриваем задачу о прохождении сигнала в среде, состоящей из объектов, движущихся циклически (по окружности). Данная часть посвящена определению порогового значения вероятности p^* , наличия связи между двумя соседними объектами, при котором вероятность прохождения сигнала через среду меняется скачком. Разумеется, постановка задачи допускает разного рода обобщения.

Опишем рассматриваемую модель. Полагаем, что в узлах плоской квадратной решетки размера $m \cdot n$ с шагом d расположены центры окружностей радиуса r ($d > 2r$), по которым равномерно, с несоизмеримыми скоростями вращаются объекты. Сигнал подается на все объекты $(1, j)$, $1 \leq j \leq m$, и считается прошедшим через систему, если он будет передан хотя бы на один из объектов (n, j) , $1 \leq j \leq m$. Сигнал может быть передан мгновенно и без задержки от объекта (i, j) только своим соседям $(i, j+1)$, $(i-1, j)$, $(i+1, j)$ при выполнении условия: расстояние между объектами, для которых осуществляется связь не больше, чем k , ($d - 2r < k < d + 2r$). В отличие от классического случая перколяции (см. обзорную статью [1]) возможность передачи сигнала между соседними объектами зависит от момента времени.

Конфигурационным пространством системы является тор размерности $m \cdot n$, эволюция системы описывается траекторией на торе $\varphi(t) = \varphi(0) + \omega t$, где $\varphi(0)$ – вектор начальных фаз объектов, а ω – вектор частот вращения объектов по окружностям. Поскольку частоты вращения несоизмеримы, то, по следствию из теоремы об усреднении [3. С. 248], справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \tau(T) = \frac{1}{(2\pi)^{mn}} |D|, \quad (1)$$

где D – жорданова область на торе, $|D|$ – ее мера, $\tau(T)$ – время, в течение которого за промежуток $[0, T]$ траектория $\varphi(t)$ находится в D . Другими словами, вероятность нахождения системы в том или ином состоянии пропорциональна мере области в конфигурационном пространстве, соответствующей этому в состоянию.

Пользуясь равенством (1), найдем вероятность p , с которой сигнал может быть передан между двумя соседними объектами.

Пусть область D на двумерном торе задана условием (рис. 1)

$$|AB|^2 = r^2(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (d - r \cos \alpha - r \cos \beta)^2 \leq k^2$$

или

$$4r^2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 4rd \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq k^2 - d^2.$$

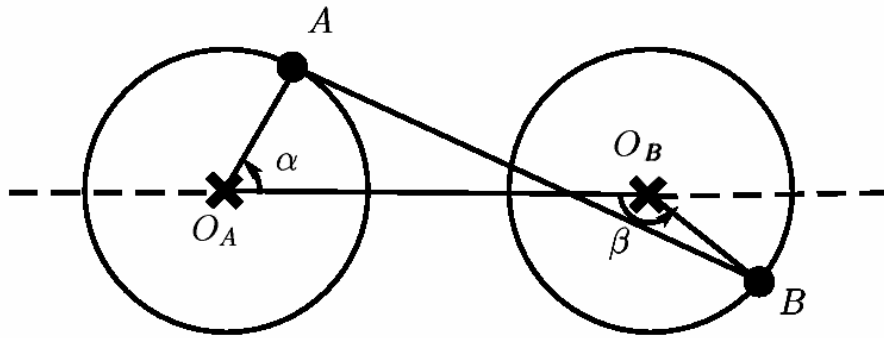


Рис. 1. Параметры области D

Ограничимся случаем $d = 3, r = 1, k = 3$. На развертке двумерного тора $(-\pi, \pi]^2$ область D имеет вид, показанный на рис. 2.

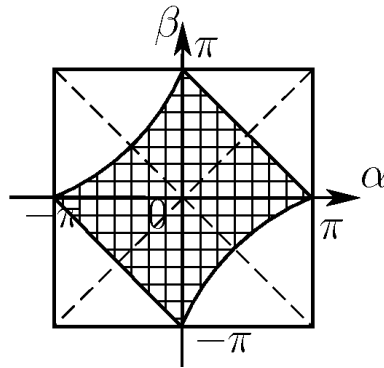


Рис. 2. Область D на развертке двумерного тора

Из неравенства, описывающего D, следует, что область симметрична относительно прямых $\alpha - \beta = 0$ и $\alpha + \beta = 0$. Таким образом, вероятность наличия связи может быть найдена как

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_D d\alpha d\beta = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\substack{\beta \geq \alpha, \quad \beta \geq -\alpha, \quad |\alpha| \leq \pi, \quad |\beta| \leq \pi, \\ 4r^2 \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + 4rd \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \leq k^2 - d^2}} d\alpha d\beta = \\
 &= \left| \frac{D(\alpha, \beta)}{D(x, y)} = \frac{-2}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \right| = \frac{2}{\pi^2} \iint_{\substack{y \geq -x, \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1, \\ 4r^2 x^2 - 4rdxy \leq k^2 - d^2}} \frac{dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Так, при $d = 3, r = 1, k = 3$ формула (2) дает $p = 0,4316$.

Поскольку далее вероятности оценивались через относительные частоты, полученные в численном эксперименте, а реализовать на практике несоизмеримость частот ω_A и ω_B невозможно, был проведен численный эксперимент: при $d = 3, r = 1, k = 3$, сдвиге фазы $\varphi(0) = 1$, величине шага 0,01, числе шагов 10 000, частотах вращения $\omega_A = 11, \omega_B = 13$ доля тех точек, для которых $|AB| \leq k$ составила 0,4318. При других исходных данных результаты также были достаточно близки.

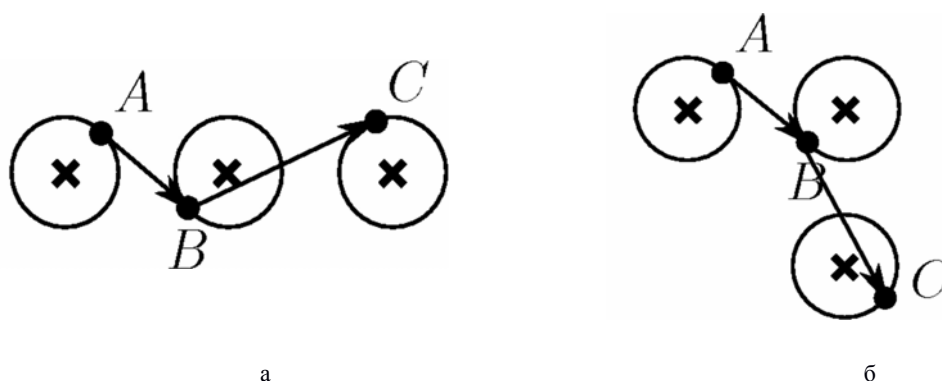


Рис. 3. Конфигурации подвижных узлов

Заметим, что события, состоящие в передаче сигнала от A к B и от B к C (рис. 3) не являются независимыми. Как вычисления, основанные на теореме об усреднении, так и численный эксперимент при $d = 3$, $r = 1$, $k = 3$ показывают, что вероятность перехода сигнала от A к C в конфигурации рис. 3, а равна 0,1098, при том что произведение вероятностей передачи сигнала от A к B и от B к C , напомним, равно $0,4316^2 = 0,1863$. Для конфигурации рис. 3, б результаты ближе – 0,1866.

Численный эксперимент. Моделируется процесс прохождения сигнала через систему («запуск»), при этом делаются некоторые предположения. Каждый объект системы интерпретируется как узел, движущийся по определенному закону и принимающий / отправляющий сигнал. Считается, что сигнал распространяется по системе мгновенно и узлы не меняют свое положение за время запуска. Также считается, что связь между двумя узлами может быть использована только один раз. Целью моделирования является определение критического значения вероятности p^* , при которой вероятность прохождения сигнала через систему скачком меняется с нуля на единицу.

Эксперимент проводился на разработанном нами сетевом симуляторе (ПСС), установленном на высокопроизводительной кластерной системе [5; 6]. Для решения задачи были реализованы следующие модули расширения.

1. Модуль начальной инициализации координат узлов. Случайным образом располагает каждый узел системы на соответствующей ему окружности. Входные параметры: d – шаг решетки, r – радиус окружностей, N – количество узлов в одном слое.

2. Модуль генерации топологии сети. Для каждого узла проверяет условие возможности связи с соседними узлами ($|AB| < k$). Если условие выполнено, то соседний узел добавляется к списку узлов, связь с которыми возможна. Входным параметром является k – максимальное расстояние, связь на котором возможна.

3. Основной модуль. Реализует пересылку пакетов в соответствии с поставленной задачей. Также проверяет условия окончания моделирования:

- а) пакет доставлен на последний слой (считаем проход успешным);
- б) невозможно передать ни один пакет.

Принципиальная схема эксперимента такова. При неизменном значении набора входных параметров производится нескольких запусков, при этом в каждом повторном запуске случайным образом меняется положение узлов на окружностях (это моделирует их движение). Оценивается вероятность прохождения сигнала через систему; вычисляется отношение числа успешных проходов к общему количеству запусков. Меняются значения параметров, выясняется, когда происходит качественная перестройка процесса прохождения сигнала.

Машинный эксперимент был проведен для квадратной решетки размеров $N \times N$ ($N = 100, 300, 500$). Входные параметры (см. выше), используемые в эксперименте: d, r постоянны ($d = 3, r = 1$); k изменяется в некотором диапазоне. Результаты машинного эксперимента отражены на графике (рис. 4). Отметим также, что под осью k дополнительно указаны значения p (вероятности передачи сигнала между парой соседних узлов). Они определяются параметром

рами моделирования и вычисляются по формуле (2). Указаны только те вероятности, которые соответствуют некоторым характерным значениям k .

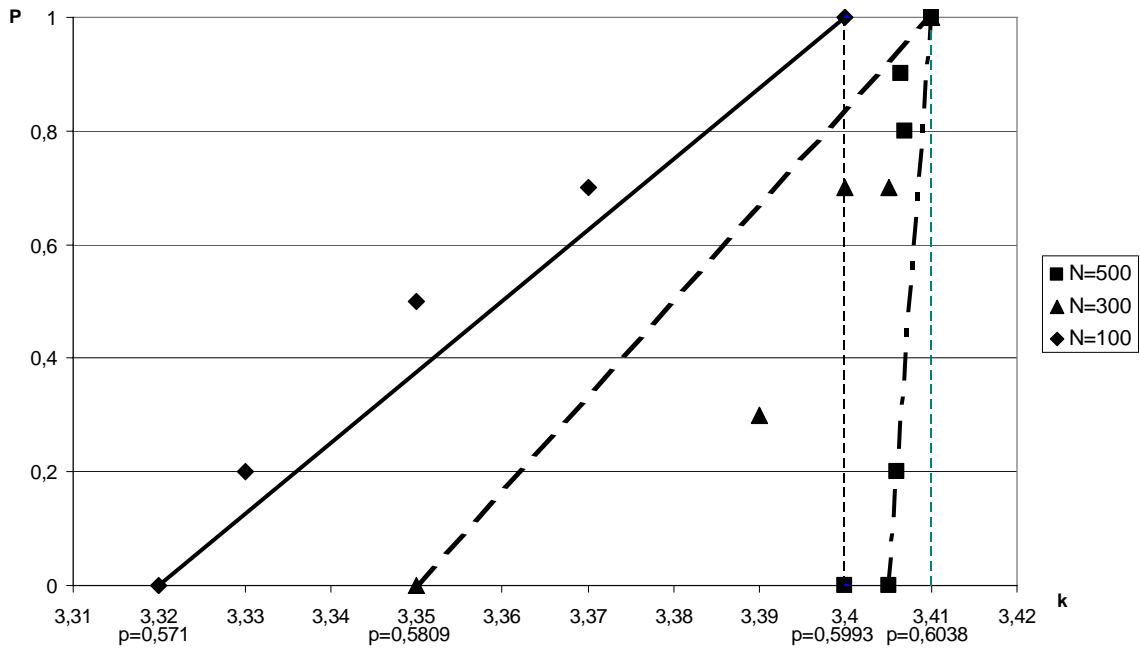


Рис. 4. Результаты машинного эксперимента по исследованию зависимости вероятности прохождения сигнала через систему от максимальной дальности установления связи между парой узлов

В результате эксперимента было установлено существование порога перколяции $p^* \approx 0,6$. Полученное значение отличается на 20 % от значения 0,5, которое является порогом перколяции для случая перколяции на квадратной решетке. Причина подобного эффекта заключается в том, что события, состоящие в прохождении сигнала от A к B и от B к C , не являются независимыми, что и приводит к заметному изменению порогового значения.

Из этого можно сделать вывод, что существующие перколяционные модели, по крайней мере примененные без существенной коррекции, искажали бы картину прохождения сигнала внутри динамической системы, моделирующей движение объектов.

Влияние времени жизни пакета на передачу сигнала в цепочке движущихся объектов

Описание модели. Предметом изучения в данном случае является распространение сигнала в неорганизованной среде, состоящей из движущихся объектов. Исследуются свойства прохождения сигнала в простейшей ситуации, а именно: ансамбль – линейный, объекты – движутся циклически.

Более конкретно рассматривается следующая модель. Дана последовательность N окружностей, центры которых расположены на одной прямой. Все окружности имеют одинаковый радиус r , а их центры A_1, \dots, A_N расположены по прямой так, что расстояние между A_i и A_{i+1} , где $i = 1, \dots, N - 1$, задается общим параметром d (рис. 5).

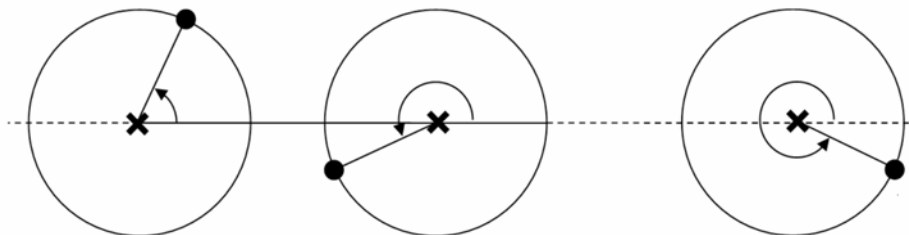


Рис. 5. Линейный ансамбль циклически движущихся объектов

По окружностям с постоянными несоизмеримыми угловыми скоростями вращаются объекты. На первый из объектов подается сигнал. Каждый из объектов может передать сигнал следующему объекту только при условии, что расстояние между ними в данный момент времени не превосходит некоторой критической величины k , постоянной для цепи.

В случае, когда передача сигнала по цепи происходит мгновенно, события, состоящие в передаче сигнала между двумя соседними объектами, не являются независимыми. Напомним, что при условии $d = 3$, $r = 1$, $k = 3$ вероятность передачи сигнала между двумя соседними объектами равна 0,4316, а вероятность передачи сигнала от первого объекта к третьему через второй равна $0,1098 \neq 0,4316^2$.

Мы предположили что:

- если сигнал передается на следующий объект не мгновенно, а в течение некоторого времени ожидания T , то при увеличении T зависимость от номера объекта i условной вероятности перехода сигнала от i -го к $(i + 1)$ -му будет уменьшаться. Тогда при рассмотрении распространения сигнала с задержкой в среде движущихся объектов на плоскости можно было бы воспользоваться уже изученной пуассоновской моделью сфер случайного радиуса [7] или [8]. Данную зависимость можно оценить через отношение вероятности передачи сигнала до $(i + 1)$ -го объекта к вероятности передачи сигнала до i -го.

- последовательности отношений образуют выборки случайных величин, распределенных по нормальному закону.

Для того чтобы подтвердить или опровергнуть сделанные предположения, была проведена серия численных экспериментов при различных значениях T и условиях: $d = 3$, $r = 1$, $k = 3$. В ходе экспериментов угловые частоты вращения объектов и их начальные фазы выбирались случайным образом из промежутков $[1, 10]$ и $[0, 2\pi]$ соответственно.

В ходе экспериментов считалось, что процесс передачи обрывается в двух случаях:

- 1) время ожидания в промежуточном узле превышает T ;
- 2) сигнал достигает конечного узла.

Для каждой серии были получены последовательности n_i – количество испытаний из общего числа испытаний M , в которых сигнал побывал на i -м объекте, где $i = 1, 2, \dots, N$ – последовательности относительных частот $p_i = \frac{n_i}{M}$ и отношений $\tilde{p}_i = \frac{p_i}{p_{i-1}}$.

В ходе численного эксперимента проверялось два различных подхода к модели. В первом случае предполагалось, что T является временем жизни сигнала на узле, т. е. на любом из узлов сигнал может ожидать передачи в течение T . Во втором случае T рассматривалось как максимальное время ожидания на всей цепочке.

Численный эксперимент

Описанная модель была реализована на языке C++ с использованием директив OpenMP для ускорения обсчета на многопроцессорных системах с общей памятью.

Входными данными для модели являлись вышеописанные параметры r , d , k , N , M , а также временной шаг моделирования. Для получения всей необходимой статистики за один запуск программы была предусмотрена возможность вводить начальное значение T , величину шага, с которым изменяется данный параметр, и количество шагов.

Машинный эксперимент проводился для различных значений T . Во всех случаях считалось, что $dt = 0,01$, $M = 10\,000$, $N = 1\,000$. Представим наиболее характерные результаты.

1. Случай фиксированного времени жизни сигнала на узле.

На рис. 6, а представлен график относительных частот для $T = 0,8$ и $T = 1$. Для того чтобы оценить убывание вероятностей в зависимости от номера узла, рассмотрим отношение относительной частоты успешных проходов узла i к относительной частоте успешных проходов узла $i - 1$. Результаты для $T = 1$ приведены на рис. 6, б.

Из рис. 6, б видно, что наблюдается стабилизация \tilde{p}_i . При $T = 1$ для последовательности \tilde{p}_i математическое ожидание $m = 0,972$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma = 0,0116$.

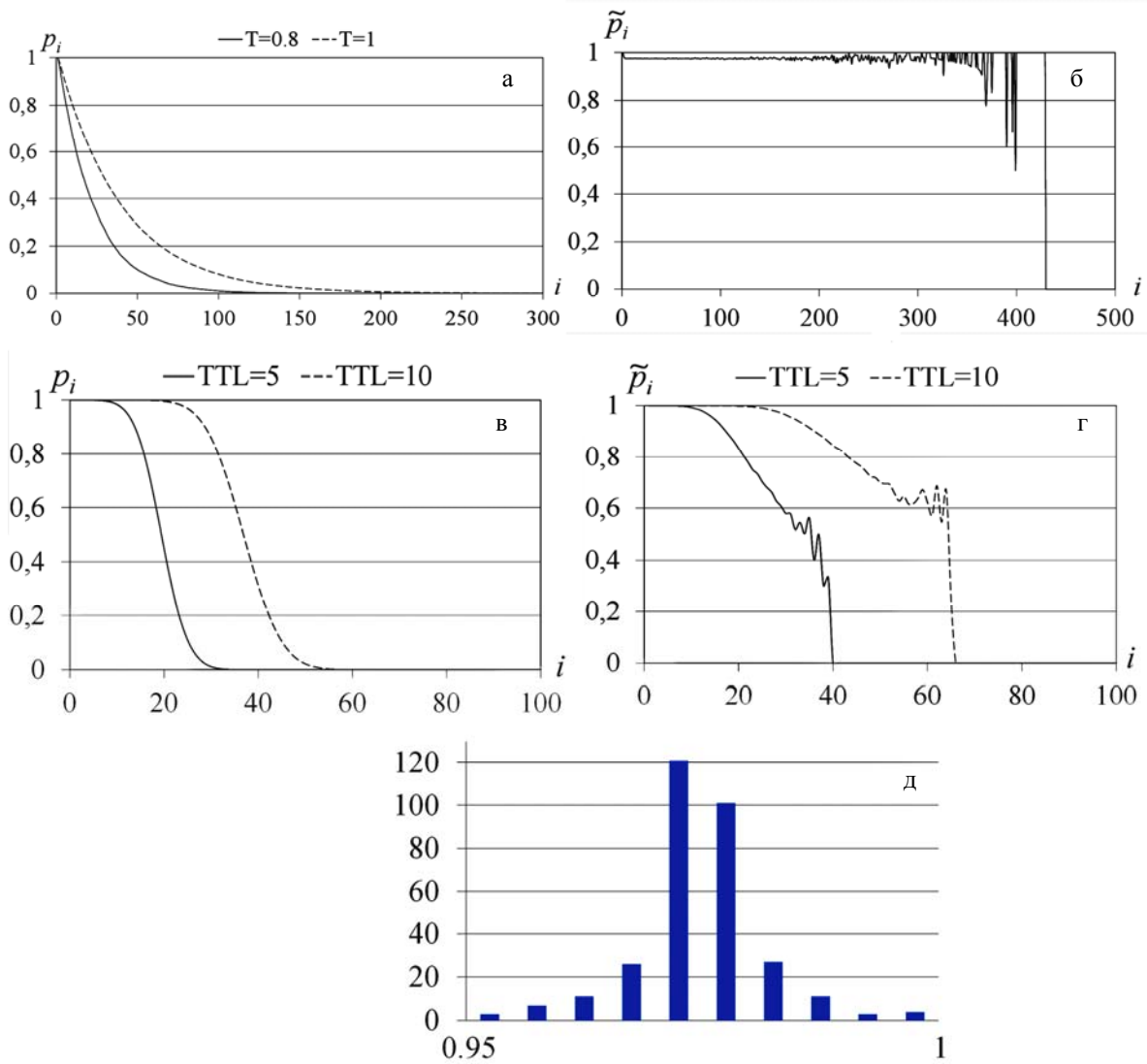


Рис 6. Результаты численных экспериментов:

- a* – относительная частота успешных проходов при $t = 1$;
- б* – отношения \tilde{p}_i относительной частоты успешных проходов узла i к относительной частоте успешных проходов узла $i - 1$ при $t = 1$;
- в* – относительная частота успешных проходов при $t = 5$ и $t = 10$ для случая фиксированного времени жизни на цепочке;
- г* – отношения \tilde{p}_i относительной частоты успешных проходов узла i к относительной частоте успешных проходов узла $i - 1$ при $t = 5$ и $t = 10$ для случая фиксированного времени жизни на цепочке;
- д* – гистограмма \tilde{p}_i при $t = 1$

На рис. 6, *д* приведена гистограмма для последовательности \tilde{p}_i при $T = 1$. Для проверки гипотезы о нормальном распределении выборки случайных величин, образованной последовательностью \tilde{p}_i , воспользуемся критерием χ^2 .

Введем статистику:

$$\chi^2 = N \sum \frac{(P_i^{theor} - P_i^{emp})^2}{P_i^{theor}}$$

Введем следующее разбиение:

$$(0,9; 0,93; 0,95; 0,96; 0,97; 0,98; 0,99; 1).$$

Численно вычисляя интегралы, получим:

$$P_1^{theor} = \frac{1}{0,0116\sqrt{2\pi}} \int_{0,9}^{0,93} e^{\left(\frac{(t-0,972)^2}{2(0,0116)^2}\right)} dt = 0,000118,$$

$$P_2^{theor} = \frac{1}{0,0116\sqrt{2\pi}} \int_{0,93}^{0,95} e^{\left(\frac{(t-0,972)^2}{2(0,0116)^2}\right)} dt = 0,025736,$$

$$P_3^{theor} = \frac{1}{0,0116\sqrt{2\pi}} \int_{0,95}^{0,96} e^{\left(\frac{(t-0,972)^2}{2(0,0116)^2}\right)} dt = 0,114171,$$

$$P_4^{theor} = \frac{1}{0,0116\sqrt{2\pi}} \int_{0,96}^{0,97} e^{\left(\frac{(t-0,972)^2}{2(0,0116)^2}\right)} dt = 0,274913,$$

$$P_5^{theor} = \frac{1}{0,0116\sqrt{2\pi}} \int_{0,97}^{0,98} e^{\left(\frac{(t-0,972)^2}{2(0,0116)^2}\right)} dt = 0,327372,$$

$$P_6^{theor} = \frac{1}{0,0116\sqrt{2\pi}} \int_{0,98}^{0,99} e^{\left(\frac{(t-0,972)^2}{2(0,0116)^2}\right)} dt = 0,192908,$$

$$P_7^{theor} = \frac{1}{0,0116\sqrt{2\pi}} \int_{0,99}^1 e^{\left(\frac{(t-0,972)^2}{2(0,0116)^2}\right)} dt = 0,056152.$$

Получим $\chi_{i,0}^2 = 804,76$.

При $\alpha = 0,95$ табличное значение квантиля 9,49, т. е. при $T = 1$ гипотеза о нормальном распределении выборки случайных величин, образованной последовательностью \tilde{p}_i , отвергается.

2. Случай фиксированного времени жизни сигнала на цепочке.

На рис. 6, в, г представлены результаты эксперимента для $T = 5$ и $T = 10$. Из полученных значений \tilde{p}_i видно, что введение дополнительного параметра времени ожидания на цепочке не дает уменьшения зависимости от номера объекта i условной вероятности перехода сигнала от i -го к $(i + 1)$ -му при увеличении T .

Из данных, полученных в результате эксперимента, можно сделать вывод, что при введении параметра времени ожидания на узле намечается стабилизация последовательности \tilde{p}_i .

Выводы

1. Результаты численного эксперимента на модели динамической перколяционной системы дают основание предполагать существование порога перколяции (для рассмотренной модели он близок к 0,6 и отличается на 20 % от соответствующего значения для статической системы).

2. Была разработана модель и поставлен численный эксперимент для исследования влияния параметра времени ожидания на вероятность передачи сигнала через систему движущихся объектов.

3. Результаты численного эксперимента по исследованию влияния параметра времени ожидания на вероятность передачи сигнала через систему движущихся объектов позволяют, с некоторой долей осторожности, сделать вывод, что введение параметра времени ожидания на узле позволяет свести модель распространения сигнала в среде к ранее рассмотренным статическим перколяционным моделям.

Список литературы

1. *Меньшиков М. В., Молчанов С. А., Сидоренко А. Ф.* Теория перколяции и некоторые приложения // Итоги науки и техники. М., 1986. Т. 24. С. 53–110. Серия: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика.
2. *Kesten H.* The Critical Probability of Bond Percolation on the Square Lattice Equal 1/2 // Commun. Math Phys. 1980. Vol. 74. № 1. С. 41–54.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
4. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
5. *Шамин П. Ю., Алексанян А. С., Прокошев В. В.* Параллельный сетевой симулятор: концепция и перспективы развития // Науч.-техн. ведомости Санкт-Петерб. гос. политех. ун-та. СПб., 2009. № 3. С. 18–24.
6. *Шамин П. Ю., Прокошев В. В.* Модернизация параллельного сетевого симулятора ПСС // Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах: Материалы XII Всерос. конф. (Н. Новгород, 26–28 ноября 2012 г.) / Под ред. В. П. Гергеля. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2012. С. 440–444.
7. *Брагинский Р. П., Гнеденко Б. В., Молчанов С. А., Пешков И. Б., Рыбников К. А.* Математические модели старения полимерных изоляционных материалов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 268, № 2. С. 281–284.
8. *Минлос Р. А., Храпов П. В.* О протекании в конечной полосе для непрерывных систем // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. мат., мех. 1985. Т. 1, № 1. С. 56–59.

Материал поступил в редколлегию 11.03.2013

V. V. Prokoshev, V. A. Sklyarenko, P. Yu. Shamin

**A SURVEY OF DATA PACKET DIFFUSION IN LARGE NETWORKS
WITH MOVABLE PEERS WITH USAGE OF PERCOLATION MODELS**

In this clause some questions about percolation theory application in dynamical information networks are considered. A presence of percolation threshold and qualitative change of data delivery probability after exceeding of this threshold are confirmed.

Keywords: dynamical networks, percolation threshold, data packet diffusion.