

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2017 г.)

ВАРИАНТ 1.(часть 1)

- Доказать неравенство  $|\sin^{2017}(\sin x) - \sin^{2017}(\sin y)| \leq 2017|x - y|$  для всех  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- Вычислить матрицу  $\exp X$  и найти ее нормальную жорданову форму, если

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  со стандартным евклидовым расстоянием  $\rho$ , заданы поверхности:

$$\Pi_1 = \{(x, y, z) \mid 3x^2 + 10xy + y^2 + 4z^2 + 4xz + 2z + x = 0\},$$

$$\Pi_2 = \left\{ M = (x, y, z) \mid \frac{|a \times (M - M_1)|}{|a|} + \frac{|a \times (M - M_2)|}{|a|} = 2\rho(l_1, l_2) \right\},$$

где  $l_i$  — прямая, проходящая через точку  $M_i$  с направляющим вектором  $a$ ,  $M_1 \neq M_2$ . Определите аффинный тип этих поверхностей. (Ответ обоснуйте.) Сделайте схематические рисунки. Используя геометрические свойства данных поверхностей, объясните будут ли они аффинно эквивалентны или нет.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2017 г.)

ВАРИАНТ 1.(часть 2)

- Вычислить значение интеграла от 2-формы (интеграл второго рода)

$$\iint_S z^2 dx \wedge dy + (2z + y) dy \wedge dz$$

по верхней стороне поверхности  $S = \{(x - 1)^2 + y^2 = 2z, z \leq 2\}$ .

- Вычислить интеграл в смысле главного значения, используя теорию вычетов:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/\sqrt{2}}(x^2 - 4)}$$

- При каких начальных данных  $y_0$  решение задачи Коши

$$\begin{cases} t^2 y' + ty - y^2 = 0, & t \geq 1, \\ y|_{t=1} = y_0 \end{cases}$$

существует на всей полуоси  $\{t \geq 1\}$ ? Вычислить предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ .

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2017 г.)

ВАРИАНТ 2.(часть 1)

- Доказать неравенство  $|\cos^{2017}(\sin x) - \cos^{2017}(\sin y)| \leq 2017|x - y|$  для всех  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- Вычислить матрицу  $\exp X$  и найти ее нормальную жорданову форму, если

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  со стандартным евклидовым расстоянием  $\rho$ , заданы поверхности:

$$\Pi_1 = \{(x, y, z) \mid 18x^2 - 12xy + 2y^2 - z^2 + x + y + z = 0\},$$

$$\Pi_2 = \left\{ M = (x, y, z) \mid \left| \frac{|a \times (M - M_1)|}{|a|} - \frac{|a \times (M - M_2)|}{|a|} \right| = 2\rho(l_1, l_2) \right\},$$

где  $l_i$  — прямая, проходящая через точку  $M_i$  с направляющим вектором  $a$ ,  $M_1 \neq M_2$ . Определите аффинный тип этих поверхностей. (Ответ обоснуйте.) Сделайте схематические рисунки. Используя геометрические свойства данных поверхностей, объясните будут ли они аффинно эквивалентны или нет.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2017 г.)

ВАРИАНТ 2.(часть 2)

- Вычислить значение интеграла от 2-формы (интеграл второго рода)

$$\iint_S 2z^2 dx \wedge dy + (z - 2y) dy \wedge dz$$

по верхней стороне поверхности  $S = \{(x + 2)^2 + y^2 = 3z, z \leq 3\}$ .

- Вычислить интеграл в смысле главного значения, используя теорию вычетов:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/\sqrt{3}}(x^2 - 9)}$$

- При каких начальных данных  $y_0$  решение задачи Коши

$$\begin{cases} t^2 y' + 2ty - y^2 = 0, & t \geq 1, \\ y|_{t=1} = y_0 \end{cases}$$

существует на всей полуоси  $\{t \geq 1\}$ ? Вычислить предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ .

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2017 г.)

ВАРИАНТ 3.(часть 1)

- Доказать неравенство  $|\cos^{2017}(\cos x) - \cos^{2017}(\cos y)| \leq 2017|x - y|$  для всех  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- Вычислить матрицу  $\exp X$  и найти ее нормальную жорданову форму, если

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  со стандартным евклидовым расстоянием  $\rho$ , заданы поверхности:

$$\Pi_1 = \{(x, y, z) \mid 5x^2 + 3xy + y^2 + 9z^2 + 12xz + 3z + 2x = 0\},$$

$$\Pi_2 = \left\{ M = (x, y, z) \mid \frac{\rho(M_0, M)}{|\frac{a \times (M - M_0)}{|a|}|} = 2 \right\},$$

где  $a$  — некоторый вектор. Определите аффинный тип этих поверхностей. (Ответ обоснуйте.) Сделайте схематические рисунки. Используя геометрические свойства данных поверхностей, объясните будут ли они аффинно эквивалентны или нет.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2017 г.)

ВАРИАНТ 3.(часть 2)

- Вычислить значение интеграла от 2-формы (интеграл второго рода)

$$\iint_S z^2 dx \wedge dy + (z + 4y) dy \wedge dz$$

по верхней стороне поверхности  $S = \{x^2 + (y - 3)^2 = 4z, z \leq 1\}$ .

- Вычислить интеграл в смысле главного значения, используя теорию вычетов:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/\sqrt{5}}(x^2 - 25)}$$

- При каких начальных данных  $y_0$  решение задачи Коши

$$\begin{cases} t^2 y' + 3ty - y^2 = 0, & t \geq 1, \\ y|_{t=1} = y_0 \end{cases}$$

существует на всей полуоси  $\{t \geq 1\}$ ? Вычислить предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ .

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2017 г.)

ВАРИАНТ 4.(часть 1)

- Доказать неравенство  $|\sin^{2017}(\cos x) - \sin^{2017}(\cos y)| \leq 2017|x - y|$  для всех  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- Вычислить матрицу  $\exp X$  и найти ее нормальную жорданову форму, если

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  со стандартным евклидовым расстоянием  $\rho$ , заданы поверхности:

$$\Pi_1 = \{(x, y, z) \mid -x^2 + 6xy - 9y^2 + z^2 + x - y + z = 0\},$$

$$\Pi_2 = \left\{ M = (x, y, z) \mid \frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|a \times (M-M_0)|}{|a|} \right\}$$

для некоторого вектора  $a$ , и  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ ,  $(A, B, C) \perp a$ . Определите аффинный тип этих поверхностей. (Ответ обоснуйте.) Сделайте схематические рисунки. Используя геометрические свойства данных поверхностей, объясните будут ли они аффинно эквивалентны или нет.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2017 г.)

ВАРИАНТ 4.(часть 2)

- Вычислить значение интеграла от 2-формы (интеграл второго рода)

$$\iint_S 2z^2 dx \wedge dy + (3z - y) dy \wedge dz$$

по верхней стороне поверхности  $S = \{x^2 + (y + 2)^2 = 2z, z \leq 2\}$ .

- Вычислить интеграл в смысле главного значения, используя теорию вычетов:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/\sqrt{7}}(x^2 - 49)}$$

- При каких начальных данных  $y_0$  решение задачи Коши

$$\begin{cases} t^2 y' + 4ty - y^2 = 0, & t \geq 1, \\ y|_{t=1} = y_0 \end{cases}$$

существует на всей полуоси  $\{t \geq 1\}$ ? Вычислить предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ .