Переводной экзамен по дисциплине Высшая математика (направления подготовки 38.03.01 Менеджмент и 39.03.01 Социология) проводится в письменной форме и предполагает проверку владения теоретическим материалом (см. экзаменационные вопросы 1-го и 2-го семестров), знание алгоритмов решения типовых задач и умение применять эти алгоритмы.

Во время экзамена разрешается пользоваться бумажной литературой (учебники, конспекты). Пользование любыми электронными средствами доступа к текстовой информации запрещается. Формулировки экзаменационных задач будут аналогичны формулировкам задач из контрольных заданий (см. контрольные работы №№ 1, 2, 3) и из типовых заданий 1-го и 2-го семестров.

На экзамене будет предложено 7 задач. Требуется решить любые 5 из них. За правильное решение каждой задачи начисляется 10 баллов; максимальное количество баллов, полученное на экзамене – 50 баллов. Продолжительность экзамена 1 ч. 30 мин

Экзаменационные вопросы I семестра.

Введение в анализ.

1. Множества. Операции над множествами.
2. Формула бинома Ньютона. Доказательство неравенства Бернулли.
3. Лействительные числа и их основные свойства.
4. Точные верхняя и нижняя грани числового множества. Теорема о существовании точной верхней и точной нижней граней для ограниченного множества.
5. Понятие числовой функции. Композиция функций. Обратная функция. Элементарные функции и их графики.

Предел последовательности.

6. Числовые последовательности. Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности.
7. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
8. Теорема о зажимающих последовательностях.
9. Теорема о предельном переходе в неравенстве.
10. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Леммы о бесконечно малых последовательностях.
11. Арифметика пределов последовательностей.
12. Подпоследовательности. Частичные пределы последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности.
13. Теорема Больцано-Вейерштрасса о выборе сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности.
14. Теорема о сходимости монотонной ограниченной последовательности. Определение числа e.
15. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Предел функции. Непрерывность.

16. Два определения предела функции в точке. Теорема об эквивалентности определений пределов по Коши и по Гейне.
17. Арифметика пределов функций.
18. Односторонние пределы. Пределы функций при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.
19. 1-й замечательный предел $\lim\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$. Примеры.
20. 2-й замечательный предел. Примеры.
21. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.
22. Простейшие свойства непрерывных функций. Непрерывность многочленов, дробно-рациональных функций, тригонометрических функций.
23. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции.
24. Теоремы об ограниченности непрерывной на отрезке функции, о достижении непрерывной на отрезке функцией наименьшего и наибольшего значений (1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса).

Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

25. Определение производной функции. Геометрический и физический смысл производной.
26. Таблица производных основных элементарных функций. Вывод формул для производных функций $y=x^n$, $n\in\mathbf{N}$, $y=\ln x$, $y=e^x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$.
27. Арифметика производных: производные суммы, произведения, частного. Вычисление производных функций $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$.
28. Производная сложной функции (цепное правило). Доказательство формулы для дифференцирования сложной функции. Примеры.

29. Теорема о производной обратной функции. Вычисление производных обратных тригонометрических функций.
30. Определение дифференциала функции и его основные свойства.
31. Связь между дифференцируемостью и существованием производной.
32. Непрерывность дифференцируемой функции. Пример функции, непрерывной в точке, но не дифференцируемой в ней.
33. Производные и дифференциалы высших порядков.
34. Теоремы Ролля и Лагранжа.
35. Теорема Коши. Правило Лопиталя. Примеры вычислений пределов с помощью правила Лопиталя.
36. Теорема о достаточном условии строгой монотонности дифференцируемой функции.
37. Определение экстремума функции. Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке.
38. Необходимые условия существования экстремума. Теорема Ферма.
39. 1-е достаточное условие существования экстремума.
40. 2-е достаточное условие существования экстремума.
41. Выпуклость функции вверх и вниз. Достаточное условие выпуклости.
42. Точки перегиба. Теорема о необходимом условии существования точки перегиба. Достаточное условие точки перегиба.
43. Асимптоты функции. Способы нахождения асимптот функции. Примеры.
44. Общая схема исследования функции и построения её графика. Примеры.
45. Формула Тейлора. Разложение по степеням x функций $y=e^x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=(1+x)^\alpha$, $y=\ln(1+x)$. Примеры вычислений пределов с помощью формулы Тейлора.

Неопределённый интеграл.

46. Первообразная. Неопределённый интеграл и его свойства.
47. Таблица основных неопределённых интегралов.
48. Формула замены переменной в неопределённом интеграле. Примеры.
49. Формула интегрирования по частям в неопределённом интеграле. Примеры использования формулы интегрирования по частям.
50. Основные методы интегрирования тригонометрических функций. Примеры.
51. Интегрирование дробно-рациональных функций с помощью разложения на простые дроби. Примеры.
52. Интегрирование функций, содержащих квадратный трёхчлен ax^2+bx+c. Примеры.

Экзаменационные вопросы II семестра.

Определённый интеграл.

1. Площадь криволинейной трапеции для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Свойство функции площади $S(x), a \le x \le b$, быть первообразной для непрерывной функции $y=f(x)$.
2. Определённый интеграл как предел интегральных сумм (интеграл Римана). Простейшие свойства интеграла Римана.
3. Интеграл Римана с переменным верхним пределом и его свойства. Формула Ньютона–Лейбница для интеграла от непрерывной функции.
4. Теорема о среднем для определённого интеграла.
5. Формула замены переменной в определённом интеграле. Примеры.
6. Интегрирование по частям в определённом интеграле. Примеры.
7. Понятие несобственного интеграла 1-го и 2-го рода. Примеры вычисления несобственных интегралов.
8. Задачи на доказательство сходимости и расходимости несобственных интегралов.
9. Вычисление площадей плоских фигур. Примеры.
10. Вычисление длины дуги кривой. Примеры.
11. Объём простых тел с известным поперечным сечением (формула Кавальери). Объёмы тел вращения. Примеры.

Алгебра.

12. Определение линейного (векторного) пространства. Примеры векторных пространств.
13. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений. Исследование систем ступенчатого вида (совместность, определённость и неопределённость).
14. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Леммы о линейной зависимости и независимости.
15. База системы векторов, ранг системы векторов. Задача нахождения всех баз системы векторов.
16. Базис линейного пространства. Размерность линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов. Задача нахождения базиса линейной оболочки системы векторов.
17. Подпространство векторного пространства. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерности суммы подпространств Прямая сумма подпространств.
18. Скалярное произведение в вещественном векторном пространстве. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника.
19. Скалярное произведение. Угол между векторами. Ортогональные и ортонормированные системы вкторов. Линейная независимость ортогональной системы векторов.
20. Процесс ортогонализации системы вкторов.

21. Однородные системы линейных уравнений. Размерность подпространства решений (обоснование). Фундаментальная система решений. Общее решение.

22. Связь общих решений однородной и неоднородной систем линейных уравнений.

23. Определитель n-го порядка. Простейшие свойства определителей. Разложение определителя по строке или столбцу.

24. Матрицы. Сложение и умножение матриц.

25. Формула Крамера для вычисления обратной матрицы.

26. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

27. Формула Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

28. Предел функции нескольких переменных. Арифметика пределов. Примеры вычисления двойных пределов.

29. Непрерывность функции нескольких переменных. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.

30. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Непрерывность дифференцируемой функции.

31. Дифференцируемость функции, обладающей непрерывными частными производными.

32. Производные от сложных функций нескольких переменных.

33. Дифференциал функции нескольких переменных. Инвариантность формы первого дифференциала.

34. Касательная плоскость для графика дифференцируемой функции двух переменных.

35. Производные и дифференциалы высших порядков для функций нескольких переменных. Теорема о равенстве смешанных производных.

36. Определение производной по направлению. Формула для вычисления производной по направлению.

37. Градиент функции. Основное свойство градиента.

38. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

39. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Теорема Ферма.

40. Достаточные условия экстремума функции двух переменных.

1. Типовые задания I семестра

Замечание : Задания 1, 2, 3 носят вспомогательный характер и являются полезными для выполнения заданий 19 и 20.

Задание 1. Выделить полный квадрат для квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Построить график.

Метод решения. Использование формулы $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$.

Варианты заданий.

1.1. $f(x) = x^2 - 4x + 5$; 1.2. $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$;

1.3. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$; 1.4. $f(x) = x^2 + x - 2$.

Задание 2. Выделить целую часть дробно-рациональной функции $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n \geq m$.

Метод решения. Деление полиномов в столбик.

Варианты заданий.

2.1. $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 5x + 7}{x + 2}$; 2.2. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 6x - 4}{2x + 1}$;

2.3. $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + x + 5}{x^2 + 3}$; 2.4. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 10}{x^2 - 9}$;

2.5. $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 68}{x - 4}$.

Задание 3. Разложить функцию на простые дроби.

Метод решения. Определить вид простых дробей и использовать метод неопределенных коэффициентов.

Варианты заданий.

3.1. $f(x) = \dfrac{5x - 3}{(x - 2)(x + 3)}$; 3.2. $f(x) = \dfrac{2x}{(x + 1)^2}$;

3.3. $f(x) = \dfrac{3x + 2}{(2x + 1)(x + 3)}$; 3.4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 5}{(x - 1)^2(x + 3)}$;

3.5. $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2 + x - 2}$; 3.6. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5}{(x^2 + 3)(x - 1)}$;

3.7. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{(x - 4)(x - 1)}$; 3.8. $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - x - 3}{x^2 - 5x + 4}$.

Задание 4. Найти предел отношения двух функций (двух многочленов) при $x \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Метод решения. Вынести «главную степень» (основную величину) за скобки и устранить неопределенность.

Варианты заданий.

4.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-5}{n+3}$; 4.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n-3}{n+2n^2}$; 4.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+3}}$; 4.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n\cdot\cos(n^2+1)}{n^2+1}$;

4.5 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x+3}{5x+7}$; 4.6 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-3x^2}$; 4.7 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x-3}{\sqrt{x^2+4}}$; 4.8 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

4.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$; 4.10 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+n}{(n+2)^2}$.

Задание 5. Найти предел отношения двух многочленов, стремящихся к нулю при $x\to x_0$ (x_0 – корень).

Метод решения. Выделить у многочленов корневой множитель $(x-x_0)$ и устранить неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Варианты заданий.

5.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2+4x+4}$; 5.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+3x-2}{x^2+4x-5}$; 5..3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+x^2+4}$.

Задание 6. Найти пределы, содержащие иррациональность.

Метод решения. Умножить соответствующее выражение на сопряженное. В примере 6.7. использовать тождество: $(a^{1/3}-b^{1/3})(a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3})=a-b$, которое является следствием из формулы $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Варианты заданий.

6.1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+6}-4}{x-5}$; 6.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{4x+1}}{1-\sqrt{x-1}}$; 6.3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$; 6.4. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$;

6.5. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-x)$; 6.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 6.7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{2x}-2}$.

Задание 7. Найти пределы, содержащие тригонометрические функ-ции.

Метод решения. Использовать первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ или его общий вид $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(a(x))}{a(x)}=1$, где $a(x)\to 0$ при $x\to x_0$.

Варианты заданий.

7.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$; 7.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$; 7.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; 7.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$;

7.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$; 7.6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\pi x}{x+2}$; 7.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{\sin 2x}$; 7.8. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

Задание 8. Вычислить предел последовательности или предел функции, используя второй замечательный предел.

Метод решения. Применить одну из следующих формул: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

$\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$.

Варианты заданий.

8.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$; 8.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{3n+2}$; 8.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{x+1}$; 8.4 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{1/x}$;

8.5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg\sqrt{x}\right)^{2/\sqrt{x}}$; 8.6. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(2+x)-\ln x)$; 8.7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{a^x-a}{x-1}$.

Задание 9. Найти односторонние пределы функций.

Метод решения. При $x\to a\pm 0$ рассмотреть два случая:

(1) $x=a+\varepsilon,\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0$ (2) $x=a-\varepsilon,\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0$.

Варианты заданий.

9.1. $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\frac{|x-3|}{x-3}$; 9.2. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\frac{2x+1}{x-2}$; 9.3. $\lim\limits_{x\to\pm 0}(2+x)^{1/x}$;

9.4. $\lim\limits_{x\to -2\pm 0}7^{1/(2+x)}$; 9.5. $\lim\limits_{x\to 2\pi\pm 0}\frac{x-2\pi}{\cos x-1}$;

9.6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}\pm 0}\frac{|tg(4x-\pi|}{2x-\frac{\pi}{2}}$; 9.7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

Задание 10. Для данной функции $y=f(x)$ записать приращение $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ и найти $y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Варианты заданий.

10.1. $f(x)=ax+b$; 10.2. $f(x)=\sqrt{x}$; 10.3. $f(x)=2^x$;

10.4. $f(x)=\ln x$; 10.5. $f(x)=\cos x$; 10.6. $f(x)=tgx$.

Задание 11. Освоить табличное дифференцирование и дифференцирование сложной функции по номерам задачника.

А. В. Ефимов, Б. П. Демидович. Сборник задач по математике, часть 1, №№ 5.21–5.76.

Задание 12. Найти производную функции $y=f(x)$, используя формулу логарифмического дифференцирования: $(\ln y)'=\frac{y'}{y}$, т. е. $y'=y\cdot(\ln y)'$.

Варианты заданий.

12.1. $y=x(x+2)^3\cdot(3x+1)^3$; 12.2 $y=\frac{(x+2)^2}{(x-1)(x+3)}$; 12.3 $y=\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$; 12.4. $y=\sqrt[3]{\frac{2x^2}{x^3+5}}$;

12.5. $y=x^{2x}$; 12.6. $y=x^{\cos x}$; 12.7. $y=(arctgx)^x$.

Задание 13. Найти уравнение касательной для функции $y=f(x)$ в указанной точке $x=x_0$. Сделать чертеж.

Варианты заданий.

13.1. $y=\sqrt{2x}$; $x=2$; 13.2. $y=1-x^2$; $x=-1$; 13.3. $y=\sqrt[3]{x-1}$; $x=1$; 13.4. $y=\ln x$; $x=1$;

13.5. $y=e^{1-x^2}$; $x=\pm 2$.

Задание 14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на указанном промежутке. Выполнить схематичный чертеж.

Варианты заданий.

14.1. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$; 14.2. $y = -(x-1)^2$, $x \in [0,3]$;

14.3. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$, $x \in [-1,5]$; 14.4. $y = \sqrt{x(5-x)}$, $x \in$ ОДЗ;

14.5. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Задание 15. Построить график функции $y = f(x)$, стараясь придерживаться следующей схемы исследования:

(1) область определения; (2) поведение на границах области определения (односторонние пределы, асимптоты); (3) экстремумы (max, min), точки перегиба (по необходимости); (4) числовые уточнения (пересечения с осями и прочие точки).

Варианты заданий.

15.1. $y = \dfrac{x-1}{x+2}$; 15.2. $y = (x+2)^3$; 15.3. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$;

15.4. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^3+3}}$; 15.5. $y = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$; 15.6. $y = \dfrac{1}{1-e^x}$;

15.7. $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; 15.8. $y = \sqrt[3]{1-x^2}$; 15.9. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

15.10. $y = \ln(e + \dfrac{1}{x})$; 15.11. $y = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$.

Задание 16. Найти производную $F'(x) = f(x)$ и записать соответствующий интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Варианты заданий.

16.1. $F(x) = \dfrac{\cos 5x}{5}$; 16.2. $F(x) = e^{x^2}$; 16.3. $F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2-7}\right|$;

16.4. $F(x) = \sqrt{\arcsin 3x}$; 16.5. $F(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Задание 17. Табличное интегрирование и замена переменной при интегрировании:

А. В. Ефимов, Б. П. Демидович. Сборник задач по математике, часть 1, №№ 6.15–6.123 (выборочно).

Задание 18. Найти интегралы, применяя формулу интегрирования «по частям» $\int udv = uv - \int vdu$..

Варианты заданий.

18.1. $\int arctgxdx$; 18.2. $\int x\sin 2xdx$; 18.3. $\int \dfrac{\ln x}{x^2}dx$; 18.4. $\int x \cdot arctgxdx$;

18.5. $\int (x+1)e^{2x}dx$; 18.6. $\int xe^{-3x}dx$; 18.7. $\int x^2 \ln xdx$; 18.8. $\int 3^x \cos x \cdot dx$;

18.9. $\int (x^2+x-3)e^{-2x}dx$; 18.10. $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x} \cdot dx$.

Задание 19. Вычислить интегралы, содержащие квадратный трехчлен.

Варианты заданий.

19.1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; 19.2. $\int \frac{xdx}{x^2-7x+13}$; 19.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$;

19.4. $\int \frac{(2x-8)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$; 19.5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; 19.6. $\int \sqrt{x^2+2x+5}dx$.

Задание 20. Вычислить интегралы при помощи разложения на простые дроби.

Варианты заданий.

20.1. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$; 20.2. $\int \frac{(x+1)dx}{(x+2)(x-3)}$; 20.3. $\int \frac{dx}{x(x+1)}$;

20.4. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\cdot dx$; 20.5. $\int \frac{(x+1)dx}{x\cdot(x^2+1)}$; 20.6. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x+3)}$.

Задание 21. Вычислить интегралы для некоторых тригонометрических функций.

Варианты заданий.

21.1. $\int \cos^3 xdx$; 21.2. $\int \sin^2 x\cdot\cos^3 x\cdot dx$; 21.3. $\int tg^2 x\cdot dx$;

21.4. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; 21.5. $\int \cos 2x\cdot\sin 6x\cdot dx$; 21.6. $\int \sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{2x}{3}\cdot dx$;

21.7. $\int \cos x\cdot\cos^2 3x\cdot dx$; 21.8 $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot dx$;

Задание 22. Вычислить интегралы для тригонометрических функций с помощью универсальной подстановки $t = tg\frac{x}{2}$, используя соотношения: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Варианты заданий.

22.1. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; 22.2. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; 22.3. $\int \frac{\cos xdx}{1+\cos x}$;

22.4. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$; 22.5. $\int \frac{1+tgx}{1-tgx}\cdot dx$.

Дополнение. Для следующих вариантов используется подстановка $t = tgx$, для которой выполняются соотношения:

$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Варианты заданий.

22.6. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$; 22.7. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$;

22.8. $\int \frac{\sin 2x\cdot dx}{1+\sin^2 x}$; 22.9. $\int \frac{\cos 2xdx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

2. Типовые задания II семестра

Задание 1. Вычислить простейшие определенные интегралы. Изобразить соответствующую криволинейную трапецию. Визуально оценить ее площадь и сравнить с ответом.

Метод решения. Таблица интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.

Варианты заданий.

1.1. $\int_0^1 (1+x^2)dx$; 1.2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$; 1.3. $\int_0^{\pi} \sin x dx$;

1.4. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{1+x^2}$; 1.5. $\int_{-1}^{\ln 3} e^{-x} dx$; 1.6. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задание 2. Вычислить определенный интеграл с помощью замены переменных.
Метод решения. Приведение интеграла к табличному виду с помощью замены переменных.
Варианты заданий.

2.1. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)dx}{x}$, $t = \ln x$; 2.2. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$, $t = 25+3x$;

2.3. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot dx$, $x = \sin t$; 2.4. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, $x = t^2$;

2.5. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$; $e^x - 1 = z^2$;

Задание 3. Несобственные интегралы от неограниченных функций: вычислить или установить расходимость.
Варианты заданий.

3.1. $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; 3.2. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$; 3.3. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x}$;

3.4. $\int_0^{\pi.2} ctgx\, dx$; 3.5. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$; 3.6. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$.

Задание 4. Даны несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Вычислить или установить расходимость.

Варианты заданий.

4.1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 4.2. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 4.3. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$;

4.4. $\int_{-1}^{+\infty} e^{-2x}\, dx$ 4.5. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$

Задание 5. Вычисление площадей для областей двух видов:

$$D_1 : \begin{cases} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{cases}; \quad D_2 : \begin{cases} \alpha \le y \le \beta \\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \end{cases}$$

Метод решения. Определить параметры области и применить одну из формул:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx \ ; \qquad S = \int_\alpha^\beta \left(g_2(y) - g_1(y)\right) dy \ .$$

В отдельных случаях рекомендуется разбивать область на две и более части.

Варианты заданий.

5.1. $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ -1 \le y \le \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$, 5.2 $\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ \dfrac{y}{2} \le x \le y^2 + 1 \end{cases}$.

5.3. D ограничена кривой $y = \ln x$, прямой $x = e$ и осью OX.

5.4. Область D ограничена параболой $y = 4x - x^2$ и прямой $y = x - 2$.

5.5. Область D ограничена гиперболой $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ и прямой $x = 4$.

5.6. Область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 16$ и параболой $x^2 = 12(y - 1)$.

Задание 6. Вычислить длину дуги кривой. Выполнить чертеж.

Метод решения. Применить одну из формул:

(1) $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$, где $y = f(x),\ a \le x \le b$.

(2) $L = \int\limits_{t_2}^{t_1} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$, где $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$, это линия, заданная в параметрическом виде.

(3) $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$, где $r = f(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$, это линия, заданная в полярной системе координат.

Варианты заданий.

6.1. Вычислить длину дуги параболы $y = 2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$.

6.2. Найти длину дуги кривой $y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

6.3. Найти длину дуги $y = \arcsin(e^{-x}),\ 0 \le x \le 1$.

6.4. Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде:

$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi.$

6.5. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

6.6. Найти длину первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.

Замечание. Задания по теме «Объемы тел вращения» рекомендуется брать из задачников [8], [9]. По темам заданий 1-5 также рекомендуется решать дополнительные задания из этих задачников.

Задание 7. Найти область определения функций двух переменных. Построить найденные области на чертеже.

Метод решения. Выписать все ограничения на операции, определяющие функцию, и найти допустимое множество точек плоскости.

Варианты заданий.

7.1. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; 7.2. $z = \sqrt{xy}$; 7.3. $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$;

7.4. $z = \sqrt{x\cos y}$; 7.5. $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.

Задание 8. Исследовать на непрерывность функцию двух переменных. Пояснить результат, используя определение непрерывности и разрывности.

Метод решения. Выяснить, где функция не определена. Исследовать поведение функции на границах области определения.

Варианты заданий.

8.1. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; 8.2. $z = \dfrac{x}{(x+y)^2}$; 8.3. $z = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$;

8.4. $z = tg(y - x)$; 8.5. $z = \dfrac{2}{1 - e^{x+y}}$.

Задание 9. Найти пределы функций или показать их расходимость.

Метод решения. Перейти к полярной системе координат или к другим переменным. Для расходимости достаточно показать, что по разным «путям» приближения к точке (x_0, y_0) получаются разные предельные значения.

Варианты заданий.

9.1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{\cos(x^2+y^2)}$; 9.2. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$; 9.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to\infty}} \left(1+\dfrac{x}{y}\right)^y$;

9.4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin x^2 + \sin y^2}{x^2+y^2}$; 9.5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} \dfrac{x+y-5}{x+y-6}$.

Задание 10. Найти частные производные первого и второго порядка. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, т. е. $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Метод решения. Применить обычные правила и формулы дифференцирования, учитывая, что при дифференцировании по x переменная y считается константой, а при дифференцировании по y переменная x считается константой.

Варианты заданий.

10.1. $z = (x + 2y)^3$; 10.2. $z = (x+3)^y$; 10.3. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;

10.4. $z = \sin\dfrac{x}{y}$; 10.5. $z = \dfrac{x+y}{x-y}$; 10.6. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Задание 11. Используя расчеты задания 10, записать дифференциалы dz и d^2z в общем виде или в некоторых точках $A(x_0, y_0)$.

Указание.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot \Delta y,$$

$$dz\big|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_o\\ y=yo}}\cdot dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_o\\ y=y_o}}\cdot dy = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_o\\ y=y_o}}\cdot \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_o\\ y=y_o}}\cdot \Delta y,$$

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^{(2)}(z)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot dx^2+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\cdot dxdy+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot dy^2\right)(z)=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2=z''_{xx}\cdot\Delta x^2+2z''_{xy}\cdot\Delta x\cdot\Delta y+z''_{yy}\cdot\Delta y^2.$$

Дифференциал $d^2z\big|_A$ вычисляется аналогично $dz\big|_A$.

Задание 12. Производная функции $z=f(x,y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке $M(x_0,y_0)$ определяется формулой:

$$\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}\Big|_M=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M\cdot\cos\beta;\ \vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta).$$

12.1. Найти производную функции $z=x^2-2xy+3$ в точке $M(1,2)$ в направлении вектора $\vec{a}(2,-1)$.

12.2. Найти производную функции $z=x^2-xy+3y^2$ в точке $P(1,1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $K(3,2)$.

12.3. Найти производную функции $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M(2,2)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

Задание 13. Для всех задач задания 12 найти градиент функции (grad z) в соответствующей точке. Далее, найти производную функции в направлении $\operatorname{grad} z$ и сравнить ее со значением $\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}$.

Формулы для вычислений:

$$\operatorname{grad}z=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right);\ \operatorname{grad}z\big|_M=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M,\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_o\\y=y_o}},\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_o\\y=y_o}}\right).$$

Задание 14. Исследовать на экстремум (max, min) функции двух переменных:

14.1. $z=(x+1)^2+3y^2$; 14.2. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$;

14.3. $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$; 14.4. $z=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Указание. Необходимое условие экстремума для $z=f(x,y)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)=0\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)=0\end{cases}$$ – система уравнений для определения стационарных точек.

Достаточные условия существования экстремума:

(1) имеется стационарная точка $M(a,b)$;

(2) $\Delta=AC-B^2$, где $A=f''_{xx}(a,b);B=f''_{xy}(a,b);C=f''_{yy}(a,b)$.

При $\Delta>0,\ A<0\ (C<0)$ – max; при $\Delta>0,\ A>0\ (C>0)$ – min;

при $\Delta<0$ – экстремумов нет; при $\Delta=0$ – требуются дополнительные исследования.

Задание 15. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку.
Указание. Желательно провести расчеты табличным способом при помощи элементарных преобразований строк (метод Гаусса).
Варианты заданий.

15.1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -6 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 14; \end{cases}$ 15.2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ 8x_1 + x_2 - 5x_3 = 11. \end{cases}$

Задание 16. Проверить, что определитель основной матрицы системы $\Delta \neq 0$, и решить ее методом Крамера и методом обратной матрицы.

Метод Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Метод обратной матрицы: $X = A^{-1}B$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - решение системы, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – правая часть системы.

Варианты заданий.

16.1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 = 9; \end{cases}$ 16.2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -3 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -10; \end{cases}$ 16.3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_3 = 16 \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

Замечание. Обратную матрицу уметь находить двумя способами: (*а*) через алгебраические дополнения, (*б*) при помощи элементарных преобразований.

Задание 17. Решить однородную систему линейных уравнений методом Гаусса и составить фундаментальную систему решений.
Варианты заданий.

17.1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ 17.2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0; \end{cases}$

17.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0; \end{cases}$ 17.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

Пояснения. Для системы 17.4 ответ может быть записан в разном виде:

(*а*) $\begin{cases} x_1 = 2x_3 - x_4 \\ x_2 = 5x_3 - 3x_4 \\ x_3 = t,\ t - \text{любое число} \\ x_4 = s,\ \text{s} - \text{любое число} \end{cases}$ (*б*) $\begin{cases} x_1 = 2t - s \\ x_2 = 5t - 3s \\ x_3 = t,\ t - \text{любое число} \\ x_4 = s,\ \text{s} - \text{любое число} \end{cases}$

(в) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = te_1 + se_2;\ e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

где $\{e_1, e_2\}$ – фундаментальная система решений.

Задание 18. Показать, что векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ образуют базис в пространстве R^n, и найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе.

Метод решения. Представить $\boldsymbol{x}$ в виде линейной комбинации $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$, составить соответствующую систему линейных уравнений с неизвестными $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ и решить ее.

Варианты заданий.

18.1. $\boldsymbol{e}_1 = (1,5,3)$; $\boldsymbol{e}_2 = (2,7,3)$, $\boldsymbol{e}_3 = (3,9,4)$, $\boldsymbol{x} = (2,1,1)$.

18.2. $\boldsymbol{e}_1 = (2,1,-3)$; $\boldsymbol{e}_2 = (3,2,-5)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{x} = (6,2,-7)$.

18.3. $\boldsymbol{e}_1 = (1,2,-1,-2)$; $\boldsymbol{e}_2 = (2,3,0,-1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1,2,1,4)$,
$\boldsymbol{e}_4 = (1,3,-1,0)$, $\boldsymbol{x} = (7,14,-1,2)$.

Задание 19. Убедиться, что векторы a_1 и a_2 ортогональны, и дополнить их до ортогонального базиса пространства.

Варианты заданий.

19.1. $a_1 = (2,1,2)$, $a_2 = (1,2,-2)$;
19.2. $a_1 = (1,1,1,2)$, $a_2 = (1,2,3,-3)$.

Задание 20. Найти размерность и какой-либо базис (максимальную линейно независимую подсистему) линейной оболочки векторов.

Варианты заданий.

20.1. $a_1 = (3,1,5)$, $a_2 = (-1,2,4)$, $a_3 = (-1,9,21)$.

20.2. $a_1 = (1,2,2,-1)$, $a_2 = (2,3,2,5)$, $a_3 = (-1,4,3,-1)$, $a_4 = (2,9,3,5)$.

20.3. $a_1 = (1,0,0,-1)$, $a_2 = (2,1,1,0)$, $a_3 = (1,1,1,1)$, $a_4 = (1,2,3,4)$, $a_5 = (0,1,2,3)$.

Примеры контрольных заданий

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n-3}\right)^{2n+1}$.

2. Найти уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$ в точке $x=-1$.

Сделать схематичный чертеж.

3. Вычислить интегралы: $(a)\ \int\dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+2x-3}$, $(b)\int(x-2)\sin(3x)dx.$

Вариант 2

1. Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-3}\right)^{n+1}$.

2. Найти уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ в точке $x=1$.

Сделать схематичный чертеж.

3. Вычислить интегралы: $(a)\ \int\dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+4x+5}$; $(b)\int x\cdot\sin(3x+2)dx.$

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Вычислить определенные интегралы:

(а) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2xdx$; (б) $\int\limits_1^3\dfrac{dx}{(5x+1)^3}$; (в) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 x\cdot\cos xdx$; (г) $\int\limits_0^1 xe^{2x}dx.$

2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

(а) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}dx$; (б) $\int\limits_1^3\dfrac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

3. Найти площади фигур заданных областей. Выполнить чертеж.

(а) Область ограничена линиями: $y=2+x,\ y=2x^2-1,\ x=1$.

(б) Область ограничена линиями: $y=1-x,\ y=\ln x,\ x=e.$

Вариант 2

1. Вычислить определенные интегралы:

(а) $\int\limits_{-1}^2 2^x dx$; (б) $\int\limits_1^3\dfrac{dx}{(3x+2)^4}$; (в) $\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{tgx}{\cos^2 x}dx$; (г) $\int\limits_0^{\pi}x\sin\dfrac{x}{2}dx.$

2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

(а) $\int\limits_{-1}^{+\infty}e^{-x}dx$; (б) $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{\sqrt{4-2x}}$.

3. Найти площади фигур заданных областей. Выполнить чертеж.

(а) Область ограничена линиями: $y = 3 + x,\ y = 2x^2,\ x = 1$.

(б) Область ограничена линиями: $x = 0,\ y = \dfrac{1}{2},\ y = 1/x,\ \mathrm{y} = 2$.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Проверить, что определитель основной матрицы системы линейных уравнений не равен нулю, и решить ее тремя способами: (а) методом Гаусса; (б) методом Крамера; (в) методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 11 \\ 2x + y - 3z = -1 \\ 2x + 4y - 3z = -7. \end{cases}$$

2. Дана функция двух переменных $z = 2xy - x^3 - y^2$ и значения $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

Найти

(а) уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = z(x_0, y_0)$;

(б) производную функции $z = z(x, y)$ по направлению $\boldsymbol{n} = (3, -1)$ в точке $M(x_0, y_0)$.

Вариант 2

1. Проверить, что определитель основной матрицы системы линейных уравнений не равен нулю, и решить ее тремя способами: (а) методом Гаусса; (б) методом Крамера; (в) методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 5x - y - 2z = -6 \\ 2x + y - 3z = 9 \\ 2x + 4y - 2z = 22. \end{cases}$$

2. Дана функция двух переменных $z = 3xy - x^2 - y^3$ и значения $x_0 = 2$, $y_0 = -1$.

Найти:

(а) уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = z(x_0, y_0)$;

(б) производную функции $z = z(x, y)$ по направлению $\boldsymbol{n} = (-2, -3)$ в точке $M(x_0, y_0)$.

Литература.

Учебники.

1. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа (в 2-х томах), СПБ: "Лань", 2015.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах), М.: "Наука", 1986.
3. Карташов А. П., Рождественский Б. Г. Математический анализ, М.: "Наука", 2007.
4. Демидович Б. П., Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики, М.: Наука, 1975.
5. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения, М.: Наука, 1985.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры, М.: Физматгиз, 1963.
7. Пухначёва Т. П. Элементы линейной алгебры и конечной математики, Новосибирск, НГУ, 2003.

Задачники.

8. Демидович Б. П. Задачи и упражнения по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов, М.: "Издательство Астрель", 2003.
9. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа : Учеб. пособие для втузов под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича, М.: Физ.-мат. лит., 1986.
10. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре, М.: Наука, 1984.