

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2007 г.)

ВАРИАНТ 1.1

1. Найти \inf, \sup значений функции $\frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}$ на множестве

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

2. Найти жорданов базис векторного пространства \mathbb{R}^4 относительно линейного оператора $x \rightarrow Ax$, если

$$A = \begin{pmatrix} B & B \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. В прямоугольной системе координат гиперболический параболоид задан уравнением $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 2z$ с параметром $a \neq 0$. Найти все значения параметра $a > 0$, для которых существует пара прямолинейных образующих данного гиперболического параболоида, параллельных плоскости $2\sqrt{2}y - z = 0$ и пересекающихся под углом $\pi/3$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2007 г.)

ВАРИАНТ 1.2

4. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{z \operatorname{arctg}(z)}{\sqrt{1+z^2}} dz + (y - z^3) dx - (2x + z^3) dy,$$

где контур C , пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z , задан системой уравнений

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = z, \quad 4x^2 + 9y^2 = 1.$$

5. Доказать, что функция $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2n} n^z)$ аналитична в круге $\{z : |z| < 1\}$.

6. Решить задачу Коши

$$(2y - x)y' = y + 1/x, \quad y|_{x=-2} = -1.$$

Сколько существует решений?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2007 г.)

ВАРИАНТ 2.1

1. Найти \inf, \sup значений функции $\frac{y^3 - 2x^2y}{x^2 + y^2}$ на множестве

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

2. Найти жорданов базис векторного пространства \mathbb{R}^4 относительно линейного оператора $x \rightarrow Ax$, если

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ B & B \end{pmatrix}, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. В прямоугольной системе координат однополостный гиперболоид задан уравнением $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1$ с параметром $c \neq 0$. Найти все значения параметра $c > 0$, для которых существует пара прямолинейных образующих данного однополостного гиперболоида, параллельных плоскости $x = 0$ и пересекающихся под углом $\pi/3$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2007 г.)

ВАРИАНТ 2.2

4. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{z \ln(z+1)}{(1+z^2)^2} dz + (y^3 + z^3) dx - (x^3 + z^3) dy,$$

где контур C , пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z , задан системой уравнений

$$1 - x^2 - y^2 = z, \quad 4x^2 + 2y^2 = 1.$$

5. Доказать, что функция $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + n^2 z^{2^n})$ аналитична в круге $\{z : |z| < 1\}$.

6. Решить задачу Коши

$$(2y + 3x)y' = -3y - 1/(x+1), \quad y|_{x=2} = -3.$$

Сколько существует решений?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2007 г.)

ВАРИАНТ 3.1

1. Найти \inf, \sup значений функции $\frac{x^3 - y^2 x}{x^2 + y^2}$ на множестве

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

2. Найти жорданов базис векторного пространства \mathbb{R}^4 относительно линейного оператора $x \rightarrow Ax$, если

$$A = \begin{pmatrix} B & B \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. В прямоугольной системе координат гиперболический параболоид задан уравнением $2x^2 - b^2 y^2 = 2z$ с параметром $b \neq 0$. Найти все значения параметра $b > 0$, для которых существует пара прямолинейных образующих данного гиперболического параболоида, параллельных плоскости $\sqrt{2}x - z = 0$ и пересекающихся под углом $\pi/3$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2007 г.)

ВАРИАНТ 3.2

4. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{e^z dz}{1 + e^z + e^{2z}} - (2y + z^2)dx + (x + z^3)dy,$$

где контур C , пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z , задан системой уравнений

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} = z, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

5. Доказать, что функция $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - n^{-z} z^{n!})$ аналитична в круге $\{z : |z| < 1\}$.

6. Решить задачу Коши

$$(y - 2x)y' = 2y - 1/(x - 1), \quad y|_{x=-1} = -2.$$

Сколько существует решений?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2007 г.)

ВАРИАНТ 4.1

1. Найти \inf, \sup значений функции $\frac{x^3 - 2y^2x}{x^2 + y^2}$ на множестве

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

2. Найти жорданов базис векторного пространства \mathbb{R}^4 относительно линейного оператора $x \rightarrow Ax$, если

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ B & B \end{pmatrix}, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. В прямоугольной системе координат однополостный гиперболоид задан уравнением $a^2x^2 + 9y^2 - z^2 = 1$ с параметром $a \neq 0$. Найти все значения параметра $a > 0$, для которых существует пара прямолинейных образующих данного однополостного гиперболоида, параллельных плоскости $y = 0$ и пересекающихся под углом $\pi/3$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2007 г.)

ВАРИАНТ 4.2

4. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{dz}{1 - e^z + e^{2z}} + (y^3 - z^3)dx - (x^2 + z^2)dy,$$

где контур C , пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z , задан системой уравнений

$$1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = z, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

5. Доказать, что функция $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n n^4 z^{4n})$ аналитична в круге $\{z : |z| < 1\}$.

6. Решить задачу Коши

$$(y + x)y' = -y + 1/(x + 2), \quad y|_{x=1} = -1.$$

Сколько существует решений?