НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1993

КОМИТЕТ ПО ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ
МИНИСТЕРСТВА НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

В.А.Александров, Е.В.Колесников

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания

Новосибирск
1993

В методических указаниях изложены сведения об интегральных уравнениях и их приложениях к задаче Штурма – Лиувилля, а также приведены задачи, рекомендуемые для решения на практических занятиях по математическому анализу на физическом факультете Новосибирского государственного университета.

На физическом факультете Новосибирского государственного университета тема "Интегральные уравнения" изучается в четвёртом семестре в рамках курса "Математический анализ". Её изучению отводится 3 лекции и 3 практических занятия в мае месяце.

Основная особенность данных указаний состоит в том, что мы рассматриваем тему "Интегральные уравнения" как продолжение непосредственно перед ней изучаемой темы "Теория операторов в гильбертовых пространствах". Поэтому мы целенаправленно извлекаем основные факты о решениях уравнений Фредгольма и Вольтерра из уже известных свойств операторов в гильбертовых пространствах. За это нам приходится "расплачиваться" тем, что мы находим, как правило, решение интегральных уравнений в пространстве $L_2[a,b]$ (которое является гильбертовым), а не в пространстве непрерывных функций (которое, как известно, гильбертовым не является).

Охарактеризуем вкратце книги, использованные при написании этой работы.

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Это прекрасный учебник по функциональному анализу, на котором учились несколько поколений ныне работающих математиков. Наше изложение весьма близко к принятому в этой книге, но в ней не обсуждается билинейная формула и задача Штурма – Лиувилля.

2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. М.: Наука, 1975.

Пятитомник В.И.Смирнова, выдержавший более 10 изданий, заслуженно считается энциклопедией всех (!) математических курсов, читаемых в университетах. Четвёртый том содержит всё, что мы сообщаем об интегральных уравнениях в этой"методичке".

3. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1989.

Один из последних учебников по интегральным уравнениям, написанный преподавателями-математиками для студентов-физиков.

В нем физические примеры и он полностью покрывает содержание данной работы. К сожалению, учебник малодоступен: библиотека НГУ располагает лишь шестью экземплярами.

4. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970.

Содержит очень сжатое введение в теорию интегральных уравнений, ориентированное на физиков и снабженное физическими примерами. В отличие от нашего курса, Арфкен нередко подменяет доказательство наводящими соображениями или правдоподобными рассуждениями.

5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

Помимо общей теории интегральных уравнений содержит сведе́ние задачи Штурма – Лиувилля к интегральным уравнениям с использованием обобщенных функций.

6. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИЛ, 1960.

Совершенно изумительная книга, написанная выдающимся ученым на высочайшем уровне, где объединяются простота, строгость и элегантность изложения, единство метода и широта используемых средств, демонстрируются глубокие связи между различными областями математики и физики. Может быть рекомендована скорее преподавателям-математикам, чем студентам-физикам.

В качестве источника задач мы использовали в основном следующие книги:

7. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Вышейшая школа, 1978.

8. Задания к лабораторным работам по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" для студентов специальности "математика" / А.Я.Дороговцев, С.Д.Ивасишен, Ю.Г.Кондратьев, А.Ю.Константинов. Киев: Изд-во Киевского ун-та.

§ I. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интегралла. Мы будем рассматривать только такие интегральные уравнения, в которые неиз - вестная функция входит линейно. Они называются линейными интегральными уравнениями.

Важнейшими примерами линейных интегральных уравнений являются следующие:

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) = 0$$ — уравнение Фредгольма первого рода,

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) = x(t)$$ — уравнение Фредгольма второго рода,

$$\int_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t) = 0$$ — уравнение Вольтерра первого рода,

$$\int_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t) = x(t)$$ — уравнение Вольтерра второго рода.

Здесь $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ и $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ - известные функции, а функция $x:[a,b]\to\mathbb{C}$ является искомой.

Отметим следующие различия в написанных уравнениях: в уравнениях Фредгольма пределы интегрирования постоянны, а в уравнениях Вольтерра верхний предел интегрирования - пере - менный; в уравнения первого рода неизвестная функция входит только под знаком интеграла.

Поскольку

$$\int_a^t K(t,s)x(s)ds = \int_a^b \tilde{K}(t,s)x(s)ds,$$

где использовано обозначение:

$$\tilde{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & \text{если } a \le s \le t \quad ; \\ 0 \;, & \text{если } t < s \le b \quad , \end{cases}$$

то уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма. В отдельный класс их выделяют из-за того, что их решения обладают рядом специальных свойств, которых, вообще говоря, нет у решений уравнений Фредгольма.

С интегральными уравнениями вы встречались и раньше. Например, доказывая существование и единственность решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, вы сводили его к интегральному уравнению (нелинейному)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \;,$$

которое затем решали методом последовательных приближений.

Такое сведéние возможно и для дифференциальных уравнений порядка выше первого. Рассмотрим, например, следующую задачу для уравнения n -го порядка:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + p_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + p_n(t)x(t) = f(t) \;, \\ x^{(n-1)}(a) = x^{(n-2)}(a) = \dots = x'(a) = x(a) = 0 \;, \\ a \le t \le b \,. \end{cases}$$

Положим

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t y(s)(t-s)^{n-1} ds \;,$$

где $y : [a,b] \to \mathbb{C}$ - новая неизвестная функция. Последовательно дифференцируя это равенство, найдем

$$\begin{cases} x^{(k)}(t) = \dfrac{1}{(n-k-1)!} \displaystyle\int_a^t y(s)(t-s)^{n-k-1} ds, & \text{если } 1 \le k \le n-1 ; \\ x^{(n)}(t) = y(t) . \end{cases}$$

При этом, очевидно, выполнены условия $x^{(k)}(a)=0$ для $1 \leq k \leq n-1$. Подставляя найденные для $x^{(k)}(t)$ выражения в левую часть изначального уравнения, получим

$$y(t)+\int_a^b K(t,s)y(s)ds=f(t),$$

где

$$K(t,s)=p_1(t)+p_2(t)\frac{t-s}{1!}+\ldots+p_n(t)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Таким образом, задача Коши для линейного уравнения n-го порядка с нулевыми начальными данными сведена к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Задачи

Составить интегральное уравнение, соответствующее задаче Коши:

1. $u'+2xu=e^x, \quad u(0)=1.$
2. $u''-\sin x\, u'+e^x u=x, \quad u(0)=1, \quad u'(0)=-1.$
3. $u'''+xu=e^x, \quad u(0)=1, \quad u'(0)=u''(0)=0.$

Решить интегральное уравнение, сведя его к обыкновенному дифференциальному уравнению:

4. $x(t)=e^t+\int_0^t x(s)ds.$
5. $x(t)=1+\int_0^t s\,x(s)ds.$
6. $x(t)=\frac{1}{1+t^2}+\int_0^t \sin(t-s)x(s)ds.$
7. $x(t)=e^{-t}\cos t-\int_0^t \cos(s)e^{-(t-s)}x(s)ds.$
8. $x(t)=4e^t+3t-4-\int_0^t (t-s)x(s)ds.$
9. $x(t)=t-1+\int_0^t (t-s)x(s)ds.$

§ 2. Интегральный оператор Гильберта - Шмидта

Интегральным оператором Гильберта - Шмидта называется оператор, сопоставляющий каждой функции $x \in L_2[a, b]$ функцию y с помощью правила

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds.$$

При этом предполагается, что модуль функции $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$, называемой ядром интегрального оператора Гильберта - Шмидта, интегрируем в квадрате:

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\, dt\, ds < +\infty .$$

Поскольку уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds + f(t)$$

может быть записано в операторном виде $x = Ax + f$, где A - оператор Гильберта - Шмидта, то не удивительно, что многие свойства решений интегральных уравнений могут быть получены с помощью общих теорем об операторах в гильбертовом пространстве. Необходимые для этого свойства оператора Гильберта - Шмидта изучаются в настоящем параграфе.

ТЕОРЕМА (о компактности оператора Гильберта - Шмидта). Интегральный оператор Гильберта - Шмидта A является линейным компактным оператором, переводящим пространство $L_2[a, b]$ в себя. При этом его норма удовлетворяет неравенству

$$\|A\| \le \left\{ \int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\, dt\, ds \right\}^{1/2}. \tag{I}$$

Доказательство. В силу неравенства Коши - Буняковского, для каждого $t \in [a, b]$ имеем:

$$|y(t)|^2=\left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right|^2\le\int_a^b|K(t,s)|^2ds\cdot\int_a^b|x(s)|^2ds=$$
$$=\|x\|^2\cdot\int_a^b|K(t,s)|^2ds.$$

Интегрируя по t , получим:

$$\|Ax\|^2=\|y\|^2=\int_a^b|y(t)|^2dt\le\|x\|^2\int_a^b\int_a^b|K(t,s)|^2dt\,ds,$$

откуда следует, что $y\in L_2[a,b]$ и для нормы оператора A имеет место оценка, указанная в теореме. Осталось доказать, что оператор A компактен.

Пусть $\{x_n\}$ – полная ортогональная система функций в $L_2[a,b]$. Убедимся, что всевозможные попарные произведения $x_m\cdot\overline{x_n}$ образуют полную ортогональную систему функций в $L_2([a,b]\times[a,b])$.

Её ортогональность следует из того, что

$$\int_a^b\int_a^b[x_n(t)\overline{x_m}(s)]\cdot\overline{[x_{n_0}(t)\overline{x}_{m_0}(s)]}dt\,ds=$$
$$=\left[\int_a^b x_n(t)\overline{x}_{n_0}(t)dt\right]\cdot\left[\int_a^b x_{m_0}(s)\overline{x}_m(s)ds\right]=0,$$

если нарушено хоть одно из равенств $n=n_0$ и $m=m_0$. Полнота же будет следовать из известного критерия полноты ортогональной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве: ортогональная система в гильбертовом пространстве полна если и только если не существует ненулевого вектора, ортогонального сразу ко всем векторам системы. Предполагая, что функция $g:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ ортогональна любой функции $x_n\overline{x_m}$ и заменяя двойной интеграл повторным, будем иметь

$$0=\int_a^b\int_a^b g(t,s)\overline{x_n(t)\overline{x}_m(s)}\,dt\,ds=\int_a^b\left[\int_a^b g(t,s)\overline{x}_n(t)\,dt\right]x_m(s)\,ds\,.$$

Поскольку это равенство справедливо при любом m, а система функций $\{x_m\}$ полна в $L_2[a,b]$, заключаем, что функция, стоящая в квадратных скобках, равняется нулю как элемент пространства $L_2[a,b]$, т.е. равняется нулю для почти всех $s\in[a,b]$:

$$\int_a^b g(t,s)\,\overline{x}_n(t)\,dt=0.$$

По той же причине $g(t,s)=0$ для почти всех t и s, а значит, g равняется нулю как элемент пространства $L_2([a,b]\times[a,b])$. Но тогда, в силу критерия полноты, система $\{x_n\overline{x}_m\}$ полна.

Поскольку система $\{x_n\overline{x}_m\}$ полна в $L_2([a,b]\times[a,b])$, то ядро K, как и всякая другая функция из $L_2([a,b]\times[a,b])$, может быть разложено по этой системе:

$$K(t,s)=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}\,x_n(t)\overline{x_m}(s)\;.$$

Для каждого натурального числа N положим

$$K_N(t,s)=\sum_{m,n=1}^{N}a_{mn}\,x_n(t)\overline{x_m}(s)$$

и обозначим через A_N оператор, определяемый ядром K_N.

Нам потребуются следующие свойства оператора A_N:

а) оператор A_N ограничен;

б) оператор A_N отображает $L_2[a,b]$ в некоторое конечномерное подпространство;

в) $\|A-A_N\|\to 0$ при $N\to\infty$.

Ввиду неравенства (I), свойство (а) очевидно. Свойство (б) следует из того, что для любого $x\in L_2[a,b]$ функция A_Nx является линейной комбинацией функций $x_1,x_2,\dots,x_N$:

$$(A_N x)(t) = \int_a^b K_N(t,s)\, x(s)\, ds =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn} x_n(t) \int_a^b \overline{x_m}(s)\, x(s)\, ds = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t),$$

где

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^{N} a_{mn} \int_a^b \overline{x_m}(s)\, x(s)\, ds.$$

Наконец, чтобы доказать свойство (в), применим неравенство (I) к оператору $A - A_N$

$$\|A - A_N\|^2 \le \int_a^b \int_a^b |K(t,s) - K_N(t,s)|^2\, dt\, ds = \|K - K_N\|^2$$

и заметим, что $\|K - K_N\| \to 0$ при $N \to \infty$ в силу определения сходимости ряда

$$K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}\, x_n(t)\, \overline{x_m}(s).$$

Теперь всё готово для доказательства компактности оператора A. Изучая общие свойства линейных операторов, отображающих гильбертово пространство H в гильбертово пространство H_1, мы видели, что если пространство H_1 конечномерно, то линейный оператор $H \to H_1$ компактен тогда и только тогда, когда он ограничен. Поэтому из свойств (а) и (б) следует, что оператор A_N компактен. Но поскольку мы знаем, что предел последовательности компактных операторов обязательно является компактным оператором, то, в силу свойства (в), мы заключаем, что A компактен. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА (об операторе, сопряжённом оператору Гильберта - Шмидта). Если A - оператор Гильберта - Шмидта, с ядром $K(t,s)$, то сопряжённый ему оператор A^* также является оператором Гильберта - Шмидта с ядром $K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}$, где черта означает комплексное сопряжение.

Доказательство. Покажем, что для оператора $(By)(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)ds$ и для любых $x, y \in L_2[a,b]$ выполнено равенство $(Ax,y) = (x, By)$ (т.е. $B = A^*$):

$$(Ax,y) = \int_a^b \Big[\int_a^b K(t,s)x(s)ds\Big]\bar{y}(t)dt =$$

$$= \int_a^b \Big[\int_a^b K(t,s)\overline{y(t)}dt\Big]x(s)ds =$$

$$= \int_a^b \overline{\Big[\int_a^b \overline{K(s,t)}\,y(s)ds\Big]}x(t)dt = (x, By).$$

Задача

10. Доказать, что при $\alpha > -1/2$, $\gamma > 0$ и $\beta > \gamma/2 - 1$ является копактным в пространстве $L_2[0,1]$ оператор A, заданный формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 t^\alpha s^\beta x(s^\gamma)ds, \quad t \in [0,1].$$

Является ли A оператором Гильберта - Шмидта? Опишите образ оператора A.

§ 3. Решение уравнений с вырожденным ядром

В этом параграфе мы рассмотрим один метод решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t), \tag{2}$$

ядро K которого имеет вид

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^n P_j(t)Q_j(s), \tag{3}$$

где $P_j:[a,b]\to\mathbb{C}$, $Q_j:[a,b]\to\mathbb{C}$ - некоторые функции, квадрат модуля которых интегрируем на отрезке $[a,b]$.

Ядро вида (3) называется вырожденным. Мы покажем, что решение уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром может быть сведено к решению некоторой линейной системы алгебраических уравнений.

Прежде всего заметим, что без ограничения общности можем считать функции P_j в разложении (3) линейно независимыми: в противном случае мы бы выделили среди P_j максимальное число линейно независимых, выразили бы остальные P_j линейно через независимые и, перегруппировав слагаемые, вновь получили бы выражение вида (3), но теперь в нем все P_j были бы линейно независимы.

Подставив в уравнение (2) вместо $K(t,s)$ его выражение (3), получим

$$x(t)=\sum_{j=1}^{n}P_j(t)\int_a^b Q_j(s)x(s)ds+f(t)$$

или

$$x(t)=\sum_{j=1}^{n}q_j P_j(t)+f(t), \tag{4}$$

где введено обозначение

$$q_j=\int_a^b Q_j(s)x(s)ds.$$

Смысл равенства (4) в том, что теперь мы знаем вид решения "с точностью до неопределенных коэффициентов q_j", для нахождения которых подставим (4) в уравнение (2):

$$\sum_{j=1}^{n}q_j P_j(t)+f(t)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}P_j(t)\int_a^b Q_j(s)\left[\sum_{k=1}^{n}q_k P_k(s)+f(s)\right]ds+f(t).$$

Вводя обозначения

$$a_{jk}=\int_a^b Q_j(s)P_k(s)ds,\quad b_j=\int_a^b Q_j(s)f(s)ds,$$

перепишем последнее равенство так:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\Big[\sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_k + b_j\Big].$$

Ввиду линейной независимости функций P_j, это равенство возможно лишь в случае совпадения коэффициентов при P_j в его левой и правой частях:

$$q_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_k + b_j, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Таким образом, мы получили для коэффициентов q_j систему линейных алгебраических уравнений, решив которую с помощью формулы (4) найдём функцию x, заведомо удовлетворяющую интегральному уравнению (2): ведь все выкладки, с помощью которых мы пришли от уравнения (2) к системе (5), можно проделать в обратном порядке.

В заключение отметим, что если ядро уравнения (2) не вырожденно, то, разлагая его в ряд Тейлора или ряд Фурье и удерживая конечное число слагаемых, получим уравнение с вырожденным ядром, решения которого по-видимому приближенно совпадают с решениями исходного уравнения. С деталями основанного на этой идее приближенного метода решения интегральных уравнений Фредгольма можно познакомиться по книге Л.В.Канторовича и В.И.Крылова "Приближенные методы высшего анализа".

Задачи

Найти все решения уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром

II. $x(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos t \sin s \, x(s)\,ds = \sin t$.

I2. $x(t) - \frac{2e}{e^2-1}\int_0^1 \operatorname{ch} t \, x(s)\,ds = 1$.

I3. $x(t) - \frac{24}{7}\int_0^1 (1-t^2)(1-\frac{3}{2}s)\,x(s)\,ds = t$.

14. $x(t) - \int_0^1 (2t-s)x(s)ds = \cos 2\pi t.$

15. $x(t) - \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2} ts + t^2(s-1)\right)x(s)ds = 0.$

16. $x(t) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(t-s)x(s)ds = \sin 2t.$

17. $x(t) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)x(s)ds = 0.$

18. $x(t) - 3\int_0^1 (t^2s^2 + 4ts + 1)x(s)ds = 2\pi^2\cos 2\pi t.$

§ 4. Альтернатива Фредгольма

Пусть H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – линейный компактный оператор, A^* – его сопряженный. Разрешимость уравнения

$$x - Ax = f \qquad \text{(н)}$$

устанавливается с помощью однородного уравнения

$$x - Ax = 0, \qquad \text{(о)}$$

сопряженного уравнения

$$y - A^*y = g \qquad \text{(сн)}$$

и однородного сопряженного уравнения

$$y - A^*y = 0 \qquad \text{(со)}$$

следующей теоремой:

ТЕОРЕМА (альтернатива Фредгольма). Для уравнения (н) возможны два случая:

1. Однородное уравнение (о) имеет только нулевое решение. При этом однородное сопряженное уравнение (со) также

имеет только нулевое решение, а уравнение (н) и (сн) имеют и ровно одно решение для любой правой части.

II. Однородное уравнение (о) имеет n линейно независимых решений $x_1, \ldots, x_n$. При этом однородное сопряженное уравнение (со) также имеет n линейно независимых решений $y_1, \ldots, y_n$, а для разрешимости уравнения (н) необходимо и достаточно, чтобы для каждого $k = 1, \ldots, n$ $(y_k, f) = 0$. При выполнении последних условий общее решение уравнения (н) имеет вид

$$x = x_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n ,$$

где x_0 - частное решение неоднородного уравнения (н), а c_k - произвольные постоянные.

Обратим внимание на то, что альтернатива Фредгольма, в частности, утверждает, что уравнение (н) не может иметь бесконечного числа линейно независимых решений.

Поскольку оператор Гильберта - Шмидта компактен, то не вызывает сомнений, что альтернатива Фредгольма имеет прямое отношение к интегральным уравнениям.

Доказательство альтернативы Фредгольма мы проведем только для оператора Гильберта - Шмидта с вырожденным ядром

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t) Q_j(s).$$

В соответствии с результатами предыдущего параграфа, решение уравнения (н) эквивалентно решению следующей линейной системы алгебраических уравнений:

$$q_j - \sum_{k=1}^{m} a_{jk} q_k = b_j \;, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

где $a_{jk} = \int_a^b Q_j(s) P_k(s) ds, \quad b_j = \int_a^b Q_j(s) f(s) ds .$

Ясно, что при этом решение однородного уравнения (о) эквивалентно решению соответствующей однородной системы:

$$q_j - \sum_{k=1}^{m} a_{jk} q_k = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

С другой стороны, в силу § 2, сопряженный к A оператор будет задаваться ядром:

$$K^*(t,s)=\sum_{j=1}^{m}\overline{Q_j(t)}\cdot P_j(s).$$

Поэтому вопрос о разрешимости и числе решений уравнений (сн) и (со) эквивалентен такому же вопросу для систем

$$p_j-\sum_{k=1}^{m}\overline{a}_{kj}p_k=c_j\,,\quad j=1,\dots,m, \tag{8}$$

и

$$p_j-\sum_{k=1}^{m}\overline{a_{kj}}p_k=0\,,\quad j=1,\dots,m, \tag{9}$$

соответственно, где черта, как обычно, означает комплексное сопряжение, а

$$c_j=\int_a^b\overline{P_j(s)}\,g(s)\,ds.$$

Теперь уже легко убедиться, что для уравнений с вырожденным ядром альтернатива Фредгольма следует из хорошо известных из курса линейной алгебры свойств систем (6) - (9). В самом деле, поскольку система (7) не может иметь бесконечного числа линейно независимых решений, то для уравнения (о) есть только две возможности: либо оно имеет только нулевое решение, либо - конечное число линейно независимых решений.

Если уравнение (о) имеет только нулевое решение, то и система (7) имеет только нулевое решение, а значит, определитель матрицы $(\delta_{jk}-a_{jk})$, где δ_{jk} - символ Кронеккера, отличен от нуля. Но тогда отличен от нуля и определитель эрмитово сопряженной ей матрицы $(\delta_{jk}-\overline{a}_{kj})$, следовательно, система (9) (а вместе с ней - и уравнение (со)) также имеет только нулевое решение. При этом, как известно, системы (6) и (8) (а вместе с ними и уравнения (н) и (сн)) имеют единственное решение при любой правой части.

Если же уравнение (о) имеет n линейно независимых решений $x_1,\dots,x_n$, то и система (7) имеет n линейно независимых решений $q^1=(q_1^1,\dots q_m^1)$, ..., $q^n=(q_1^n,\dots q_m^n)$ таких, что $x_k(t)=\sum_{j=1}^{m}q_j^k P_j(t)+f(t)$. Ранг матрицы $(\delta_{jk}-a_{jk})$ равен $m-n$. Но тогда и ранг эрмитово сопряженной ей матрицы $(\delta_{jk}-\overline{a}_{kj})$ равен $m-n$, а значит - система (9) имеет ровно n линейно независимых решений $p^1=(p_1^1,\dots,p_m^1),\dots,p^n=(p_1^n,\dots p_m^n)$.

Итак, в соответствии с формулой (4) предыдущего параграфа уравнение (co) имеет n линейно независимых решений $y_1,\dots,y_n$, определяемых формулами

$$y_k(t)=\sum_{j=1}^{m}p_j^k\overline{Q_j(t)}\ ,\quad k=1,\dots,n.$$

При этом, как известно, необходимым и достаточным условием разрешимости системы (6) является ортогональность ее правой части каждому решению системы (9):

$$\sum_{j=1}^{m}b_j\overline{p_j^k}=0\ ,\quad k=1,\dots,n.$$

Принимая во внимание, что

$$y_k(t)=\sum_{j=1}^{m}p_j^k\overline{Q_j}(t)\ ,$$

можем придать последнему условию такой вид:

$$(f,y_k)=\int_a^b f(t)\overline{y_k(t)}dt=\sum_{j=1}^{m}\overline{p_j^k}\int_a^b f(t)\overline{\overline{Q_j(t)}}dt=\sum_{j=1}^{m}b_j\overline{p_j^k}=0$$

для любого $k=1,\dots,n$.

Альтернатива Фредгольма для интегрального оператора с вырожденным ядром доказана. Её доказательство в общем случае интересующиеся могут найти, например, в учебнике А.Н.Колмогорова и С.В.Фомина "Элементы теории функций и функционального анализа".

Задачи

Исследовать разрешимость уравнения с вырожденным ядром при различных значениях λ.

19. $x(t)-\lambda\int_0^1(1+2t)s\,x(s)ds=1-\frac{3}{2}t$.

20. $x(t)-\lambda\int_0^1 t(1+s)x(s)ds=t^2$.

21. $x(t)-\lambda\int_{-1}^1(t+s)x(s)ds=1/2+3/2\,t$.

22. $x(t)-\mu\int\limits_0^1 t\,x(s)ds = \sin 2\pi t$.

23. $x(t)-\mu\int\limits_0^{\pi}\sin t\cdot\cos s\cdot x(s)ds = \cos t$.

24. $x(t)-\mu\int\limits_0^{\pi}\cos(t+s)\,x(s)\,ds = 1$.

25. Рассмотрев $\mu=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ и $x(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-at}\pm\frac{t}{a^2+t^2}$, $t > 0$, $a > 0$, доказать, что для интегрального уравнения

$$x(t)=\mu\int\limits_0^{+\infty}\sin(ts)\,x(s)ds$$

неверно утверждение теоремы Фредгольма о конечности числа линейно независимых собственных функций однородного уравнения.

§ 5. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений

При решении уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t)=\mu\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t),$$

содержащего параметр μ, оказывается полезной следующая

ТЕОРЕМА фон Неймана, которую мы доказали в разделе "Операторы в гильбертовых пространствах". Если H - гильбертово пространство, $B: H \to H$ - линейный оператор такой, что $\|B^m\| < 1$ для некоторого натурального m, то оператор $(I-B)^{-1}$ существует, линеен, определен во всем пространстве H, ограничен и имеет место равенство

$$(I-B)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B^n.$$

В самом деле, перепишем изначальное уравнение Фредгольма в операторном виде

$$x=\mu Ax+f, \qquad (8)$$

где A - соответствующий оператор Гильберта - Шмидта. Учитывая ограниченность оператора Гильберта - Шмидта:

$$\|A\| \leq \left\{ \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 dt\,ds \right\}^{1/2} < +\infty$$

на основании теоремы фон Неймана заключаем, что для всех достаточно малых μ (а именно для $|\mu| < 1/\|A\|$) оператор $(I-\mu A)^{-1}$ существует и может быть представлен в виде ряда

$$(I-\mu A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n .$$

Следовательно, при $|\mu| < 1/\|A\|$ уравнение (8) для любого f имеет единственное решение, которое к тому же задается в виде ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f = f + \mu A f + \mu^2 A(Af) + \dots ,$$

называемого рядом Неймана.

Другими словами, при $|\mu| < 1/\|A\|$ решение уравнения (8) может быть получено в виде ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n ,$$

первый член которого совпадает со свободным членом уравнения (8): $x_0 = f$, а каждый последующий член выражается через предыдущий по рекуррентной формуле $x_{n+1} = \mu A x_n$. Такой способ нахождения решения называется методом последовательных приближений.

Интуитивно ясно, что частичная сумма

$$\sum_{n=0}^{m} x_n$$

ряда Неймана может рассматриваться как приближенное решение уравнения (8). Это соображение действительно лежит в основе одного из распространенных приближенных методов решения интегральных уравнений, с которым можно более детально познакомиться, например, по книге Л.В.Канторовича и В.И.Крылова "Приближённые методы высшего анализа".

При построении ряда Неймана нужно уметь находить n-ю степень A^n оператора A при любом n. Ядро оператора A^n называется повторным ядром и обозначается через K_n.

ТЕОРЕМА (о повторном ядре оператора Гильберта – Шмидта). При $n = 2, 3, \ldots$, оператор A^n является оператором Гильберта – Шмидта и для повторных ядер справедливо соотношение

$$K_n(t,s) = \int_a^b K(t,r)\,K_{n-1}(r,s)\,dr\,.$$

Доказательство. При каждом $n = 2, 3, \ldots$, наша формула вытекает из следующего вычисления:

$$\int_a^b K_n(t,s)x(s)ds = (A^n x)(t) = A\left(A^{n-1}x\right)(t) =$$

$$= \int_a^b K(t,r)\left[A^{n-1}x\right](r)dr = \int_a^b K(t,r)\left[\int_a^b K_{n-1}(r,s)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, x(s)ds\right]dr = \int_a^b\left[\int_a^b K(t,r)K_{n-1}(r,s)dr\right]x(s)ds.$$

Кроме того,

$$\int_a^b\int_a^b |K_n(t,s)|^2 dt\,ds = \int_a^b\int_a^b\left|\int_a^b K(t,r)K_{n-1}(r,s)dr\right|^2 dt\,ds \le$$

$$\le \int_a^b\int_a^b\left(\int_a^b |K(t,r)|^2 dr\cdot\int_a^b |K_{n-1}(r,s)|^2 dr\right)dt\,ds =$$

$$= \int_a^b\int_a^b |K(t,r)|^2 dr\,dt\cdot\int_a^b\int_a^b |K_{n-1}(r,s)|^2 dr\,ds < +\infty\,.$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем записать ряд Неймана

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f$$

в виде интегрального оператора

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \int_a^b K_n(t,s) f(s)\,ds = \int_a^b R(t,s;\mu) f(s)\,ds\,, \quad (9)$$

где использовано обозначение

$$R(t,s;\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n K_n(t,s)\,.$$

Интегральный оператор (9) называется резольвентой изначального интегрального оператора A , а функция R - его резольвентным ядром.

Задачи

26. Доказать, что если ядро K симметрично (т.е. удовлетворяет условию $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$, то каждое повторное ядро K_n также симметрично.

Найти повторные ядра и резольвенту, а также представить через резольвенту решение следующих интегральных уравнений:

27. $x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x(s)\,ds = \sin t\,.$

28. $x(t) + \pi \int_0^1 t \sin 2\pi s \cdot x(s)\,ds = \cos 2\pi t\,.$

29. $x(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 t\, e^s x(s)\,ds = e^{-t}\,.$

30. $x(t) - \int_0^{\pi/2} \sin t \cos s\; x(s)\,ds = 1\,.$

$x(t) - \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 2^{t+s} x(s)\,ds = t\,.$

§ 6. Интегральные уравнения с симметричными ядрами

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t)=\mu\int_a^b K(t,s)x(s)ds. \tag{10}$$

Будем записывать его в операторном виде $x=\mu Ax$, где $x\in L_2[a,b]$, а оператор Гильберта - Шмидта A отображает гильбертово пространство $L_2[a,b]$ в себя. Как мы знаем, оператор A компактен и, кроме того, является самосопряженным, если $K(t,s)=\overline{K(s,t)}$ (при выполнении последнего условия ядро называется симметричным).

Напомним, что в разделе "Операторы в гильбертовых пространствах" мы называли ненулевой вектор $x\in H$ собственным вектором оператора B, отображающего гильбертово пространство H в себя, если $Bx=\lambda x$ для некоторого комплексного числа λ, называемого в этом случае собственным значением оператора B. В отличие от этого, в теории интегральных уравнений функцию $x\in L_2[a,b]$, не равную нулю тождественно, принято называть собственной функцией интегрального уравнения (10) (или собственной функцией уравнения $x=\mu Ax$ или собственной функцией ядра K, если имеет место равенство

$$x(t)=\mu\int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

или $x=\mu Ax$ для некоторого комплексного числа μ, называемого при этом собственным значением интегрального уравнения (10) (или собственным значением уравнения $x=\mu Ax$ или собственным значением ядра K).

Короче говоря, мы можем сказать, что если $\lambda\neq 0$ является собственным значением оператора A, то число $\mu=1/\lambda$ является собственным значением уравнения $x=\mu Ax$.

Напомним некоторые свойства собственных чисел и собственных векторов оператора $B:H\to H$, доказанные в разделе "Операторы в гильбертовых пространствах":

1) Число линейно независимых собственных векторов, отве-

чающих данному собственному значению $\lambda \neq 0$ компактного оператора B, конечно.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ число собственных значений компактного оператора B, удовлетворяющих неравенству $|\lambda| > \varepsilon$, конечно.

3) Собственные значения компактного оператора B можно перенумеровать в порядке невозрастания модулей $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$

4) Все собственные числа компактного самосопряженного оператора B вещественны.

5) Любые два собственных вектора самосопряженного компактного оператора B, отвечающие его различным собственным значениям, ортогональны.

6) Каждый ненулевой компактный самосопряженный оператор B имеет по крайней мере одно собственное число, отличное от нуля.

Следующие свойства собственных чисел и собственных функций интегрального уравнения $x = \mu A x$ непосредственно вытекают из свойств (I) - (6) и в доказательстве не нуждаются:

i) Число линейно независимых собственных функций, отвечающих данному собственному значению μ интегрального уравнения $x = \mu A x$, конечно.

ii) Для любого $\varepsilon > 0$ число собственных значений интегрального уравнения $x = \mu A x$, удовлетворяющих неравенству $|\mu| < \varepsilon$, конечно.

iii) Собственные значения интегрального уравнения $x = \mu A x$ можно перенумеровать в порядке неубывания модулей: $|\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \cdots$

iv) Все собственные значения интегрального уравнения $x = \mu A x$ с симметричным ядром вещественны.

v) Любые две собственные функции интегрального уравнения $x = \mu A x$ с симметричным ядром, отвечающие его различным собственным значениям, ортогональны.

vi) Всякое интегральное уравнение $x = \mu A x$ с симметричным ядром имеет по крайней мере одно собственное значение.

Задачи

Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения с вырожденным ядром:

32. $x(t)-\mu\int_0^1(1+2t)s\,x(s)\,ds=0$.

33. $x(t)-\mu\int_0^1(t+s)\,x(s)\,ds=0$.

34. $x(t)-\mu\int_0^1\cos(t-s)\,x(s)\,ds=0$.

Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения

$$x(t)-\mu\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds=0$$

с симметричным ядром, сводя его к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

35. $$K(t,s)=\begin{cases}(s-1)t, & \text{если } 0\le t\le s;\\ s(t-1), & \text{если } s\le t\le 1.\end{cases}$$

36. $$K(t,s)=\begin{cases}-t, & \text{если } 0\le t\le s;\\ -s, & \text{если } s\le t\le 1.\end{cases}$$

37. $$K(t,s)=\begin{cases}\sin s\cdot\cos t, & \text{если } 0\le t\le s;\\ \cos s\cdot\sin t, & \text{если } s\le t\le 1.\end{cases}$$

38. $$K(t,s)=\frac{1}{2}\sin|t-s|,\quad a=0,\quad b=\pi.$$

§ 7. Теорема Гильберта - Шмидта для интегральных операторов. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра

Напомним, что наиболее важное свойство собственных функций самосопряжённого компактного оператора даётся следующей теоремой Гильберта - Шмидта: если H - гильбертово пространство и $B: H \to H$ самосопряженный компактный оператор, то в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора B. Чтобы сформулировать аналогичную теорему для интегрального уравнения $x = \mu Ax$ с симметричным ядром, примем следующие соглашения.

Всюду в § 7 и 8 мы будем считать, что последовательность $x_1, \dots, x_n$ собственных функций уравнения $x = \mu Ax$ с симметричным ядром является ортонормированной. Это не ограничивает общности рассуждений, так как в силу свойства (V) из предыдущего параграфа, собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, заведомо ортогональны. Что же касается собственных функций, отвечающих одному и тому же собственному значению, то они, очевидно, лежат в некотором подпространстве и мы можем заменить их произвольным ортонормированным базисом этого подпространства, построенным, например, с помощью процедуры ортогонализации Грама - Шмидта.

Кроме того, нам будет удобно использовать следующее

Определение: говорят, что функция $f \in L_2[a,b]$ представима через ядро $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$, если существует функция $g \in L_2[a,b]$ такая, что

$$f(t) = \int_a^b K(t,s)\, g(s)\, ds ,$$

т.е. если f лежит в образе оператора Гильберта - Шмидта с ядром K.

ТЕОРЕМА (Гильберта - Шмидта для интегральных уравнений с симметричным ядром). Если $f \in L_2[a,b]$ представима через симметричное ядро $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$, то она может быть разложена в ряд

$$f(t) = \sum_n f_n x_n(t) , \qquad (11)$$

где $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ – ортонормированная последовательность собственных функций уравнения (10), а коэффициенты f_n задаются равенствами

$$f_n = \int_a^b f(t)\, x_n(t)\, dt .$$

Замечания:

1. И в теореме и в определении речь идёт о равенстве функций в пространстве $L_2[a, b]$, а не о их совпадении при каждом t из $[a, b]$.

2. В равенстве (11) суммирование по n может вестись как по конечному, так и по бесконечному множеству. В последнем случае сумма понимается как сумма бесконечного числа элементов гильбертова пространства $L_2[a, b]$.

Доказательство теоремы. Запишем интегральное уравнение (10) в виде $x = \mu A x$ и обозначим через H образ оператора A. Фактически нам надо доказать, что в H существует ортонормированный базис из собственных функций уравнения $x = \mu A x$.

Поскольку A является оператором Гильберта – Шмидта с симметричным ядром, то A компактен и самосопряжён. Значит, в $L_2[a, b]$ существует ортонормированный базис $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ из собственных векторов оператора A. Обозначим через λ_n собственное значение оператора , соответствующее собственному вектору x_n : $A x_n = \lambda_n x_n$. Из последовательности $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ выберем подпоследовательность $x_{n_1}, \ldots, x_{n_j}, \ldots$ векторов, лежащих в H. Отметим, что векторы $x_{n_1}, \ldots, x_{n_j}, \ldots$ образуют базис в H и в зависимости от размерности H их число может быть конечно или бесконечно.

Убедимся, что теперь ни при каком значении j число λ_{n_j} не может равняться нулю. В самом деле, допустив противное, получим, что ненулевой вектор x_{n_j} удовлетворяет соотношениям $A x_{n_j} = \lambda_{n_j} x_{n_j} = 0$. С другой стороны, поскольку $x_{n_j} \in H$, то найдётся вектор $y \in L_2[a, b]$ такой, что $A y = x_{n_j}$. Тогда, воспользовавшись самосопряженностью оператора A, будем иметь:

$$\|x_{n_j}\|^2=(x_{n_j},x_{n_j})=(x_{n_j},Ay)=(Ax_{n_j},y)=(0,y)=0$$

а значит, $x_{n_j}=0$. Полученное противоречие и доказывает, что $\lambda_{n_j}\neq 0$.

Учитывая, что $\lambda_{n_j}\neq 0$, мы можем переписать равенство $Ax_{n_j}=\lambda_{n_j}x_{n_j}$ в виде $x_{n_j}=(1/\lambda_{n_j})Ax_{n_j}$, а значит, можем утверждать, что последовательность $x_{n_1},\dots,x_{n_j},\dots$ является ортонормированной последовательностью собственных функций уравнения $x=\mu Ax$.

Поскольку $x_{n_1},\dots,x_{n_j},\dots$ образуют базис в H, а функция f представима через ядро K оператора A, т.е. $f\in H$, то найдутся комплексные числа f_j такие, что

$$f=\sum_j f_j x_{n_j},$$

с точностью до обозначений совпадает с формулой (II). Чтобы найти выражение для f_m, достаточно, как обычно, умножить последнее равенство скалярно на x_{n_m} и воспользоваться ортонормированностью последовательности $x_{n_1},\dots,x_{n_j},\dots$:

$$\int_a^b f(t)x_{n_m}(t)dt=(f,x_{n_m})=\sum_j f_j(x_{n_j},x_{n_m})=f_m.$$

Теорема доказана.

Применим доказанную теорему к решению неоднородного уравнения $x=\mu Ax+f$, где A – интегральный оператор Гильберта – Шмидта с симметричным ядром K.

Если x является его решением, то $x-f=\mu Ax$, и, значит, функция $x-f$ представима через ядро K. Поэтому она может быть разложена в ряд по ортонормированной последовательности $x_1,\dots,x_n,\dots$ собственных функций однородного уравнения $x=\mu Ax$:

$$x-f=\sum_n a_n x_n. \tag{12}$$

Подставив это разложение для x в первоначальное уравнение и учитывая, что $x_n=\mu_n Ax_n$, получим:

$$f+\sum_n a_n x_n = x = \mu A x + f = \mu \sum_n \mu_n^{-1} a_n x_n + \mu A f + f$$

или

$$\sum_n \left(a_n - \frac{\mu}{\mu_n} a_n\right) x_n = \mu A f .$$

Поскольку функция Af, очевидно, представима через ядро K, то она тоже разлагается в ряд по функциям $x_1, \dots, x_n, \dots$, коэффициенты которого обозначим через b_n:

$$Af = \sum_n b_n x_n \ , \quad b_n = \int_a^b (Af)(t)\, x_n(t)\, dt$$

Значит,

$$\sum_n \left(a_n - \frac{\mu}{\mu_n} a_n - \mu b_n\right) x_n = 0 .$$

Откуда, учитывая линейную независимость функций $x_1, \dots, x_n, \dots$ находим

$$a_n = \mu \frac{\mu_n b_n}{\mu_n - \mu}$$

Подставляя это выражение в формулу (I2), получим:

$$x(t) = f(t) + \mu \sum_n \frac{\mu_n}{\mu_n - \mu} b_n x_n(t).$$

Наконец, воспользовавшись результатами следующего вычисления

$$b_n = \int_a^b (Af)(t)\, x(t)\, dt = \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s) f(s)\, ds\right] x_n(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s) x_n(t)\, dt\right] f(s)\, ds = \int_a^b (A x_n)(s) f(s)\, ds = \mu_n^{-1} \int_a^b x_n(s) f(s)\, ds,$$

получим формулу

$$x(t) = f(t) + \mu \sum_n \frac{x_n(t)}{\mu_n - \mu} \int_a^b x_n(s) f(s)\, ds \ , \qquad \text{(I3)}$$

называемую разложением решения интегрального уравнения $x = \mu Ax + f$ по собственным функциям ядра. Она позволяет предъявить решение неоднородного уравнения, если известны все решения соответствующего однородного. Иногда говорят, что решение (13) получено методом Гильберта – Шмидта.

Задачи

39. Объясните, почему при $f = 0$ формула (13) теряет смысл.

40. Повторяя рассуждения настоящего параграфа, выясните, как изменится формула (13) для $f \neq 0$ в случае, если параметр μ равен одному из собственных значений μ_n однородного уравнения $x = \mu Ax$. Сравните полученный результат с теоремой Фредгольма.

41. Решить интегральное уравнение

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t+s)\,x(s)\,ds$$

методом Гильберта – Шмидта.

Воспользовавшись результатами решения задач 35 – 38, найти решения неоднородных уравнений Фредгольма с симметричными ядрами при различных значениях μ :

42. $$x(t) - \mu\int_0^1 K(t,s)\,x(s)\,ds = 1,$$

$$K(t,s) = \begin{cases} (s-1)t, & \text{если } 0 \le t \le s; \\ s(t-1), & \text{если } s \le t \le 1. \end{cases}$$

43. $$x(t) - \mu\int_0^1 K(t,s)\,x(s)\,ds = \sin \pi t \cos \frac{\pi}{2} t,$$

$$K(t,s) = \begin{cases} -t, & \text{если } 0 \le t \le s; \\ -s, & \text{если } s \le t \le 1. \end{cases}$$

44. $x(t)-\mu\int_0^{\pi} K(t,s)x(s)\,ds = t-\pi,$

$$K(t,s)=\begin{cases}\sin s\cdot\cos t, & \text{если } 0\le t\le s;\\ \cos s\cdot\sin t, & \text{если } s\le t\le\pi.\end{cases}$$

45. $x(t)-\mu\cdot\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin|t-s|\,x(s)\,ds = 1.$

§ 8. Разложение повторного ядра интегрального оператора по его собственным функциям. Билинейная формула

Дополним теорему Гильберта – Шмидта более специальными предложениями, справедливыми только для интегральных операторов.

Будем считать, что нам задано симметричное ядро $K\in L_2([a,b]\times[a,b])$. Соответствующий ему оператор Гильберта – Шмидта обозначим, как обычно, через A. Будем считать, что нам известен базис из ортонормированных собственных функций $x_1,\ldots x_n,\ldots$ оператора A и соответствующие им собственные значения $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots$ оператора A.

Как обычно, через K_n обозначим повторное ядро, соответствующее K.

ТЕОРЕМА (о разложении ядра или билинейная формула). Для симметричного ядра K при каждом $n\geqslant 1$ в пространстве $L_2([a,b]\times[a,b])$ имеет место равенство

$$K_n(t,s)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^n x_j(t)\overline{x_j(s)}. \tag{14}$$

Доказательство. Как мы знаем из доказательства теоремы 1 из § 2, если последовательность $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ образует ортонормированный базис в $L_2[a,b]$, то последовательность, составленная из всевозможных попарных произведений $x_m(t)\overline{x_n(s)}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2([a,b]\times[a,b])$.

Поэтому, как всякая функция $L_2([a,b]\times[a,b])$, K_n может быть разложено в ряд Фурье по этому базису:

$$K_n(t,s)=\sum_{j,k=1}^{\infty}(K_n, x_j\overline{x_k})x_j(t)\overline{x_k(s)} \qquad (15)$$

и нам остается найти коэффициенты этого разложения:

$$(K_n, x_j\overline{x_k})=\int_a^b\int_a^b K_n(t,s)\overline{x_j(t)\overline{x_k}(s)}\,dt\,ds =$$

$$=\int_a^b\Big[\int_a^b K_n(t,s)x_k(s)ds\Big]\overline{x_j(t)}\,dt=\int_a^b(A^n x_k)(t)\overline{x_j(t)}\,dt=$$

$$=(A^n x_k, x_j)=\lambda_k(A^{n-1}x_k, x_j)=\ldots=\lambda_k^n(x_k,x_j)=\lambda_k^n\delta_{kj},$$

где δ_{ij} – символ Кронеккера. Подставляя найденное значение в формулу (15), получим разложение (14). Теорема доказана.

В разложении (14) мы, очевидно, можем вести суммирование только по тем индексам j , для которых $\lambda_j\neq 0$. С другой стороны, очевидно, что если x_j является собственным вектором оператора A , соответствующим собственному значению $\lambda_j\neq 0$, то эта же самая функция x_j является собственной функцией уравнения $x=\mu Ax$, соответствующей собственному значению $\mu_j = 1/\lambda_j$ этого уравнения. Поэтому можно переписать билинейную формулу в виде

$$K_n(t,s)=\sum_j\frac{x_j(t)\overline{x_j(s)}}{\mu_j^n},$$

где $n\geq 1$, а суммирование ведется по множеству индексов некоторой максимальной ортонормированной системы $\{x_j\}$

собственных функций уравнения $x=\mu Ax$. В частности, может случиться так, что последняя формула содержит лишь конечное число слагаемых.

Не останавливаясь на вопросе поточечной сходимости билинейной формулы, укажем один наиболее известный результат в этом направлении.

ТЕОРЕМА МЕРСЕРА. Если ядро K непрерывно, симметрично и все его собственные значения, за исключением конечного числа их, имеют одинаковый знак, то все собственные функции x_j ядра K непрерывны, ряд

$$\sum_j \frac{x_j(t)\overline{x_j(s)}}{\mu_j}$$

сходится равномерно в $[a,b]\times[a,b]$ и для всех $t\in[a,b]$, $s\in[a,b]$ имеет место равенство

$$K(t,s)=\sum_j \frac{x_j(t)\overline{x_j(s)}}{\mu_j}.$$

Доказательство теоремы Мерсера может быть найдено, например, в книгах А.Б.Васильевой и Н.А.Тихонова "Интегральные уравнения", Ф.Рисса и Б.Секефальви-Надя "Лекция по функциональному анализу" или в четвертом томе "Курса высшей математики", В.И.Смирнова.

Задачи

46. Докажите "легкую часть" теоремы Мерсера, касающуюся непрерывности собственных функций. А именно покажите, что если ядро K непрерывно, то все функции, представимые через ядро K, - непрерывны и выведите отсюда непрерывность собственных функций $x_j=\mu_j Ax_j$.

Доказать, что при выполнении условий теоремы Мерсера имеют место следующие равенства

47. $$\sum_n \frac{|x_n(t)|^2}{\mu_n^2}=\int_a^b |K(t,s)|^2 ds, \quad t\in[a,b].$$

48. $$\sum_n \frac{1}{\mu_n^2} = \int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 dt\,ds.$$

49. $$\sum_n \frac{1}{\mu_n} = \int_a^b K(t,t)\,dt.$$

§ 9. Применение теории интегральных операторов к задаче Штурма – Лиувилля

Оператором Штурма – Лиувилля называется линейный дифференциальный оператор

$$Ly = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y(x),$$

где функция p непрерывно дифференцируема и положительна, а функция q непрерывна и неотрицательна в интервале $[a,b]$.

Задачей Штурма – Лиувилля называется задача о нахождении тех чисел λ, для которых существует ненулевое C^2-гладкое решение $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, дифференциального уравнения

$$Ly = \lambda \rho y,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(a) + Ay'(a) = 0, \quad y(b) + By'(b) = 0.$$

Здесь A и B – известные числа, а ρ – известная непрерывная функция.

Значения параметра λ, при которых ненулевое решение существует, называются собственными значениями задачи Штурма – Лиувилля, а сами ненулевые решения называются собственными функциями задачи Штурма – Лиувилля. Такая терминология объясняется тем, что при $p \equiv 1$ речь действительно идет о собственных значениях и собственных функциях оператора L.

Определение. Функцией Грина оператора L называется такая обобщенная функция G двух переменных x, $t \in [a, b]$, которая удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\right) + q(x) G(x,t) = \delta(x-t)$$

для всех $x, t \in [a, b]$. Здесь δ, как обычно, обозначает дельта-функцию Дирака.

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что

1) для оператора Штурма - Лиувилля существует функция Грина, являющаяся "обыкновенной" функцией, симметричной по переменным x и t;

2) если $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма - Лиувилля, то решение задачи

$$Ly = f, \quad y(a) + A y'(a) = 0, \quad y(b) + B y'(b) = 0$$

выражается формулой

$$y(x) = \int_a^b G(x,t) f(t)\, dt.$$

Для полноты изложения докажем эти утверждения.

ТЕОРЕМА (о явном виде функции Грина). Пусть y_1 и y_2 являются C^2 - гладкими линейно независимыми решениями уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющими условиям $y_1(a) + Ay'(a) = 0$, $y_2(b) + B y_2'(b) = 0$. Тогда выражение

$$p(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{16}$$

отлично от нуля и не зависит от $x \in [a, b]$, т.е. является отличной от нуля постоянной, которую мы обозначим через $1/c$. При этом функция $G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$G(x,t)=\begin{cases} C y_1(x) y_2(t), & \text{если} \quad x<t; \\ C y_1(t) y_2(x), & \text{если} \quad x>t, \end{cases}$$

является функцией Грина оператора L.

Доказательство. Следующее вычисление убеждает нас, что выражение (I6) постоянно в $[a,b]$:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \right] =$$

$$= p'(y_1 y_2' - y_1' y_2) + p(\cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - \cancel{y_1' y_2'}) =$$

$$= y_1 (p y_2')' - y_2 (p y_1')' =$$

$$= y_2 [(-p y_1')' + q y_1] - y_1 [(-p y_2')' + q y_2] =$$

$$= y_2 L y_1 - y_1 L y_2 = 0 .$$

Определитель, присутствующий в выражении (I6), является определителем Вронского линейно независимых решений y_1 и y_2 и поэтому отличен от нуля. Функция p положительна по условию. Следовательно, выражение (I6) отлично от нуля.

Дальнейшие вычисления проделаем на основе теоремы о связи обобщенной и классической производной кусочно-гладкой функции: если кусочно-гладкая функция f имеет разрывы в точках x_k, то её обобщенная производная f' связана с её классической производной $f'_{кл}$ с помощью формулы

$$f' = f'_{кл} + \sum_k [f]_{x_k} \cdot \delta(x - x_k),$$

где $[f]_{x_k}$ обозначает скачок функции f в точке x_k.

В силу этой теоремы

$$\frac{\partial G_1(x,t)}{\partial x} = \begin{cases} C\, y_1'(x) y_2(t), & \text{если } x < t; \\ C\, y_1(t) y_2'(x), & \text{если } x > t. \end{cases}$$

Следовательно,

$$p(x)\frac{\partial G_1(x,t)}{\partial x} = \begin{cases} C\, p(x) y_1'(x) y_2(t), & \text{если } x < t; \\ C\, p(x) y_1(t) y_2'(x), & \text{если } x > t, \end{cases}$$

и, ещё раз применяя теорему, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial G_1(x,t)}{\partial x}\right) = -C p(x) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \delta(x-t) +$$

$$+ \begin{cases} C\,[p(x) y_1'(x)]' y_2(t), & \text{если } x < t; \\ C\,[p(x) y_2'(x)]' y_1(t), & \text{если } x > t. \end{cases}$$

Учитывая определение постоянной C, отсюда найдем:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial G_1}{\partial x}(x,t)\right) + q(x) G_1(x,t) =$$

$$= \delta(x-t) + \begin{cases} C\left[-(p(x) y_1'(x))' + q(x) y_1(x)\right] y_2(t), & x < t; \\ C\left[-(p(x) y_2'(x))' + q(x) y_2(x)\right] y_1(t), & x > t. \end{cases}$$

Остается заметить, что второе слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю, так как результат применения оператора L к каждой из функций y_1 и y_2, есть ноль. Теорема доказана.

Применение теории интегральных операторов к задаче Штурма - Лиувилля основано на следующей лемме

ЛЕММА. Если $f \in C^2[a,b]$ не является собственным значением задачи Штурма - Лиувилля, то решение $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, задачи

$$Ly=f,\ y(a)+Ay'(a)=0,\ y(b)+By'(b)=0$$

существует, единственно и выражается формулой

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)\,dt. \tag{17}$$

Доказательство. Существование решения обычно доказывается с помощью стандартного приема, применяемого в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, - метода вариации постоянного вектора. Мы опустим эту часть доказательства, поскольку ничего нового добавить не сможем.

Чтобы убедиться в единственности, допустим, что нашлось два решения y_1 и y_2 нашей задачи. Тогда функция $y=y_1-y_2$ не равна нулю тождественно и удовлетворяет условиям

$$Ly=Ly_1-Ly_2=f-f=0=0\cdot y,$$

$$y(a)+Ay'(a)=y_1(a)+Ay_1'(a)+y_2(a)+Ay_2'(a)=0,$$

$$y(b)+By'(b)=y_1(b)+By_1'(b)+y_2(b)+By_2'(b)=0.$$

Но это означает, что $\lambda=0$ является собственным значением оператора L. Последнее противоречит условиям леммы. Единственность доказана.

Формулу (17) мы докажем, используя формализм теории обобщенных функций. Если φ - пробная функция (т.е. φ бесконечно дифференцируема и обращается в ноль в некоторой окрестности точек a и b), то, используя определения производной обобщенной функции:

$(F', \varphi) = -(F, \varphi')$ и умножения обобщенной функции: $(aF, \varphi) = (F, a\varphi)$, можем записать:

$$(Ly, \varphi) = (-(py')' + qy, \varphi) = -((py')', \varphi) + (qy, \varphi) =$$

$$= (py', \varphi') + (y, q\varphi) = (y', p\varphi') + (y, q\varphi) =$$

$$= -(y, (p\varphi')') + (y, q\varphi) = (y, -(p\varphi')' + q\varphi) = (y, L\varphi).$$

Справедливости ради надо отметить, что равенство $(Ly, \varphi) = (y, L\varphi)$ не является для нас новым: оно выражает известный нам факт симметричности оператора Штурма - Лиувилля. Продолжая вычисления, возьмем в качестве y именно ту "обычную" функцию, которая задаётся равенством (I7), так что её действие как обобщенной функции задаётся некоторым интегралом:

$$(y, L\varphi) = \left(\int_a^b G(x,t) f(t)\,dt, L\varphi\right) =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b G(x,t) f(t)\,dt\right] (L\varphi)(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b G(x,t)(L\varphi)(x)\,dx\right] f(t)\,dt =$$

$$= \left(\left(G(x,t), (L\varphi)(x)\right), f(t)\right).$$

Предпоследнее равенство здесь написано на основании теоремы Фубини (докажите самостоятельно существование соответствующего двойного интеграла). Вновь используя симметричность оператора L и вспоминая определение функции Грина, будем иметь

$$((G(x,t),(L\varphi)(x)),f(t))=((LG(x,t),\varphi(x)),f(t))=$$

$$=((\delta(x-t),\varphi(x)),f(t))=(\varphi(t),f(t))=(\varphi,f).$$

Собирая воедино результаты предыдущих вычислений, получим, что если функция y задана формулой (17), то для любой пробной функции φ имеет место равенство

$$(Ly,\varphi)=(f,\varphi).$$

Это означает, что непрерывные функции Ly и f совпадают как обобщенные функции. Но тогда они совпадают и поточечно. Последнее утверждение можно обосновать, например, ссылкой на лемму Лагранжа из вариационного исчисления. Лемма доказана.

Теперь мы готовы перейти непосредственно к изложению применения теории интегральных операторов к задаче Штурма – Лиувилля.

Из только что доказанной леммы непосредственно следует, что задача Штурма – Лиувилля

$$Ly=\lambda\rho y,$$

$$y(a)+Ay'(a)=0,\quad y(b)+By'(b)=0$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,t)\rho(t)y(t)dt. \tag{18}$$

(Для этого нужно функцию $\lambda\rho y$ рассматривать как f).

Ядро полученного интегрального уравнения несимметрично, что не позволяет сразу в полном объеме применить теорию, развитую в предыдущих параграфах. Чтобы исправить такой недостаток, введём новую переменную

$$z(x)=\sqrt{p(x)}\,y(x).$$

Тогда интегральное уравнение (I8) примет вид

$$z(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)z(t)\,dt, \qquad (19)$$

где введено обозначение $K(x,t)=G_1(x,t)\sqrt{p(x)}\sqrt{p(x)}$.
Ядро K последнего уравнения, очевидно, симметрично ввиду симметричности функции Грина G_1.

Последнее обстоятельство позволяет нам непосредственно использовать свойства (i) - (vi) § 6 и теорему Гильберта - Шмидта для получения соответствующих свойств решений интегрального уравнения (I9) и, тем самым, следующих свойств собственных функций и собственных значений задачи Штурма - Лиувилля:

I) Задача Штурма - Лиувилля имеет бесконечное число собственных значений.

2) Для любого $\varepsilon>0$ число собственных значений задачи Штурма - Лиувилля, удовлетворяющих неравенству $|\lambda|<\varepsilon$, конечно.

3) Собственные значения задачи Штурма - Лиувилля можно перенумеровать в порядке неубывания модулей: $|\lambda_1|\leq|\lambda_2|\leq\ldots$

4) Все собственные значения задачи Штурма - Лиувилля вещественны.

5) Любые все собственные функции y_1 и y_2 задачи Штурма - Лиувилля, отвечающие её различным собственным значениям λ_1 и λ_2, ортогональны в интервале $[a,b]$ с весом p:

$$\int_a^b y_1(x)\,y_2(x)\,p(x)\,dx=0.$$

Подчеркнем, что не всякое интегральное уравнение (I9) с симметричным ядром эквивалентно хоть какой-нибудь задаче Штурма - Лиувилля. Поэтому можно ожидать, что собственные значения задачи Штурма - Лиувилля обладают какими-то дополнительными свойствами. Для примера укажем одно такое свойство. Если, как обычно, рангом собственного значения называть число линейно независимых собственных функций, ему отвечающих, то свойство (i) § 6 можно сформулировать так: каждое собственное значение μ интегрального уравнения $x=\mu Ax$ имеет конечный ранг. Для задачи Штурма - Лиувилля имеет место более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА. Каждое собственное значение задачи Штурма - Лиувилля имеет ранг, равный единице.

Доказательство. Допустим, что ранг собственного значения λ больше единицы. Тогда существуют по крайней мере две C^2 - гладкие линейно независимые функции y_1 и y_2, удовлетворяющие уравнению $Ly=\lambda\rho y$ и граничным условиям $y(a)+Ay'(a)=0$, $y(b)+By'(b)=0$. Поскольку уравнение $Ly=\lambda\rho y$ является уравнением второго порядка, то y_1 и y_2, как и два любые другие линейно независимые решения, образуют его фундаментальную систему решений. То есть любое решение $y=y(x)$ уравнения $Ly=\lambda\rho y$ является линейной комбинацией функций y_1 и y_2 и, в частности, удовлетворяет граничным условиям $y(a)+Ay'(a)=0$, $y(b)+By'(b)=0$. Но это абсурдно, так как заведомо существует решение уравнения $Ly=\lambda\rho y$, удовлетворяющее, например, условиям $y(a)+Ay'(a)=1$, $-Ay(a)+y'(a)=1$. Теорема доказана.

Наконец, укажем без доказательства очень важное свойство собственных функций задачи Штурма - Лиувилля, вытекающее, по сути дела, из теоремы Гильберта - Шмидта.

ТЕОРЕМА (Стеклова). Если $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема, причем $f(a)+Af'(a)=0$ и $f(b)+Bf'(b)=0$, то f разлагается в абсолютно и равномерно на $[a,b]$ сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$$

по ортонормированным собственным функциям $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ задачи Штурма – Лиувилля:

$$Ly = \lambda p y,$$

$$y(a) + Ay'(a) = 0, \quad y(b) + By'(b) = 0.$$

При этом коэффициент f_n находится по формуле

$$f_n = \int_a^b f(x)\, p(x)\, y_n(x)\, dx.$$

Задачи

50. Найти функцию Грина оператора $Ly = d^2y/dx^2$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

51. Найти функцию Грина для оператора $Ly = d^2y/dx^2 + y$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

52. Преобразовать дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - k^2 y(x) - V_0 \frac{e^{-x}}{x} y(x) = 0,$$

решение которого удовлетворяет граничным условиям $y(0) = y(\infty) = 0$, в интегральное уравнение Фредгольма

$$y(x) = \mu \int_0^{+\infty} G(x,t) \frac{e^{-t}}{t} y(t)\, dt.$$

Величины V_0 и k^2 постоянны. Отметим, что исходное дифференциальное уравнение получается из уравнения Шредингера с с мезонным потенциалом.

53. Исходя из разложения функции Грина по собственным функциям, показать, что

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi t\cdot\sin n\pi s}{n^2}=\begin{cases} s(1-t) & \text{, если } s<t;\\ t(1-s) & \text{, если } s>t.\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t\cdot\sin(n+\frac{1}{2})\pi s}{(n+\frac{1}{2})^2}=\begin{cases} s & \text{, если } s<t;\\ t & \text{, если } s>t.\end{cases}$$

§ 10. Интегральные уравнения Вольтерра: теорема о существовании и единственности решения

В самом начале нашего изложения, в § 1, было отмечено, что решения уравнения Вольтерра обладают рядом специальных свойств, которых, вообще говоря, нет у решений уравнений Фредгольма. Чтобы обосновать это утверждение, приведём в настоящем параграфе следующую теорему, которую надо рассматривать как "противовес" альтернативе Фредгольма для уравнений Фредгольма, рассмотренной в § 4.

ТЕОРЕМА (о существовании и единственности решения уравнения Вольтерра). Если $K\in L_2([a,b]\times[a,b])$, то при любом μ и любой функции $f\in L_2[a,b]$ уравнение Вольтерра второго рода

$$x(t)=\mu\int_a^t K(t,s)x(s)ds+f(t),\quad t\in[a,b],$$

имеет и притом единственное решение $x\in L_2[a,b]$, которое может быть найдено с помощью метода последовательных приближений.

Доказательство мы проведем лишь в случае, когда ядро K ограничено. Доказательство общего случая базируется на той же идее, но технически реализуется заметно сложнее. Заинтересованные читатели найдут его, например, в книге Ф.Трикоми "Интегральные уравнения".

Итак, предположим, что $|K(t,s)| \le M$ для всех $t,s \in [a,b]$ и обозначим через A соответствующий оператор Вольтерра. Воспользовавшись неравенством Коши - Буняковского

$$\left[\int_a^b F_1(t)\cdot F_2(t)\,dt\right]^2 \le \int_a^b F_1^2(t)\,dt\cdot\int_a^b F_2^2(t)\,dt,$$

для $x \in L_2[a,b]$ получим:

$$\left[(Ax)(t)\right]^2 = \left[\int_a^t K(t,s)x(s)\,ds\right]^2 \le$$

$$\le \int_a^t K^2(t,s)\,ds\cdot\int_a^t x^2(s)\,ds \le (t-a)M^2\int_a^b x^2(s)\,ds =$$

$$= (t-a)M^2\|x\|^2.$$

Опираясь на последнее неравенство, с помощью того же приёма найдем:

$$\left[(A^2x)(t)\right]^2 = \left[\int_a^t K(t,s)(Ax)(s)\,ds\right]^2 \le$$

$$\le \int_a^t K^2(t,s)\,ds\cdot\int_a^t\left[(Ax)(s)\right]^2 ds \le$$

$$\le (t-a)M^2\int_a^t (s-a)M^2\|x\|^2\,ds = \frac{(t-a)^3}{2}M^4\|x\|^2.$$

Применяя метод математической индукции, допустим, что для некоторого n выполнено неравенство

$$\left[(A^nx)(t)\right]^2 \le \frac{(t-a)^{2n+1}}{(2n)!!}M^{2n}\|x\|^2 \qquad (20)$$

и докажем, что оно верно для $n+1$. В самом деле,

$$\left[(A^{n+1}x)(t)\right]^2 = \left[\int_a^t K(t,s)\cdot(A^n x)(s)\,ds\right]^2 \leq$$

$$\leq \int_a^t K^2(t,s)\,ds \cdot \int_a^t \left[(A^n x)(s)\right]^2 ds \leq (t-a)M^2 \cdot$$

$$\cdot \int_a^t \frac{(s-a)^{2n+1}}{(2n)!!} M^{2n} \|x\|^2 ds = \frac{(t-a)^{2n+3}}{(2n)!!(2n+2)} M^{2n+2} \|x\|^2.$$

Значит, неравенство (20) выполнено для любого n. Поэтому для любого n имеем

$$\|A^n x\|^2 = \int_a^b \left[(A^n x)(t)\right]^2 dt \leq \frac{M^{2n}\|x\|^2}{(2n+2)!!}(b-a)^{2n+2}.$$

Отсюда вытекает следующая оценка для нормы оператора $\mu^n A^n$:

$$\|\mu^n A^n\| = \sup_{x \in L_2[a,b]} \frac{\|\mu^n A^n x\|}{\|x\|} \leq |\mu|^n \frac{M^n (b-a)^{n+1}}{\sqrt{(2n+2)!!}} =$$

$$= \left[\frac{|\mu| M (b-a)}{\sqrt{2}}\right]^n \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}.$$

Поскольку для любого $\alpha > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0,$$

то при любых значениях параметров μ, M, a и b найдется такое число n, что последнее выражение будет меньше единицы. Но тогда для этого номера n будем иметь

$$\|\mu^n A^n\| < 1.$$

Следовательно, по теореме Фон Неймана, цитированной в § 5, оператор $I - \mu A$ обратим. Но это и означает, что исходное уравнение Вольтерра, переписанное в операторной форме $x = \mu A x + f$ или $(I - \mu A)x = f$, имеет и ровно одно решение, задаваемое равенством $x = (I - \mu A)^{-1} f = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f$. Теорема доказана.

Задачи

Используя метод последовательных приближений, решить уравнения:

54. $x(t) = \mu \int_0^t s\, x(s)\, ds + 1$.

55. $x(t) = \mu \int_0^t (s - t)\, x(s)\, ds + t$.

56. Решить уравнение

$$x(t) = \int_0^t (t - s)\, x(s)\, ds + t^2$$

следующими тремя различными способами: а) сведением к дифференциальному уравнению; б) методом последовательных приближений; в) найти резольвенту и, таким образом, решить уравнение.

Используя преобразование Лапласа, решить интегральные уравнения Вольтерра:

57. $x(t) - 2 \int_0^t \cos(t - s)\, x(s)\, ds = e^t, \; t > 0$

58. $x(t) - \int_0^t e^{-2(t-s)}\, x(s)\, ds = 1 + t, \; t > 0$.

59. $\int_0^t e^{t-s}\, x(s)\, ds = t$.

Оглавление