НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1996

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

В. А. Александров

ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Методическое пособие

Новосибирск
1996

Излагается одна из пятнадцати тем, читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета для студентов второго года обучения в рамках обязательного курса “Основы функционального анализа и теории функций”. Теоретический материал дополняют задачи, подобранные с учётом особенностей данного курса и рекомендуемые для решения на практических занятиях.

Предназначается для студентов и преподавателей физического факультета НГУ.

Электронный вариант данного пособия доступен в системе World Wide Web на сервере Новосибирского государственного университета (http://www.nsu.ru).

Подготовлено с использованием макропакета $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX, разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX, the American Mathematical Society's TEX macro system.

Подписано в печать	20 июня 1996 г.	Формат 60×84, 1/16
Офсетная печать		Уч.-изд. л. 4,5
Тираж 300 экз.	Заказ № 273.	Цена 3000 р.

Редакционно-издательский отдел Новосибирского университета; участок оперативной полиграфии НГУ; 630090, Новосибирск 90, ул. Пирогова, 2.

Предисловие

Вы держите в руках переработанный конспект лекций одной из пятнадцати тем, читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета в рамках курса "Основы функционального анализа и теории функций". Теме "Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах" отводится приблизительно 6 лекций и 5 практических занятий. Она является последней темой, излагаемой в третьем семестре и служит непосредственным продолжением темы "Геометрия пространств со скалярным произведением", с изложением которой можно познакомиться, например, по книжке

В. А. Александров. Геометрия пространств со скалярным произведением: Метод. указания. НГУ, 1995. 48 с.

Многие факты, излагаемые в настоящем пособии, справедливы не только для ограниченных операторов, действующих из одного гильбертова пространства в другое. Бо́льшая часть излагаемых фактов остётся верной и для линейных отображений нормированных пространств, от которых порой не нужно требовать даже полноты. Однако, когда излагаемая здесь теория применяется к физическим задачам, то почти всегда речь идёт об операторах, действующих из одного гильбертова пространства в другое. Поэтому, сознательно пренебрегая общностью формулировок ради простоты изложения, мы будем рассматривать именно такой случай.

Всюду ниже мы подразумеваем, что символами H, H_1 и H_2 обозначены произвольные гильбертовы пространства, т.е. линейные пространства со скалярным произведением, полные относительно нормы, задаваемой с помощью формулы $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Коротко прокомментируем книги, использованные при написании настоящего пособия и рекомендуемые для более глубокого ознакомления с предметом.

Наше изложение наиболее близко к принятому в следующем учебнике, давно ставшем классическим:

1. А. Н. Колмогоров. С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. — Изд. 6-е, испр. — М.: Наука, 1989.

Следующий прекрасный современный учебник, охватывает многие разделы данного пособия. Изложение очень сжатое. Требует более высокого уровня абстракции, чем принят в настоящем курсе. Может использоваться как задачник.

2. А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1988.

Изложение, ориентированное на физиков, и снабжённое физическими примерами, читатель найдёт в книгах:

3. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ / Пер. с англ. — М.: Мир, 1978.

4. Р. Рихтмайер. Принципы современной математической физики / Пер. с англ. — М.: Мир, 1982.

Следующая книга, написанная для студентов, обучающихся по специальности "Прикладная математика", содержит изложение как основ функционального анализа, так и тех его разделов, которые непосредственно примыкают к прикладным исследованиям. Содержит задачи для самостоятельного решения.

5. В. А. Треногин. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.

Может быть полезен также следующий переводной аналог предыдущей книги

6. В. Хатсон, Дж. Пим. Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983.

Наконец, при написании § 11, посвящённого бра- и кет-векторам, автор существенно использовал книгу

7. L. M. Jones. An Introduction to Mathematical Methods of Physics. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. London, 1979.

§ 1. Линейные операторы и их общие свойства

Линейным оператором, действующим из гильбертова пространства H в гильбертово пространство H_1, называется отображение $A : H \to H_1$, удовлетворяющее условию

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

для любых чисел α и β и любых векторов x и y пространства H.

Отметим, что если аргумент линейного оператора обозначен одной буквой, то его не заключают в скобки, т. е. вместо $A(x)$ пишут Ax.

Поскольку нелинейных операторов мы рассматривать не будем, то порой для краткости линейный оператор будем называть просто оператором.

Примеры линейных операторов.

1) Определим оператор $I : H \to H$ с помощью формулы $Ix = x$ для всех $x \in H$. Другими словами, оператор I переводит каждый вектор пространства H в себя. Его линейность очевидна:

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha Ix + \beta Iy.$$

Оператор I называется *единичным* или *тождественным*.

2) Зададим оператор $0 : H \to H_1$ формулой $0x = 0 \in H_1$ для всех $x \in H$. Словами можно сказать, что оператор 0 переводит каждый вектор пространства H в нулевой вектор пространства H_1. Его линейность вытекает из следующих очевидных равенств:

$$0(\alpha x + \beta y) = 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \alpha 0x + \beta 0y.$$

Оператор 0 называется *нулевым* оператором. [Предостережение. Обратите внимание, что символ 0 теперь у нас может означать либо число нуль, либо нулевой вектор пространства H, либо нулевой вектор пространства H_1, либо нулевой оператор, действующий из H в H_1.]

3) Пусть H и H_1 — конечномерные гильбертовы пространства и $A : H \to H_1$ — линейный оператор.

Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ некоторый базис в H и через $y_1, \ldots, y_m$ — некоторый базис в H_1. Разложив произвольный вектор $x \in H$ по базису $x_1, \ldots, x_n$

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$$

и воспользовавшись линейностью оператора A, получим

$$Ax = A\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A x_j.$$

Далее, каждый из векторов Ax_j лежит в пространстве H_1 и поэтому может быть разложен по базису $y_1, \ldots, y_m$:

$$Ax_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k.$$

Значит,

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A x_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Big(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j\Big) y_k. \qquad (1)$$

Совокупность чисел a_{kj} $(k = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ называется *матрицей* оператора A.

Предыдущие рассуждения показывают, что если базисы пространств H и H_1 фиксированы, то каждому оператору $A : H \to H_1$ соответствует некоторая матрица a_{kj}. Вместе с тем из формулы (1) немедленно вытекает, что если в пространствах H и H_1 фиксированы базисы, то каждой $m \times n$ матрице a_{kj} $(k = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ соответствует некоторый линейный оператор A. Таким образом, мы заново обсудили уже известный вам из линейной алгебры факт, что операторы и матрицы находятся во взаимнооднозначном соответствии.

Наконец, перепишем формулу (1) в более привычном "матричном" виде. Для этого обозначим вектор Ax пространства H_1 через y и разложим его по базису $y_1, \ldots, y_m$:

$$Ax = y = \sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k.$$

Сравнивая это выражение с формулой (1), получаем

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\lambda_j\Big) y_k.$$

Поскольку векторы $y_1, \ldots, y_m$ линейно независимы, то коэффициенты при векторе y_k в левой и правой частях последней формулы должны совпадать, т. е.

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\lambda_j, \quad k = 1, \ldots, m;$$

или

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

где в правой части подразумевается "обычное" матричное умножение.

4) Если H — гильбертово пространство и S — его замкнутое подпространство, то, как известно, H представляет собой прямую сумму S и его ортогонального дополнения $S^\perp$, т. е. всякий вектор $x \in H$ может быть представлен, и притом — единственным образом, в виде

$$x = y + z,$$

где $y \in S$, $z \in S^\perp$. Определим оператор $P : H \to H$ с помощью формулы $Px = y$. Он линеен (см. задачу 1) и называется *оператором ортогонального проектирования* пространства H на подпространство S.

5) В гильбертовом пространстве $L_2([a,b])$ определим оператор, сопоставляющий функции $f \in L_2([a,b])$ новую функцию Af, определённую с помощью формулы

$$(Af)(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)\,ds.$$

где $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ — некоторая фиксированная непрерывная функция двух переменных. Оператор A называется *интегральным*, его линейность очевидно вытекает из линейности интеграла. Мы исследуем его более подробно, когда будем изучать интегральные уравнения.

Общие свойства линейных операторов.

1) Если $A : H \to H_1$ и $B : H \to H_1$ — линейные операторы, то для любых чисел α и β отображение $\alpha A + \beta B : H \to H_1$, заданное формулой

$$(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx, \tag{2}$$

является линейным оператором.

Если $\beta = 0$, то формула (2) определяет операцию умножения оператора A на число α, а если $\alpha = \beta = 1$, то — операцию сложения операторов A и B. Легко видеть, что эти операции превращают множество всех линейных операторов, действующих из H в H_1, в линейное пространство (см. задачу 2) При этом нулевым "вектором" будет нулевой оператор, а "вектором", противоположным "вектору" A,будет оператор $-A$.

2) Если $A : H \to H_1$ и $B : H_1 \to H_2$ — линейные операторы, то отображение BA, действующее из H в H_2, и заданное с помощью формулы

$$(BA)x = B(Ax),$$

является линейным оператором и называется *произведением* операторов A и B.

Задачи

1. Докажите, что оператор ортогонального проектирования линеен.

2. Докажите, что операции умножения оператора на число и сложения операторов, определённые формулой (2), превращают множество всех линейных операторов, действующих из H в H_1, в линейное пространство.

3. Убедитесь, что операция произведения операторов некоммутативна, т. е. что, вообще говоря, $AB \neq BA$. [По этой причине имеет смысл сопоставлять паре операторов $A : H \to H$ и $B : H \to H$ новый оператор $[A, B] = AB - BA$, называемый их *коммутатором*.]

4. Проверьте, что для любых линейных операторов A, B и C, переводящих гильбертово пространство H в себя, справедливо *тождество Якоби*

$$[A,[B,C]] = [B,[A,C]] - [C,[A,B]].$$

Оно встречается в теории элементарных частиц.

5. Пусть A и B — симметрии плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно прямых l_1 и l_2 соответственно. Выясните, для каких прямых операторы A и B коммутируют, т. е. когда $[A, B] = 0$.

6. Пусть A и B — симметрии пространства $\mathbb{R}^3$ относительно точек x и y соответственно. Найдите AB.

§ 2. Непрерывные и ограниченные операторы

Оператор $A : H \to H_1$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in H$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in H$, удовлетворяющих неравенству $\|x - x_0\| < \delta$, выполняется неравенство $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$.

Другими словами это же определение можно выразить так: оператор $A : H \to H_1$ непрерывен в точке x_0, если из $x_n \to x_0$ вытекает, что $Ax_n \to Ax_0$ при $n \to \infty$.

Оператор $A : H \to H_1$ называется *непрерывным*, если он непрерывен в каждой точке пространства H.

Напомним, что множество $X \subset H$ называется *ограниченным*, если оно содержится в шаре конечного радиуса, т. е. если существует положительное число R такое, что для всех $x \in X$ справедливо неравенство $\|x\| < R$.

Оператор $A : H \to H_1$ называется *ограниченным*, если он отображает всякое ограниченное в H множество во множество, ограниченное в пространстве H_1.

Теорема. *Если $A : H \to H_1$ — линейный оператор, то следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует точка $x_0 \in H$, в которой оператор A непрерывен;*

2) *оператор A непрерывен;*

3) *оператор A ограничен;*

4) *величина $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$ конечна.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Допустим, что A непрерывен в точке $x_0 \in H$ и, выбрав любой вектор $x_1 \in H$, убедимся, что A непрерывен в точке x_1.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку A непрерывен в точке x_0, то найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in H$, удовлетворяющих неравенству $\|x - x_0\| < \delta$, выполняется неравенство $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$. Тогда для всех $y \in H$, удовлетворяющих неравенству $\|y - x_1\| < \delta$, мы имеем $\|(y - x_0 + x_1) - x_0\| < \delta$, а значит $\|A(y - x_0 + x_1) - Ax_0\| < \varepsilon$. Воспользовавшись линейностью A, можем переписать последнее неравенство в виде

$$\|A(y - x_0 + x_1) - Ax_0\| = \|Ay - Ax_0 + Ax_1 - Ax_0\| = \|Ay - Ax_1\| < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|y - x_1\| < \delta$ вытекает $\|Ay - Ax_1\| < \varepsilon$. Значит A непрерывен в точке x_1, а поскольку x_1 — произвольно, то A — непрерывен.

2) $\Rightarrow$ 3). Поскольку A непрерывен, то он непрерывен в нуле, а значит найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in H$, удовлетворяющих неравенству $\|x\| < \delta$, справедливо неравенство $\|Ax\| < 1$. Пусть теперь X — ограниченное множество в H, т. е. такое множество, что существует положительное число $0 < R < +\infty$ такое, что для любого вектора $x \in H$ выполняется неравенство $\|x\| < R$. Поскольку образ AX множества X под действием оператора A состоит из векторов $y \in H_1$ таких, что существует $x \in H$, для которого выполняется равенство $y = Ax$, то для любого $y \in AX$ имеем

$$\|y\| = \|Ax\| = \left\|\frac{R}{\delta} A\left(\frac{\delta}{R}x\right)\right\| = \frac{R}{\delta}\left\|A\left(\frac{\delta}{R}x\right)\right\| \leq \frac{R}{\delta},$$

поскольку

$$\left\|\frac{\delta}{R}x\right\| < \frac{\delta}{R}R = \delta.$$

Значит, множество AX содержится в шаре радиуса R/δ с центром в нуле пространства H_1 и поэтому ограничено.

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть оператор A ограничен. Поскольку единичный шар $\|x\| \leq 1$ пространства H ограничен, то его образ под действием оператора A также ограничен, а значит — содержится в шаре некоторого конечного радиуса R. Поэтому для

любого $x \in H$, удовлетворяющего неравенству $\|x\| \le 1$, имеем $\|Ax\| \le R$. Следовательно,

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \le R < +\infty.$$

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \le R < +\infty.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon/R$. Тогда для любого $x \in H$, удовлетворяющего неравенству $\|x\| < \delta$, получаем

$$\|Ax\| = \begin{cases} \|0\| = 0 < \varepsilon, & \text{если } x = 0; \\ \|x\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \le \delta \cdot \sup\limits_{\|y\|\le 1} \|Ay\| = \frac{\varepsilon}{R} \cdot R = \varepsilon, & \text{если } x \ne 0. \end{cases}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|x\| < \delta$ следует неравенство $\|Ax\| \le \varepsilon$. Значит оператор A непрерывен в точке 0.

Задача

7. Докажите, что линейная комбинация $\alpha A + \beta B$ и произведение BA непрерывных операторов являются непрерывными операторами.

§ 3. Норма оператора

Из теоремы, доказанной в предыдущем параграфе, следует, что величина $\sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$ тесно связана с непрерывностью оператора A и поэтому заслуживает более пристального изучения.

Лемма. *Для любого линейного оператора A справедливы равенства*

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Доказательство. Введём обозначения

$$\alpha = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|; \quad \beta = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad \text{и} \quad \gamma = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

и последовательно докажем цепочку неравенств $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq \alpha$. Отметим только, что каждая из величин α, β и γ может равняться не только неотрицательному вещественному числу, но и плюс бесконечности.

$\alpha \geq \beta$. Это неравенство очевидно, поскольку в обеих частях неравенства супремум берётся от одной и той же величины $\|Ax\|$, но при вычислении α множество допустимых значений x шире.

$\beta \geq \gamma$. Чтобы убедиться в справедливости этого неравенства, заметим, что для любого $x \neq 0$ мы имеем

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|Ax\| = \beta,$$

а значит, и супремум выражения $\|Ax\|/\|x\|$, вычисленный по всем $x \neq 0$, не превосходит β, т. е. справедливо неравенство $\gamma \leq \beta$, что и требовалось доказать.

$\gamma \geq \alpha$. Чтобы проверить это неравенство, заметим, что для любого $x \neq 0$ и такого, что $\|x\| \leq 1$, имеем

$$\|Ax\| \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \gamma.$$

Если же $x = 0$, то $\|Ax\| = \|0\| = 0 \leq \gamma$. Поэтому $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \gamma$, что и требовалось доказать.

Общее значение выражений

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{3}$$

называется *нормой* оператора A и обозначается через $\|A\|$. Такое название объясняется тем, что, как показывает следующая теорема, величина $\|A\|$ действительно обладает свойствами нормы: она неотрицательна, положительно однородна и для неё справедливо неравенство треугольника.

Теорема. *Если A и B — линейные операторы, а λ — число, то имеют место соотношения*

1) $\|A\| \geq 0$, *причём* $\|A\| = 0$ *если и только если* $A = 0$;

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$;

3) $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$;

4) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ *для всех* x;

5) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$;

6) $|\|A\|-\|B\|| \leq \|A-B\|$.

Доказательство. 1) Неравенство

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \geq 0$$

очевидно, поскольку $\|Ax\| \geq 0$ для любого x ввиду известного свойства неотрицательности нормы вектора Ax. Если $A=0$, то для любого x имеем $Ax=0$, а значит — $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = 0$. И наоборот, если $\|A\|=0$, то из равенства

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

заключаем, что $\|Ax\|=0$ для всех $x \neq 0$. Из соответствующего свойства нормы вектора Ax выводим, что $Ax=0$ для всех $x \neq 0$. Поскольку для $x=0$ равенство $Ax=0$ очевидно вытекает из линейности A, то получаем, что $Ax=0$ для всех x, т. е. — что A — нулевой оператор.

2) Поскольку для любого вектора Ax имеет место равенство $\|\lambda Ax\| = |\lambda| \cdot \|Ax\|$, то для любого $\|x\| \leq 1$ имеем

$$\|\lambda Ax\| = |\lambda| \cdot \|Ax\| \leq |\lambda| \sup_{\|y\|\leq 1} \|Ay\| = |\lambda| \cdot \|A\|,$$

а значит —

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\lambda Ax\| \leq |\lambda| \cdot \|A\|.$$

Аналогично, для любого $\|x\| \leq 1$ имеем

$$|\lambda| \cdot \|Ax\| = \|\lambda Ax\| \leq \sup_{\|y\|\leq 1} \|\lambda Ay\| = \|\lambda A\|,$$

и, следовательно,

$$|\lambda| \cdot \|A\| = |\lambda| \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \|\lambda A\|.$$

3) Для всякого $\|x\| \le 1$ на основании неравенства треугольника для векторов Ax и Bx имеем

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le$$
$$\le \sup_{\|y\|\le 1} \|Ay\| + \sup_{\|y\|\le 1} \|By\| = \|A\| + \|B\|.$$

Значит,

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|(A+B)x\| \le \|A\| + \|B\|.$$

4) Для $x \ne 0$ доказываемое неравенство непосредственно вытекает из соотношения

$$\|A\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Для $x = 0$ обе части доказываемого неравенства, очевидно, обращаются в нуль, так что само неравенство превращается в равенство.

5) Дважды применяя свойство 4), получим, что для всякого $\|x\| \le 1$ справедливы неравенства

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\| \cdot \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$$

Значит,

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|(AB)x\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$$

что и требовалось доказать.

6) "Раскрывая" модуль числа $\|A\| - \|B\|$, видим, что нам предстоит доказать соотношение $-\|A-B\| \le \|A\| - \|B\| \le \|A-B\|$, левое неравенство в котором может быть переписано в виде $\|B\| \le \|A\| + \|A-B\|$ и поэтому непосредственно вытекает из неравенства треугольника:

$$\|B\| = \|A + (B-A)\| \le \|A\| + \|B-A\| = \|A\| + \|A-B\|.$$

Аналогично, правое неравенство, переписанное в виде $\|A\| \le \|B\| + \|A-B\|$, также следует из неравенства треугольника:

$$\|A\| = \|B + (A-B)\| \le \|B\| + \|A-B\|.$$

Пример оценивания нормы оператора. Пусть H и H_1 — конечномерные гильбертовы пространства и $A : H \to H_1$ —

линейный оператор. Введём в рассмотрение ортонормированный базис $x_1, \ldots, x_n$ пространства H и ортонормированный базис $y_1, \ldots, y_m$ пространства H_1. Воспользовавшись примером 3) из § 1, для произвольного $x \in H$ запишем

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j;$$

$$Ax = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j \Big) y_k,$$

где a_{kj} $(k = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ — матрица оператора A. Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \cdot |\lambda_j| \Big) \|y_k\|.$$

Поскольку базис $y_1, \ldots, y_m$ предположен ортонормированным, то для каждого $k = 1, \ldots, m$ имеем $\|y_k\| = 1$. С другой стороны, на основании неравенства Бесселя для каждого $j = 1, \ldots, n$ получаем

$$|\lambda_j| \leq \sqrt{\sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|^2} \leq \|x\| = 1.$$

Поэтому окончательно находим

$$\|A\| \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| < +\infty,$$

т. е. норма оператора A не превосходит суммы модулей всех коэффициентов его матрицы.

Из последнего примера вытекает, что всякий линейный оператор, действующий из одного конечномерного гильбертова пространства в другое, непрерывен.

Задачи

8. Докажите, что в пространстве вещественных 2×2 матриц нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой матрицы, задаваемой равенствами (3).

9. Пусть $\mathcal{L}(H, H_1)$ — линейное пространство всех непрерывных операторов, отображающих гильбертово пространство H в гильбертово пространство H_1. Опираясь на предыдущую задачу, докажите, что в $\mathcal{L}(H, H_1)$ можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой оператора, задаваемой равенствами (3), если и только если $\dim H = 1$ или $\dim H_1 = 1$.

10. Проверьте линейность и найдите норму оператора $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, определённого формулой $(Ax)(t) = x(t + t_0)$, где x — произвольная функция из $L_2(\mathbb{R})$, а t_0 — фиксированное число.

В задачах 11–14 проверьте линейность и найдите норму следующих операторов $A : l_2 \to l_2$, если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ обозначает произвольный вектор пространства l_2.

11. $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

12. $Ax = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$.

13. $Ax = (x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$.

14. $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — фиксированная ограниченная последовательность чисел.

В задачах 15–19 проверьте линейность и найдите норму следующих операторов $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если x обозначает произвольную функцию из $L_2[0,1]$.

15. $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$.

16. $(Ax)(t) = x(t^2)$.

17. $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{(t-s)} x(s)\,ds$.

18. $(Ax)(t) = t^\alpha \int\limits_0^1 x(s)\,ds$, где α — фиксированное число.

19. $(Ax)(t) = a(t)x(t)$, где $a : [0,1] \to \mathbb{C}$ — фиксированная непрерывная функция.

20. Докажите, что ограниченный оператор переводит сходящуюся последовательность в сходящуюся.

21. Докажите, что норму линейного оператора $A : H \to H_1$ можно выразить через скалярное произведение с помощью

формул

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in H, x\neq 0\\ y\in H_1, y\neq 0}} \frac{|(Ax,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|} = \sup_{\substack{x\in H, x\neq 0\\ y\in H_1, y\neq 0}} \frac{\mathrm{Re}(Ax,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}.$$

§ 4. Сходимость операторов

Говорят, что последовательность линейных операторов $A_n : H \to H_1$ *сходится* к линейному оператору $A : H \to H_1$, если числовая последовательность $\|A - A_n\|$ стремится к нулю, когда $n \to \infty$. В этом случае пишут $A_n \to A$ при $n \to \infty$ или $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Обсудим простейшие свойства сходящихся последовательностей линейных операторов.

1). Если $A_n \to A$ и $B_n \to B$ при $n \to \infty$, то для любых чисел α и β имеем $\alpha A_n + \beta B_n \to \alpha A + \beta B$.

Доказательство. $\|(\alpha A + \beta B) - (\alpha A_n + \beta B_n)\| = \|\alpha(A - A_n) + \beta(B - B_n)\| \le |\alpha| \cdot \|A - A_n\| + |\beta| \cdot \|B - B_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

2). Если $A_n \to A$ при $n \to \infty$ и каждый из операторов A_n ограничен, то оператор A также ограничен и числовая последовательность $\|A_n\|$ сходится к числу $\|A\|$.

Доказательство. Выберем номер n_0 так, чтобы $\|A - A_{n_0}\| \le 1$. Тогда $\|A\| = \|A - A_{n_0} + A_{n_0}\| \le \|A - A_{n_0}\| + \|A_{n_0}\| \le 1 + \|A_{n_0}\| < +\infty$, а значит, A ограничен. Далее, на основании утверждения 6) теоремы предыдущего параграфа, мы имеем $\big|\|A\| - \|A_{n_0}\|\big| \le \|A - A_{n_0}\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Обратим внимание, что общее определение фундаментальной последовательности векторов нормированного пространства применительно к операторам выглядит так: последовательность операторов $A_n : H \to H_1$ называется *фундаментальной*, если для любого положительного ε найдётся номер $n(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров m и n, бо́льших $n(\varepsilon)$, выполняется неравенство $\|A_m - A_n\| < \varepsilon$.

Как известно, всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Обратное не всегда верно, поэтому нормированное пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится, мы договаривались называть полным.

Следующая теорема утверждает, что пространство непрерывных линейных операторов, отображающих гильбертово пространство в гильбертово, автоматически будет полным.

Теорема. *Если H и H_1 — гильбертовы пространства, то всякая фундаментальная последовательность линейных непрерывных операторов $A_n : H \to H_1$ сходится.*

Доказательство. Поскольку последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ фундаментальна, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $n(\varepsilon)$ так, что для всех $m, n \geq n(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\|A_m - A_n\| < \varepsilon$. Последнее означает, что для всех $x \in H$ имеем

$$\|A_m x - A_n x\| \leq \varepsilon \|x\|. \tag{4}$$

Из (4) следует, что последовательность $A_1 x, A_2 x, \ldots, A_n x, \ldots$ векторов пространства H_1 фундаментальна. Значит, ввиду полноты H_1, эта последовательность сходится к некоторому вектору из H_1, который мы обозначим через Ax: $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ для каждого $x \in H$.

Тем самым мы построили некоторое отображение $A : H \to H_1$, сопоставляющее вектору x пространства H вектор Ax пространства H_1. Убедимся, что A — линейный оператор и $A_n \to A$ при $n \to \infty$.

В самом деле, используя линейность A_n и свойства сходящихся последовательностей векторов пространства H_1, для любых чисел α, β и любых векторов x, y пространства H будем иметь

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} [\alpha A_n x + \beta A_n y] =$$
$$= \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim_{n\to\infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay,$$

что и доказывает линейность оператора A.

Далее, в неравенстве (4) перейдём к пределу при $m \to \infty$, когда n фиксировано. Получим, что для всех $x \in H$ выполнено неравенство $\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon\|x\|$, а значит — $\|A - A_n\| \leq \varepsilon$. В силу произвольности ε это означает, что $A_n \to A$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Изучая числовые последовательности и ряды, вы имели возможность убедиться, что всякое утверждение о сходимости числовой последовательности может быть переформулировано в виде некоторого утверждения о сходимости числового ряда и наоборот. Таким образом, вы видели, что язык числовых последовательностей и язык числовых рядов — это по сути дела одно и то же. Но последний имеет свои преимущества, поскольку позволяет формулировать так называемые признаки сходимости числовых рядов. (Вспомните, например, признаки Даламбера, Коши, Раабе или интегральный признак.) Всё сказанное в равно мере относится и к операторным последовательностям и рядам.

Приступим к рассмотрению первоначальных сведений о рядах операторов.

Пусть для каждого натурального n оператор $A_n : H \to H_1$ линеен и непрерывен. *Операторным рядом* называется формальное выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{5}$$

При этом *частичной суммой* ряда (5) называется конечная сумма

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} A_n,$$

а ряд (5) называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм. Сам же предел последовательности частичных сумм называется *суммой* исходного ряда и обозначается через

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{N\to\infty} S_N.$$

Приведём простейшие свойства сходящихся операторных рядов.

1) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n = B$, то для любых чисел α и β ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n)$ сходится и имеет в качестве суммы оператор $\alpha A + \beta B$.

Доказательство. Используя определение суммы ряда и свойство 1) сходящихся последовательностей линейных операторов, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha A_n + \beta B_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(\alpha A_n + \beta B_n) =$$

$$= \alpha \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\alpha A_n + \beta \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\beta B_n = \alpha A + \beta B.$$

2) Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|A_n\|$ сходится, то операторный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ также сходится и

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty}\|A_n\|. \tag{6}$$

Доказательство. Применяя критерий Коши к сходящемуся числовому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|A_n\|.$$

заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $n(\varepsilon)$. что для всех $m \ge n(\varepsilon)$ и всех $p > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=m}^{m+p}\|A_n\| < \varepsilon.$$

Но тогда для последовательности

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} A_n$$

частичных сумм операторного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ мы имеем

$$\|S_{m+p} - S_m\| = \|\sum_{n=m+1}^{m+p} A_n\| \le \sum_{n=m+1}^{m+p}\|A_n\| < \varepsilon$$

для всех $m \geq n(\varepsilon)$ и всех $p > 0$. Таким образом, последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_N, \ldots$ фундаментальна, а значит, — на основании теоремы из настоящего параграфа — сходится. Тем самым сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ доказана.

Неравенство (6) немедленно вытекает из свойства 2) сходящихся последовательностей операторов и неравенства треугольника:

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big\| = \Big\|\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} A_n\Big\| \leq \lim_{N\to\infty}\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n\Big\| \leq$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \|A_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|.$$

§ 5. Обратимость операторов. Обратный оператор

Линейный оператор $A : H \to H_1$ называется *обратимым*, если для любого $y \in H_1$ уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения.

Совокупность всех векторов $y \in H_1$, для каждого из которых существует вектор $x \in H$ такой, что $y = Ax$, называется *образом оператора* A и обозначается $\operatorname{im} A$.

Ясно, что образ оператора есть линейное пространство в H_1. В самом деле, пусть $y_1 \in \operatorname{im} A$ и $y_2 \in \operatorname{im} A$. Тогда найдутся векторы $x_1 \in H$ и $x_2 \in H$ такие, что $Ax_1 = y_1$ и $Ax_2 = y_1$. Поэтому для любых чисел α_1 и α_2 будем иметь $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, а значит вектор $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ лежит в $\operatorname{im} A$.

Если оператор A обратим, то каждому вектору $y \in \operatorname{im} A$ можно поставить в соответствие единственный вектор $x \in H$, являющийся решением уравнения $Ax = y$. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется *обратным* к A и обозначается A^{-1}.

Подчеркнем, что обратный оператор A^{-1} определён, вообще говоря, не во всём пространстве H_1 а лишь на некотором его подпространстве $\operatorname{im} A$. Для симметрии было бы логично и первоначальный оператор A считать определённым не обязательно во всем H, а лишь на некотором его подпространстве. Но сейчас мы этого делать не будем.

Совокупность всех вектором $x \in H$, на которых оператор A определён, называется *областью определения* оператора A и обозначается $\mathrm{dom}\, A$.

Перейдём к рассмотрению наиболее важных свойств обратного оператора.

1) $\mathrm{dom}\, A^{-1} = \mathrm{im}\, A$, $\mathrm{im}\, A^{-1} = \mathrm{dom}\, A$.

Доказательство немедленно вытекает из определений области определения и образа оператора.

2) Если оператор $A : H \to H_1$ линеен и обратим, то A^{-1} тоже линеен.

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in \mathrm{dom}\, A^{-1}$. Поскольку $\mathrm{dom}\, A^{-1} = \mathrm{im}\, A$, то найдутся векторы $x_1, x_2 \in H$ такие, что $Ax_1 = y_1$ и $Ax_2 = y_2$, или, что тоже самое, $x_1 = A^{-1}y_1$ и $x_2 = A^{-1}y_2$. Тогда для любых чисел α_1 и α_2 будем иметь

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

или

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2),$$

что и доказывает линейность оператора A^{-1}.

3) Если каждый из операторов $A : H \to H_1$ и $B : H_1 \to H_2$ обратим, то оператор BA обратим и $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Доказательство. Фиксируем $z \in H_2$ и рассмотрим уравнение $(BA)x = z$ относительно вектора $x \in H$. Это уравнение можно переписать в виде

$$B(Ax) = z. \tag{7}$$

Оператор B предположен обратимым, а значит уравнение $By = z$ имеет не более одного решения $y \in H_1$ для любого z, причём это решение может быть записано в виде $y = B^{-1}z$. Значит, уравнение (7) может иметь не более одного вектора-решения Ax, который, к тому же, задаётся равенством

$$Ax = B^{-1}z. \tag{8}$$

Но оператор A также предположен обратимым, а значит, уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения $x \in H$ для любого $y \in H_1$, в том числе — и для $y = B^{-1}z$. Более того, это единственное решение может записано в виде $x = A^{-1}y$. Значит, уравнение (8) может иметь не более одного решения x, причём

$$x = A^{-1}(B^{-1}z). \tag{9}$$

Окончательно мы видим, что уравнение (7) имеет не более одного вектора-решения x. При этом, в силу определения обратного оператора, это решение может быть записано в виде $x = (BA)^{-1}z$, а в силу равенства (9) — в виде $x = A^{-1}(B^{-1}z)$. Значит, операторы $(BA)^{-1}$ и $A^{-1}B^{-1}$ принимают одинаковые значения на произвольном векторе $z \in H_2$ а значит — совпадают.

4) Если линейные операторы $A : H \to H_1$ и $B : H_1 \to H$ таковы, что $AB = I_{H_1}$ и $BA = I_H$, то оператор A обратим и $B = A^{-1}$. [Здесь символами I_{H_1} и I_H обозначены тождественные операторы пространств H_1 и H соответственно].

Доказательство. Прежде всего, из равенства $AB = I_{H_1}$ вытекает $\operatorname{dom} B = H_1$. Допустив теперь, что оператор A не обратим, найдём вектор $y \in H_1$ и два различных вектора $x_1, x_2 \in H$ таких, что $Ax_1 = y$ и $Ax_2 = y$. Тогда, на основании равенства $BA = I_H$ и того факта, что $y \in \operatorname{dom} B$, будем иметь

$$x_1 = I_H x_1 = (BA)x_1 = B(Ax_1) = By = B(Ax_2) = (BA)x_2 = I_H x_2 = x_2.$$

Пришли к противоречию с тем, что векторы x_1 и x_2 различны. Значит, уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения при любом $y \in H_1$, что и доказывает обратимость оператора A.

При этом ясно, что для любого $y \in H_1$ вектор $x = By$ является решением уравнения $Ax = y$. Поэтому $A^{-1} = B$.

Задачи

22. Докажите, что если оператор A обратим, то оператор A^{-1} также обратим и $(A^{-1})^{-1} = A$.

23. Докажите, что оператор $A : H \to H_1$ обратим, если и только если для любого ненулевого вектора x пространства

H вектор Ax пространства H_1 отличен от нуля.

24. Убедитесь в обратимости оператора $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, заданного формулой $(Ax)(t) = x(t + t_0)$, где x — произвольная функция из $L_2(\mathbb{R})$, а t_0 — фиксированное число. Найдите обратный оператор и укажите его область определения.

В задачах 25–28 выясните, являются ли обратимыми соответствующие операторы $A : l_2 \to l_2$. Если да, то найдите обратный оператор и укажите его область определения. Предполагается, что $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ — произвольный вектор из l_2, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — фиксированная ограниченная числовая последовательность.

25. $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

26. $Ax = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$.

27. $Ax = (x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$.

28. $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots)$.

В задачах 29–33 выясните, являются ли обратимыми соответствующие операторы $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$. Если да, то найдите обратный оператор и укажите его область определения. Предполагается, что x — произвольная функция из $L_2[0,1]$, а $a : [0,1] \to \mathbb{C}$ — фиксированная непрерывная функция.

29. $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$.

30. $(Ax)(t) = t^\alpha \int\limits_0^1 x(s)\,ds$.

31. $(Ax)(t) = a(t)x(t)$.

32. $(Ax)(t) = x(t^2)$.

33. $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s)\,ds$.

§ 6. Теорема Неймана

Теорема. *Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \to H$ — линейный оператор такой, что $\operatorname{dom} A = H$ и $\|A\| < 1$. Тогда оператор $I - A$ обратим, причём обратный ограничен, определён* *во всём пространстве H и имеет место равенство*

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

где использованы обозначения $A^0 = I$ — тождественный оператор и $A^{n+1} = AA^n$.

Доказательство. Поскольку $\|A^n\| = \|AA^{n-1}\| \le \|A\|\cdot\|A^{n-1}\| \le \dots \le \|A\|^n$ и $\|A\| < 1$, то числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\|$$

сходится. Воспользовавшись свойством 2) операторных рядов из § 4, отсюда заключаем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n \tag{10}$$

сходится и представляет собой ограничений линейный оператор, определённый во всём пространстве H.

Далее, для любого натурального числа N мы имеем

$$(I-A)\sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{N}(A^n - A^{n+1}) = I - A^{N+1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $N \to \infty$ и учитывая, что $\|A^{N+1}\| \le \|A\|^{N+1} \to 0$ при $N \to \infty$, получаем

$$(I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = I. \tag{11}$$

Аналогично доказывается равенство

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\Big)(I-A) = I. \tag{12}$$

На основании свойства 4) из § 5, из равенств (11) и (12) вытекает, что оператор $I - A$ обратим и обратным к нему является оператор (10). Теорема доказана.

Напомним, что формула

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

для суммы геометрической прогрессии ранее была известна вам для действительных и комплексных чисел, для которых $|x| < 1$. Теорема Неймана показывает, что эта формула остаётся верной если в качестве аргумента взять оператор A такой, что $\|A\| < 1$.

§ 7. Спектр оператора

С понятием спектра конечномерного оператора (или, что тоже самое, — квадратной матрицы) вы знакомы по курсу линейной алгебры. Как и в упомянутом курсе,мы будем считать, что всюду, где речь идёт о спектре оператора, подразумевается, что этот оператор определён в комплексном гильбертовом пространстве.

Пусть ограниченный линейный оператор $A : H \to H$ задан в (вообще говоря, бесконечномерном) комплексном гильбертовом пространстве H. Для фиксированных $\lambda \in \mathbb{C}$ и $y \in H$ рассмотрим уравнение

$$Ax - \lambda x = y \tag{13}$$

или

$$(A - \lambda I)x = y.$$

Ясно, что существование, единственность и прочие свойства решения последнего уравнения определяются свойствами обратного к $A - \lambda I$ оператора. В первую очередь речь идёт о существовании оператора $(A-\lambda I)^{-1}$ и о его области определения. В зависимости от этих свойств, для $(A-\lambda I)^{-1}$ возможны только следующие четыре взаимоисключающие ситуации:

1) оператор $A - \lambda I$ не обратим;

2) оператор $A - \lambda I$ обратим, причём обратный оператор определён во всём пространстве H;

3) оператор $A - \lambda I$ обратим, но обратный оператор определён не во всём H, а лишь на некотором плотном в H подпространстве;

4) оператор $A - \lambda I$ обратим, причём область определения обратного оператора не плотна в H.

Если комплексное число λ таково, что для него имеет место случай 2), то λ называется *регулярным значением* оператора A. При этом оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, определённый во всём пространстве H, называется *резольвентой* оператора A и обозначается R_λ.

Следующая теорема, которую мы примем без доказательства, показывает, что резольвента автоматически является ограниченным оператором.

Теорема (Банаха об обратном операторе). *Если $B : H \to H_1$ — линейный ограниченный обратимый оператор и* $\mathrm{dom}\, B^{-1} = H$, *то обратный оператор B^{-1} ограничен.*

Наиболее любознательные студенты, желающие факультативно познакомиться с доказательством теоремы Банаха об обратном операторе, могут найти его, например, в книге А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина "Элементы теории функций и функционального анализа".

Ограниченность резольвенты имеет принципиальное значение в самых разных вопросах, поскольку она позволяет обосновать следующее утверждение, означающее непрерывную зависимость решения уравнения (13) от правой части: если $\lambda \in \mathbb{C}$ — регулярное значение оператора A и последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ векторов пространства H такова, что $y_n \to y_0 \in H$ при $n \to \infty$, причём для каждого n вектор x_n является решением уравнения $(A - \lambda I)x = y_n$, то последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сходится к некоторому вектору $x_0 \in H$, который удовлетворяет уравнению $(A - \lambda I)x = y_0$.

Доказательство основано на следующем соотношении

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \|(A - \lambda I)^{-1} y_n - (A - \lambda I)^{-1} y_m\| = \\ &= \|(A - \lambda I)^{-1}(y_n - y_m)\| \le \|(A - \lambda I)^{-1}\| \cdot \|(y_n - y_m)\|.\end{aligned}$$

Из него следует, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ фундаментальна, а значит, сходится. Обозначая её предел через x_0 и переходя к пределу при $n \to \infty$ в соотношении $(A - \lambda I)x_n = y_n$, получим $(A - \lambda I)x_0 = y_0$, что и требовалось.

Вернёмся к перечисленным выше ситуациям 1)–4).

Совокупность всех комплексных чисел λ, не являющихся регулярными значениями оператора A, называется *спектром* оператора A и обозначается через $\sigma(A)$. Ясно, что если $\lambda \in \sigma(A)$, то с решением уравнения (13) возникают проблемы: либо оно имеет неединственное решение, либо оно разрешимо не для всякой правой части, либо нет непрерывной зависимости от правой части.

Если комплексное число λ таково, что для него имеет место случай 1), то в пространстве H существует ненулевой вектор x такой что $(A-\lambda I)x = 0$ или, что то же самое, $Ax = \lambda x$. В таком случае число λ называют *собственным значением* оператора A, а вектор x — *собственным вектором* оператора A, отвечающим собственному значению λ. Совокупность всех собственных значений оператора A называют *точечным спектром* оператора A и обозначают через $\sigma_p(A)$.

Совокупность тех комплексных чисел λ, для которых имеет место случай 3), называют *непрерывным спектром* оператора A и обозначают через $\sigma_c(A)$.

Совокупность тех комплексных чисел λ, для которых имеет место случай 4), называют *остаточным спектром* оператора A и обозначают через $\sigma_r(A)$.

Подчеркнём, что если λ принадлежит непрерывному или остаточному спектру, то оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ хотя и существует, но не называется резольвентой.

Отметим, что если пространство H конечномерно, то случаи 3) и 4) невозможны. В самом деле, если $n \times n$матрица, соответствующая оператору $A - \lambda I$ обратима, то обратная к ней матрица задаёт оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ сразу во всём пространстве. Поэтому в конечномерном пространстве спектр оператора сводится к точечному спектру, с которым вы и работали в курсе линейной алгебры.

К делению спектра на части (точечный, непрерывный и остаточный) следует относиться философски. Бывают физические задачи, при решении которых нет нужды например, различать случаи 3) и 4), а бывают и такие задачи, для описания, решения которых целесообразно ещё более детализировать структуру спектра (например — разбить каждый из случаев 3) и 4) на два в зависимости от того, ограничен оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ в своей области определения или нет). Этим объясняется некоторый встречающийся в литературе разнобой в терминологии при определении частей спектра.

Задача

34. Докажите, что резольвента R_λ ограниченного оператора, определённого в гильбертовом пространстве, удовлетворяет соотношению $R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu$ при любых регулярных значениях $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Выведите отсюда, что если резольвента компактна при каком-либо значении λ, то она компактна при всех λ.

§ 8. Пример вычисления спектра оператора. Простейшие свойства спектра.

Вычислим спектр оператора умножения на независимую переменную в пространстве $L_2[0,1]$, т. е. оператора $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, заданного формулой $(Ax)(t) = tx(t)$ для произвольной функции $x \in L_2[0,1]$ и $t \in [0,1]$.

Как известно, оператор $A-\lambda I$ обратим если и только если уравнение $(A-\lambda I)x = 0$ имеет только нулевое решение. В нашем случае это уравнение принимает вид $(t-\lambda)x(t) = 0$. Значит, его решение $x(t)$ равняется нулю для всех $t \in [0,1]$, отличных от λ и принимает произвольное значение при $t = \lambda$. Поскольку две функции пространства $L_2[0,1]$, совпадающие почти всюду, считаются равными, то обсуждаемое решение $x(t)$ является нулевым вектором пространства $L_2[0,1]$.

Таким образом, при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение $(A-\lambda I)x = 0$ имеет только нулевое решение. Следовательно, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $A - \lambda I$ обратим, а значит, точечный спектр оператора A пуст: $\sigma_p(A) = \emptyset$.

Займёмся изучением оператора, обратного к $A - \lambda I$ и в первую очередь — исследованием его области определения. Чтобы найти этот обратный оператор, нужно для произвольного $y \in L_2[0,1]$ решить уравнение $(A-\lambda I)x = y$, которое в нашем случае имеет вид $(t-\lambda)x(t) = y(t)$, $t \in [0,1]$. Поэтому обратный к $A - \lambda I$ оператор задаётся формулой

$$(A-\lambda I)^{-1}y(t) = x(t) = \frac{y(t)}{t-\lambda}.$$

Найти область его определения — это значит найти совокупность тех функций $y \in L_2[0,1]$, каждой из которых эта формула сопоставляет функцию x, лежащую в $L_2[0,1]$.

Если комплексное число λ не принадлежит замкнутому отрезку $[0,1]$, то, очевидно, найдётся положительное число δ такое, что для всех $t \in [0,1]$ выполняется неравенство $|t-\lambda| \geq \delta > 0$. Поэтому

$$\|x\|_{L_2[0,1]} = \left\|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right\|_{L_2[0,1]} = \left\{\int_0^1 \left|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right|^2 dt\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\left\{\int_0^1 |y(t)|^2\,dt\right\}^{1/2} = \frac{1}{\delta}\|y\|_{L_2[0,1]} < +\infty,$$

а значит, всякое число $\lambda \in \mathbb{C}\setminus[0,1]$ является регулярным значением оператора A.

Если $\lambda \in [0,1]$, то оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ не определён, например, на функции y, тождественно равной единице: он сопоставляет ей функцию $x(t) = 1/(t-\lambda)$, не лежащую в $L_2[0,1]$. В самом деле, интеграл

$$\int_0^1 |x(t)|^2\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t-\lambda)^2}$$

сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int \frac{dt}{(t-\lambda)^2},$$

вычисленным по произвольно малой окрестности точки $t = \lambda$. Но у последнего интеграла есть первообразная, равная $-(t-\lambda)^{-1}$, которая, очевидно, стремится к бесконечности при $t \to \lambda$. Значит,

$$\int_0^1 |x(t)|^2\,dt = +\infty$$

и при любом $\lambda \in [0,1]$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определён не во всём пространстве $L_2[0,1]$. Таким образом, интервал $[0,1]$ содержится в спектре оператора A.

Чтобы понять, какой именно части спектра (непрерывному или остаточному) принадлежат точки интервала $[0,1]$, для каждого числа $\lambda \in [0,1]$ введём в рассмотрение множество Ω_λ, состоящее из тех функций пространства $L_2[0,1]$, для каждой из которых существует (своя) окрестность точки $t = \lambda$, в пределах которой данная функция тождественно равняется нулю.

Очевидно, множество Ω_λ является (линейным) подпространством в $L_2[0,1]$ (проверьте это).

Кроме того, $\Omega_\lambda \subset \mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}$. В самом деле, если $y \in \Omega_\lambda$, то существует $\delta > 0$ такое, что $y(t) = 0$ для всех $t \in [0,1]$ таких, что $|t-\lambda| < \delta$. Поэтому функция $x(t) = (A-\lambda I)^{-1}y(t) = y(t)/(t-\lambda)$ принадлежит $L_2[0,1]$:

$$\|x\|_{L_2[0,1]} = \left\{\int_0^1 |x(t)|^2\,dt\right\}^{1/2} = \left\{\int_0^1 \left|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right|^2 dt\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\left\{\int_0^1 |y(t)|^2\,dt\right\}^{1/2} < +\infty,$$

Наконец, множество Ω_λ плотно в $L_2[0,1]$. Чтобы убедиться в этом,построим для любой функции $y \in L_2[0,1]$ и любого натурального числа n новую функцию $y_n \in L_2[0,1]$ по формуле

$$y_n(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } t \in [0,1] \text{ и } |t-\lambda| \geq 1/n, \\ 0, & \text{если } t \in [0,1] \text{ и } |t-\lambda| < 1/n. \end{cases}$$

Ясно, что $y_n \in \Omega_\lambda$. Кроме того, квадрат нормы разности $y - y_n$ равняется площади подграфика функция $|y(t)|^2$, когда t пробегает интервал $[\lambda - 1/n, \lambda + 1/n]$. Поскольку площадь подграфика стремится к нулю при $n \to \infty$, то $\|y - y_n\|_{L_2[0,1]} \to 0$.

Таким образом, для произвольной функции $y \in L_2[0,1]$ мы построили последовательность функций $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, лежащих в Ω_λ и сходящихся к y при $n \to \infty$ Это и означает, что Ω_λ, а значит и $\mathrm{dom}(A-\lambda)^{-1}$, плотно в $L_2[0,1]$.

Окончательно мы получаем, что при любом $\lambda \in [0,1]$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определён не во всём $L_2[0,1]$, а на некотором плотном подпространстве. Поэтому всякое число $\lambda \in [0,1]$

принадлежит непрерывному спектру оператора A: $\sigma_c(A) \supset [0,1]$.

Подводя итог сказанному, видим, что $\lambda \in \mathbb{C}$ является регулярным значением оператора A если и только если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$ и принадлежит его непрерывному спектру если и только если $\lambda \in [0,1]$. То же самое можно записать с помощью формул: $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0,1]$; $\sigma_p(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$.

Обсудим наиболее употребительные свойства спектра ограниченного оператора в гильбертовом пространстве:

1) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$; $\sigma_p(A) \cap \sigma_c(A) = \sigma_c(A) \cap \sigma_r(A) = \sigma_r(A) \cap \sigma_p(A) = \emptyset$.

Доказательство очевидно.

2) Спектр ограниченного оператора A содержится в замкнутом круге на комплексной плоскости радиуса $\|A\|$ с центром в нуле.

Для доказательства достаточно проверить, что если $|\lambda| > \|A\|$, то λ является регулярным значением оператора A. В самом деле, в этом случае

$$\left\|\frac{1}{\lambda}A\right\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$$

и, на основании теоремы Неймана, получаем, что оператор $A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A)$ обратим, причём обратный оператор ограничен и определён во всём пространстве. Следовательно, λ — регулярное значение.

3) Спектр ограниченного оператора A есть замкнутое множество на комплексной плоскости.

Для доказательства достаточно проверить, что дополнение к спектру (т. е. множество регулярных значений) открыто. Фиксируем произвольное регулярное значение λ_0 оператора A. Тогда оператор $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ определён во всём пространстве и ограничен. Подберём положительное число ε так, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$. Тогда для любого комплексного числа λ, удовлетворяющего неравенству $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ будем иметь

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)^{-1} &= \left(A - \lambda_0 I - (\lambda_0 - \lambda) I\right)^{-1} = \\ &= \left\{(A - \lambda_0 I)\left[I - (\lambda_0 - \lambda)(A - \lambda_0 I)^{-1}\right]\right\}^{-1} = \\ &= \left[I - (\lambda_0 - \lambda)(A - \lambda_0 I)^{-1}\right]^{-1}(A - \lambda_0 I)^{-1}.\end{aligned}$$

Левый оператор в последней строке этого равенства определён во всём пространстве и ограничен в силу теоремы Неймана, поскольку $\|(\lambda_0 - \lambda)(A - \lambda_0 I)^{-1}\| = |\lambda_0 - \lambda| \cdot \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| \leq \varepsilon\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$. Правый оператор определён во всём пространстве и ограничен по предположению. Значит, и оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определён во всём пространстве и ограничен, т. е. λ — регулярное значение.

Таким образом, мы видим, что для всякого регулярного значения λ_0 существует круг положительного радиуса ε с центром в λ_0, целиком содержащийся во множестве регулярных значений оператора A. Следовательно, это множество открыто.

Заметим, что в обсуждавшемся выше примере спектр совпадал с замкнутым интервалом $[0, 1]$ и поэтому действительно был замкнутым множеством, содержащимся в единичном круге с центром в нуле. [Проверьте, что норма оператора умножения на независимую переменную в пространстве $L_2[0, 1]$ равна единице].

Задачи

35. Пусть H — гильбертово пространство и S — его замкнутое подпространство. Найдите спектр (точечный, непрерывный и остаточный) оператора ортогонального проектирования H на S.

36. Пусть y и z — фиксированные векторы гильбертова пространства H и оператор $A : H \to H$ задан формулой $Ax = (x, y)z$ для любого $x \in H$. Найдите спектр (точечный, непрерывный и остаточный) оператора A.

37. Найдите спектр (точечный, непрерывный и остаточный) оператора сдвига $A : L_2(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R})$, заданного для произвольной функции $x \in L_2(\mathbb{R})$ формулой $(Ax)(t) = x(t + t_0)$, где t_0 — фиксированное вещественное число.

В задачах 38–41 найдите спектр (точечный, непрерывный и остаточный) операторов $A : l_2 \to l_2$, заданных соответствующими формулами (предполагается, что $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ — произвольный вектор из l_2).

38. $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

39. $Ax = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$.

40. $Ax = (x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$.

41. $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.

В задачах 42–47 найдите спектр (точечный, непрерывный и остаточный) операторов $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, заданных соответствующими формулами (предполагается, что x — произвольная функция из $L_2[0,1]$).

42. $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$.

43. $(Ax)(t) = t^\alpha \int\limits_0^1 x(s)\,ds$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

44. $(Ax)(t) = x(t^2)$.

45. $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s)\,ds$.

46. $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 f(t-s)x(s)\,ds$, где $f \in L_2[0,1]$ — фиксированная функция (напомним, что этот интеграл задаёт свёртку функций f и x).

47. $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ где $a : [0,1] \to \mathbb{C}$ — фиксированная непрерывная функция.

48. Докажите, что комплексное число λ принадлежит непрерывному спектру ограниченного оператора A если и только если λ принадлежит замыканию точечного спектра A, т. е. если и только если $\lambda \notin \sigma_p(A)$, но существует последовательность чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ лежащих в $\sigma_p(A)$, сходящаяся к λ.

§ 9. Линейные функционалы

Линейным *функционалом* в гильбертовом пространстве H называется линейный оператор, отображающий H во множество чисел (вещественных или комплексных).

Наиболее важный пример линейного функционала строится так: если x_0 — фиксированный вектор гильбертова пространства H, то формула $f(x) = (x, x_0)$ задаёт линейный функционал на H.

Поскольку линейный функционал является оператором, то для него определено понятие непрерывности, нормы и справедливы все свойства операторов, установленные в предыдущих параграфах. Мы не будем их здесь повторять, а остановимся на специфических свойствах линейных функционалов.

Ядром линейного функционала f, определённого в H, называется совокупность всех векторов $x \in H$, для которых $f(x) = 0$. Ядро функционала f обозначается через $\ker f$.

Обсудим наиболее важные свойства функционалов:

1) Если f — линейный функционал в H, то ядро f является подпространством в H.

Для доказательства нужно проверить, то любая линейная комбинация произвольных двух векторов из $\ker f$ лежит в $\ker f$. Но если $x, y \in \ker f$, то $f(x) = f(y) = 0$, а значит, для любых чисел α и β имеем $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$. Следовательно, $\alpha x + \beta y \in \ker f$.

2) Ядро непрерывного линейного функционала замкнуто.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — произвольная последовательность векторов ядра f, сходящаяся к некоторому вектору $x_0 \in H$. Поскольку f непрерывен, то $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, а значит $x_0 \in \ker f$. Следовательно, ядро f замкнуто.

3) Если f — ненулевой непрерывный функционал, то коразмерность его ядра равна единице. [Напомним, что *коразмерностью* подпространства S называется размерность его ортогонального дополнения $S^{\perp}$.]

Доказательство. Как известно, каково бы ни было замкнутое подпространство $S \subset H$, гильбертово пространство

H может быть представлено в виде прямой суммы S и его ортогонального дополнения $S^\perp$: $H = S \oplus S^\perp$. Это означает, что для любого вектора $x \in H$ найдутся, и притом единственным образом, векторы $y \in S$ и $z \in S^\perp$ такие, что $x = y + z$.

Поскольку мы предположили, что ядро f замкнуто, то $H = (\ker f) \oplus (\ker f)^\perp$. С другой стороны, мы предположили, что функционал f не равен нулю, а значит $H \neq \ker f$. Следовательно, ортогональное дополнение к ядру содержит не только нулевой вектор.

Пусть $x_0 \in (\ker f)^\perp$ и $x_0 \neq 0$.

Для любого вектора $x_1 \in (\ker f)^\perp$ положим $\alpha = f(x_1)/f(x_0)$ и $y = \alpha x_0 - x_1$. Тогда, с одной стороны, $y \in (\ker f)^\perp$, т. к. y является линейной комбинацией векторов x_0 и x_1; а с другой — $y \in \ker f$ т. к. $f(y) = f(\alpha x_0 - x_1) = f(x_0) \cdot \alpha - f(x_1) = 0$. Следовательно, $y \in (\ker f) \cap (\ker f)^\perp$. Поэтому $y = 0$ и $x_1 = \alpha x_0$.

Таким образом, мы убедились, что любой вектор из $(\ker f)^\perp$ пропорционален x_0. Это и означает, что коразмерность ядра равна единице.

4) Если ядро функционала замкнуто, то он непрерывен.

Доказательство. Если ядро функционала совпадает со всем пространством, то функционал равен нулю и, очевидно, непрерывен.

Если ядро функционала f является замкнутым подпространством, не совпадающим со всем пространством H, то ортогональное дополнение к ядру содержит хоть один ненулевой вектор. Обозначив его через w, убедимся, как и в доказательстве предыдущего свойства, что всякий вектор x из ортогонального дополнения к ядру пропорционален w. В самом деле, положим $\alpha = f(x)/f(w)$, получим, что вектор $y = \alpha w - x$ лежит в $(\ker f) \cap (\ker f)^\perp$ и поэтому равен 0.

Произвольным образом выберем последовательность x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ векторов, сходящуюся к нулю. Поскольку $\ker f$ замкнуто, то $H = (\ker f) \oplus (\ker f)^\perp$, а значит — для каждого номера n найдутся векторы $y_n \in \ker f$ и $z_n \in (\ker f)^\perp$ такие, что $x_n = y_n + z_n$. Далее, каждый из векторов z_n представим в виде $z_n = \alpha_n w$.

Поскольку, с одной стороны, $\|x_n\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$, а с другой — $\|x_n\|^2 = (x_n, x_n) = (y_n + \alpha_n w, y_n + \alpha_n w) = \|y_n\|^2 + |\alpha_n|^2 \cdot \|w\|^2$, то $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $f(x_n) = f(y_n + \alpha_n w) = f(y_n) + \alpha_n f(w) = \alpha_n f(w) \to 0 = f(0)$ при $n \to \infty$. Значит, линейный функционал f непрерывен в нуле и поэтому непрерывен всюду.

Задачи

В задачах 49–52 докажите, что соответствующие функционалы, определённые в пространстве l_2, линейны и непрерывны. Найдите их нормы. (Предполагается, что $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ — произвольный вектор пространства l_2.)

49. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$.

50. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\sqrt{k(k+1)}}$.

51. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k + x_{k+1}}{2^{k+1}}$.

52. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{k^2}$.

В задачах 53–55 докажите, что соответствующие функционалы, определённые в пространстве $L_2[0,1]$, линейны и непрерывны. Найдите их нормы. (Предполагается, что x — произвольная функция пространства $L_2[0,1]$.)

53. $f(x) = \int\limits_0^1 t^{-1/3} x(t)\, dt$.

54. $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\, \mathrm{sgn}(t - \frac{1}{2})\, dt$.

55. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} \sqrt{t}\, x(t)\, dt$.

56. Докажите эквивалентность следующих двух определений:

а). Если f — ненулевой линейный функционал в H и α — произвольное число, то *гиперплоскостью* в H, параллельной подпространству $\ker f$, называется множество $\{x \in H | f(x) = \alpha\}$.

б). Если f — ненулевой линейный функционал в H, то *гиперплоскостью* в H, параллельной подпространству $\ker f$ и проходящей через точку x_0, называется совокупность векторов $x \in H$, имеющих вид $x = x_0 + y$, где y — произвольный вектор из $\ker f$.

57. Докажите, что норма линейного непрерывного функционала f в H обратна к расстоянию в пространстве H от нуля до гиперплоскости $\{x \in H | f(x) = 1\}$.

58. Опираясь на решение предыдущей задачи, докажите, что если ненулевой линейный функционал разрывен, то его ядро плотно в H, а коразмерность ядра равна нулю.

59. Докажите, что линейный функционал f в комплексном гильбертовом пространстве H непрерывен тогда и только тогда, когда $\mathbb{C} \setminus f(B(0,1)) \neq \emptyset$.

§ 10. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса

Множество непрерывных линейных функционалов, определённых в гильбертовом пространстве H, называется пространством, *сопряжённым* к H, и обозначается через H^*.

Отметим, что в соответствии со сказанным в § 1, H^* является линейным пространством. Важнейшую информацию о структуре H^* даёт следующая

Теорема (Ф. Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала). *Пусть H гильбертово пространство. Тогда*

1) *для всякого непрерывного линейного функционала f на H существует единственный вектор $x_0 \in H$ такой, что*

$$f(x) = (x, x_0) \tag{14}$$

для всех $x \in H$, причём $\|f\| = \|x_0\|$;

2) *если $x_0 \in H$, то формула* (14) *определяет линейный непрерывный функционал на H такой, что $\|f\| = \|x_0\|$.*

Доказательство. Начнём с 2). Ввиду линейности скалярного произведения по первому аргументу ясно, что при любом $x_0 \in H$ формула (14) определяет линейный функционал на H. Поскольку на основании неравенства Коши — Буняковского имеем $|f(x)| = |(x, x_0)| \leq \|x\| \cdot \|x_0\|$, то норма f не превосходит $\|x_0\|$, а значит, f непрерывен. Однако $|f(x_0)| = |(x_0, x_0)| = \|x_0\|^2$ и, следовательно, $\|f\| = \|x_0\|$.

Доказательство 1) начнём с того, что убедимся в существовании нужного вектора x_0.

Поскольку функционал f непрерывен, то его ядро $\ker f$ замкнуто и, следовательно, всё пространство H представляется в виде прямой суммы ядра $\ker f$ и его ортогонального дополнения $(\ker f)^{\perp}$: $H = \ker f \oplus (\ker f)^{\perp}$. Последнее означает, что каждый вектор $x \in H$ может быть единственным образом представлен в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \ker f$, $x_2 \in (\ker f)^{\perp}$.

Если $f = 0$, то $\ker f = H$, $(\ker f)^{\perp} = \{0\}$ и, положив $x_0 = 0$ будем иметь $f(x) = 0 = (x, x_0)$ для всех $x \in H$.

Если $f \neq 0$, то $\ker f \neq H$, а ортогональное дополнение к ядру $(\ker f)^{\perp}$ не сводится к нулевому вектору и имеет размерность 1. Фиксировав вектор $x_3 \in (\ker f)^{\perp}$ единичной длины видим, что для любого $x_2 \in (\ker f)^{\perp}$ найдётся число α такое, что $x_2 = \alpha x_3$, а значит, для любого вектора $x \in H$ найдутся вектор $x_1 \in \ker f$ и число α такие, что $x = x_1 + \alpha x_3$. Следовательно, для любого $x \in H$ имеем

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_1 + \alpha x_3) = f(x_1) + \alpha f(x_3) = \alpha f(x_3) = \\
&= f(x_3)(x_1, x_3) + \alpha(f(x_3)x_3, x_3) = \\
&= (x_1 + \alpha x_3, \overline{f(x_3)}x_3) = (x, x_0),
\end{aligned}
$$

где введено обозначение $x_0 = \overline{f(x_3)}x_3$. Существование x_0 доказано.

Единственность x_0 докажем от противного. Допустим, что нашлось два вектора x_0 и $\tilde{x}_0$ таких, что для всех $x \in H$ $(x, x_0) = f(x) = (x, \tilde{x}_0)$. Тогда для всех $x \in H$ имеем $(x, x_0 - \tilde{x}_0) = 0$. Полагая в последнем равенстве $x = x_0 - \tilde{x}_0$, будем иметь $(x_0 - \tilde{x}_0, x_0 - \tilde{x}_0) = \|x_0 - \tilde{x}_0\|^2 = 0$, а значит, $x_0 = \tilde{x}_0$.

Для завершения доказательства утверждения 1) остаётся заметить, что равенство $\|f\| = \|x_0\|$ для функционалов, заданных формулой (14), было нами доказано ранее.

В заключение отметим, что из теоремы Рисса следует, что правило, которое сопоставляет вектору x_0 непрерывный линейный функционал f по формуле $f(x) = (x, x_0)$, определяет линейный изоморфизм векторных пространств H и H^*. Следовательно, H и H^* "с точностью до обозначений" являются одним и тем же пространством. Последнее обстоятельство становится особенно наглядным в случае, когда H является вещественным пространством векторов-столбцов длины n:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда H^* будет пространством векторов-строк длины n:

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

причём результат действия функционала y на вектор x может быть записан с использованием умножения $n \times 1$ и $1 \times n$ - матриц:

$$y(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

При этом изоморфизм пространств H и H^* задаётся операцией транспонирования векторов, а сами пространства H и H^* совпадают "с точностью до обозначений".

§ 11. Бра - и кет-векторы

В этом параграфе мы опишем формализм, предложенный П. А. М. Дираком в книге "Принципы квантовой механики" и прочно утвердившийся в физической литературе.

Прежде всего, давайте договоримся в пределах этого параграфа считать, что скалярное произведение линейно не по первому аргументу, как было до сих пор, а по второму и давайте записывать скалярное произведение векторов x и y несколько необычным образом: $\langle x|y\rangle$. Более того, давайте формально разделим этот символ на две части:

$$\langle x|y\rangle = \{\langle x|\}\{|y\rangle\}.$$

Первая часть этого символа — $\langle x|$ называется *бра-вектором*, вторая — $|y\rangle$ — *кет-вектором*. Название происходит от английского слова bracket — скобки.

Может показаться странным, что один и тот же вектор y мы можем по собственному желанию записывать, то как бра-вектор $\langle y|$, то как кет-вектор $|y\rangle$.

Чтобы разобраться в этой ситуации, будем отождествлять произвольный вектор y пространства H с кет-вектором $|y\rangle$. Тогда всякий бра-вектор $\langle x|$ с помощью формулы $f(y) = \langle x|y\rangle$ задаёт линейный непрерывный функционал на пространстве H. Но и обратно, на основании теоремы Рисса, всякий непрерывный линейный функционал на H может быть записан в виде скалярного произведения $\langle x|y\rangle$. Следовательно, бра-векторы можно отождествить с непрерывными функционалами на H, т. е. с векторами сопряжённого пространства H^*.

Таким образом, строго говоря, кет-векторы являются элементами пространства H, а бра-векторы — элементами пространства H^*, и отождествлять их с "обычными" векторами $x \in H$ можно только благодаря изоморфности пространств H и H^*, установленной в теореме Рисса.

Приведём два примера использования формализма бра- и кет-векторов.

Пример 1 (разложение тождественного оператора). Убедимся, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — ортонормированный базис в H, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n\rangle\langle x_n| = I, \tag{15}$$

где $I : H \to H$ тождественный оператор.

В самом деле, поскольку $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ образуют ортонормированный базис, то любой вектор $x \in H$ может быть разложен по нему: $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$, где λ_n — коэффициенты Фурье вектора x. С использованием бра- и кет-обозначений это разложение может быть переписано в виде

$$|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |x_n\rangle, \tag{16}$$

а для того, чтобы найти выражение для коэффициентов Фурье λ_n, в бра- и кет-обозначениях подействуем на обе части последней формулы бра-вектором $\langle x_m|$:

$$\langle x_m|x\rangle = \langle x_m|\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n|x_n\rangle\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\langle x_m|x_n\rangle = \lambda_m.$$

[В третьем равенстве мы воспользовались ортонормированностью базиса $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, а во втором — линейностью скалярного произведения по второму аргументу. Последним обстоятельством объясняется перемена мест сомножителей в полученной формуле по сравнению с той, которой мы пользовались до введения бра- и кет-формализма : $\lambda_n = (x, x_n)$.]

Подставив полученное выражение для коэффициентов Фурье в формулу (16), будем иметь

$$|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n\rangle\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n\rangle\langle x_n|x\rangle = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n\rangle\langle x_n|\right\}|x\rangle.$$

Следовательно, оператор, стоящий в фигурных скобках, переводит произвольный кет-вектор в себя, т. е. является тождественным. Равенство (15) доказано.

Пример 2. (Нахождение резольвенты.) Пусть H — n-мерное гильбертово пространство, $A : H \to H$ — линейный оператор, собственные векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ которого образуют ортонормированный базис в H. Собственное значение оператора A, отвечающее собственному вектору x_j, обозначим через λ_j: $Ax_j = \lambda_j x_j$. Решим неоднородное уравнение

$$Ax - \lambda x = y, \tag{17}$$

из которого требуется определить вектор $x \in H$, а вектор y и число λ считаются заданными, причём заранее будем предполагать, что λ не равняется ни одному из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Используя бра- и кет-обозначения, перепишем исходное уравнение в виде

$$A|x\rangle - \lambda|x\rangle = |y\rangle, \tag{18}$$

и разложим искомый вектор $|x\rangle$ по базису $|x_1\rangle, |x_2\rangle, \ldots, |x_n\rangle$:

$$\begin{array}{ccc} |x\rangle & & \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j |x_j\rangle. \\ \| & & \| \\ x & = & \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \end{array} \tag{19}$$

Тогда

$$A|x\rangle = Ax = A\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j |x_j\rangle. \tag{20}$$

Подставив выражения (19) и (20) в уравнение (18), получим

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\lambda_j - \lambda)|x_j\rangle = |y\rangle.$$

Подействовав на обе части последнего уравнения бра-вектором $\langle x_k|$, воспользовавшись линейностью скалярного произведения по второму аргументу и ортонормированностью векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будем иметь

$$\langle x_k|y\rangle = \langle x_k|\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\lambda_j - \lambda)|x_j\rangle\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\lambda_j - \lambda)\langle x_k|x_j\rangle = \alpha_k(\lambda_k - \lambda).$$

Использовав полученное таким образом выражение для α_k, получим

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \left\{\frac{\langle x_j|y\rangle}{\lambda_j - \lambda}\right\} = \left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j - \lambda}\right\}|y\rangle.$$

Выражение

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j - \lambda} \tag{21}$$

представляет собой линейный оператор, определённый во всём пространстве H и "разрешающий" уравнение (17). В § 7 мы условились называть его резольвентой.

Отметим, что при сделанных выше предположениях резольвента зависит только от собственных значений и собственных векторов оператора A. Поэтому, как только собственные векторы и собственные значения оператора A известны, мы можем выписать ответ к уравнению (17) при любой правой части y.

Выражение, аналогичное формуле (21), может быть получено и для бесконечномерных пространств (формально надо лишь заменить верхний предел суммирования n на ∞). Именно такая ситуация имеет место при изучении задачи Штурма — Лиувилля в дифференциальных уравнениях, где выражения, аналогичное формуле (21), называется *формулой Грина*. Но исследование сходимости соответствующего операторного ряда выходит за пределы настоящего курса.

Задачи

Пусть векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют ортонормированый базис в H. В задачах 60–63 найдите матрицы следующих операторов в этом базисе:

60. $|x_1\rangle\langle x_1|$. 61. $|x_1\rangle\langle x_2|$. 62. $|x_2\rangle\langle x_2|$.

63. $|x_1\rangle\langle x_1| + 2|x_2\rangle\langle x_2| + 3|x_3\rangle\langle x_3|$.

64. Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве введена декартова прямоугольная система координат x, y, z. Используя бра- и кет-обозначения, постройте оператор ортогонального проектирования на плоскость, которая пересекает плоскость xz под углом 45° по отношению и оси x и пересекает плоскость yz вдоль прямой $z = 0$.

65. Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве введена декартова прямоугольная система координат x, y, z. Используя бра- и кет-обозначения, постройте оператор ортогонального проектирования на прямую $y = 0$, $x = 3z$.

66. Используя бра- и кет-обозначения, найдите резольвенту для оператора, заданного в некотором ортонормиро-

ванном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перепишите ответ в обычной матричной форме.

67. Решите задачу 66 для матрицы

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & 2a \end{pmatrix}.$$

§ 12. Оператор, сопряжённый к ограниченному: определение и простейшие свойства

Пусть $A : H \to H_1$ — ограниченный линейный оператор и $x_0 \in H_1$. Построим функционал $f : H \to \mathbb{C}$ с помощью формулы

$$f(x) = (Ax, x_0).$$

Тогда f линеен (что очевидно из-за линейности скалярного произведения по первому аргументу и линейности A) и ограничен:

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, x_0)|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\| \cdot \|x_0\|}{\|x\|} = \|x_0\| < +\infty.$$

Поэтому, согласно теореме Рисса, существует единственный вектор $x_1 \in H$ такой, что для всех $x \in H$ справедливо равенство $f(x) = (x, x_1)$. Таким образом, возникает отображение пространства H_1 в пространство H, сопоставляющее вектору $x_0 \in H_1$ вектор $x_1 \in H$. Оно называется оператором, *сопряжённым* к A и обозначается через A^*.

Более кратко предыдущее определение можно высказать так: оператор A^* называется сопряжённым к ограниченному оператору $A : H \to H_1$, если равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$ выполняется для всех $x \in H$ и всех $y \in H_1$.

Подчеркнём, что если оператор A отображает пространство H в H_1, то сопряжённый к нему оператор A^* отображает H_1 в H, т. е. "действует навстречу".

Пример 1 (Сопряжённый оператор в конечномерном пространстве).

Пусть H и H_1 — конечномерные гильбертовы пространства и $A : H \to H_1$ — линейный оператор.

Фиксируем некоторый ортонормированный базис $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в H и некоторый ортонормированный базис $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в H_1. Из § 1 мы знаем, что каждому из операторов A и A^* соответствует матрица a_{kj} $(k = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ и a^*_{qp} $(q = 1, 2, \ldots, n;\ p = 1, 2, \ldots, m)$ в том смысле, что если

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \qquad \text{и} \qquad y = \sum_{p=1}^{m} \mu_p y_p,$$

то

$$Ax = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j \right) y_k \qquad \text{и} \qquad A^* y = \sum_{q=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{m} a^*_{qp} \mu_p \right) x_q.$$

Чтобы найти связь между коэффициентами матриц a_{kj} и a^*_{qp}, преобразуем равенство $(Ax, y) = (x, A^* y)$, воспользовавшись ортонормированностью базисов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$:

$$\begin{array}{ccccc} (Ax, y) & = & \left(\sum\limits_{k=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j \right) y_k, \sum\limits_{p=1}^{m} \mu_p y_p \right) & = & \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j \right) \overline{\mu_k} \\ \| & & & & \\ (x, A^* y) & = & \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \sum\limits_{q=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{m} a^*_{qk} \mu_k \right) x_q \right) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} a^*_{jk} \mu_k \right)} \lambda_j. \end{array}$$

Другими словами, мы видим, что для любых наборов чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ должно выполняться равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{kj} - \overline{a^*_{jk}} \right) \lambda_j \overline{\mu_k} = 0. \tag{22}$$

Отсюда вытекает, что для любой пары индексов j, k, справедливо равенство

$$a_{kj} = \overline{a^*_{jk}}. \tag{23}$$

В самом деле, если для каких-то индексов j_0 и k_0 равенство (23) не выполнено, то в качестве набора $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ возьмём такой, в котором все числа равны 0, за исключением λ_{j_0}, которое положим равным 1. Аналогично, все числа

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ положим равными 0, за исключением μ_{k_0}, которое положим равным 1. Тогда левая часть равенства (22) будет равна

$$a_{k_0 j_0} - \overline{a^*_{j_0 k_0}} \neq 0$$

и равенство (22) не будет выполняться. Полученное противоречие доказывает равенство (23).

Формула (23) означает, что если матрица оператора A задана относительно ортонормированных базисов в H и H_1, то сопряжённо-транспонированная к ней матрица будет являться матрицей сопряжённого оператора A^*. Это правило вам известно из курса линейной алгебры.

Пример 2 (Сопряжённый к оператору умножения на независимую переменную в $L_2[0,1]$).

Пусть оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ задан формулой $(Ax)(t) = tx(t)$, $t \in [0,1]$. Тогда для любых функций x и y из $L_2[0,1]$ мы имеем

$$(Ax, y) = \int_0^1 (Ax)(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_0^1 tx(t)\overline{y(t)}\,dt =$$

$$= \int_0^1 x(t)\overline{ty(t)}\,dt = \int_0^1 x(t)\overline{Ay(t)}\,dt = (x, Ay).$$

Значит $A^* = A$.

При изучении свойств сопряжённого оператора мы будем опираться на следующую **мини-лемму**: *если векторы x и y гильбертова пространства H таковы, что для любого $z \in H$ выполняется равенство $(x,z) = (y,z)$, то $x = y$*. Для доказательства достаточно заметить, что условие мини-леммы можно переформулировать так: $(x - y, z) = 0$ для всех $z \in H$. Полагая в последнем равенстве $z = x - y$, получим $\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = 0$. Следовательно, $x - y = 0$, что и требовалось доказать.

Формулируя следующие свойства оператора, сопряжённого к ограниченному, будем подразумевать, что H, H_1 и H_2 — гильбертовы пространства; $A : H \to H_1$ и $B : H \to H_1$ — ограниченные линейные операторы; α и β — комплексные числа.

1) A^* является линейным ограниченным оператором, причём $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Доказательство. Фиксируем векторы $y_1, y_2 \in H_1$ и числа α_1, α_2. Тогда для любого вектора $x \in H$ будем иметь

$$(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = (Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1}(Ax, y_1) + \overline{\alpha_2}(Ax, y_2) =$$
$$= \overline{\alpha_1}(x, A^* y_1) + \overline{\alpha_2}(x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2).$$

На основании мини-леммы отсюда заключаем, что $A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2$. Поскольку это равенство установлено для произвольных векторов y_1, y_2 и чисел α_1, α_2, то A^* — линейный оператор.

Чтобы оценить норму оператора A^*, выведем с помощью неравенства Коши—Буняковского следующее вспомогательное неравенство

$$\left|(x, A^* y)\right| = |(Ax, y)| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|,$$

справедливое для всех векторов $x \in H$ и $y \in H_1$. Подставив в него $x = A^* y$, будем иметь

$$\|A^* y\|^2 = (A^* y, A^* y) \leq \|A\| \cdot \|A^* y\| \cdot \|y\|$$

или

$$\|A^* y\| \leq \|A\| \cdot \|y\|.$$

Значит,

$$\|A^*\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|A^* y\|}{\|y\|} \leq \|A\|,$$

что и требовалось доказать.

2) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$.

Доказательство. Фиксировав векторы $x \in H$ и $y \in H_1$, будем иметь

$$(x, (\alpha A + \beta B)^* y) = ((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha \cdot Ax + \beta \cdot Bx, y) =$$
$$= \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) = \alpha(x, A^* y) + \beta(x, B^* y) =$$
$$= (x, \overline{\alpha} \cdot A^* y + \overline{\beta} \cdot B^* y) = (x, (\overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*) y).$$

Поскольку при фиксированном y это равенство справедливо для всех $x \in H$, то, на основании мини-леммы, имеем

$$(\alpha A + \beta B)^* y = (\overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*) y.$$

Значит, операторы $(\alpha A+\beta B)^*$ и $\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*$, применённые к произвольному вектору $y\in H_1$, дают одинаковый результат. Это и означает, что они совпадают: $(\alpha A+\beta B)^*=\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*$.

3) $(A^*)^*=A$.

Доказательство. Поскольку оператор, сопряжённый к $A: H\to H_1$, "действует навстречу" A, то A^* отображает H_1 в H, а $(A^*)^*$ — H в H_1. Для любых $x\in H$ и $y\in H_1$ имеем

$$(y,(A^*)^*x)=(A^*y,x)=\overline{(x,A^*y)}=\overline{(Ax,y)}=(y,Ax).$$

Поскольку это равенство справедливо для любого вектора $y\in H_1$, то на основании мини-леммы заключаем, что $(A^*)^*x=Ax$ для всех $x\in H$. Последнее означает, что $(A^*)^*=A$.

4) $\|A^*\|=\|A\|$.

Доказательство вытекает из соотношений $\|A^*\|\le\|A\|=\|(A^*)^*\|\le\|A^*\|$, первое и последнее из которых написаны в силу свойства 1) сопряжённого оператора, а второе — в силу свойства 3).

5) Если $I: H\to H$ — тождественный оператор, то $I^*=I$.

Доказательство, как и предыдущее, опирается на мини-лемму и следующее вычисление $(x,I^*y)=(Ix,y)=(x,y)=(x,Iy)$, справедливое для всех $x\in H$ и $y\in H_1$.

Другие полезные свойства сопряжённого оператора приведены в задачах.

Обратим внимание на то, что ограниченные линейные операторы можно рассматривать как обобщение комплексных чисел, поскольку числу α можно сопоставить оператор αI (I — тождественный оператор), норма которого, очевидно равна модулю числа α. С этой точки зрения операция нахождения оператора, сопряжённого данному, является обобщением операции нахождения комплексного числа, сопряжённого данному. Вышеприведённые свойства операторов являются обобщением хорошо известных свойств комплексных чисел. Например, свойство 3) означает, что число, сопряжённое к сопряжённому, равно исходному; свойство 4) — что модуль числа, сопряжённого к данному равен модулю исходного числа; 5) — что число единица является вещественным.

Чтобы подчеркнуть указанную аналогию, во многих книгах и статьях, написанных физиками для физиков, операцию комплексного сопряжения для комплексных чисел обозначают не чертой, а звездочкой. Тогда, например, свойство 2) записывается более симметрично: $(\alpha A+\beta B)^* = \alpha^* A^* + \beta^* B^*$. Но мы не будем пользоваться этим соглашением.

Задачи

В задачах 68–71 найдите оператор, сопряжённый к оператору $A : l_2 \to l_2$. Предполагается, что $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ — произвольный вектор пространства l_2.

68. $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

69. $Ax = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$.

70. $Ax = (x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3, x_3, x_4 \ldots, x_n, \ldots)$.

71. $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots)$, где $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ — фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.

В задачах 72–76 найдите оператор, сопряжённый к оператору $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$. Предполагается, что $x = x(t)$ — произвольная функция из пространства $L_2[0,1]$.

72. $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$.

73. $(Ax)(t) = t^\alpha \int\limits_0^1 x(s)\,ds$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

74. $(Ax)(t) = x(t^2)$.

75. $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s)\,ds$.

76. $(Ax)(t) = a(t)x(t)$, где $a : [0,1] \to \mathbb{C}$ — фиксированная непрерывная функция.

В задачах 77–78 найдите оператор, сопряжённый к оператору $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. Предполагается, что $x = x(t)$ — произвольная функция из пространства $L_2(\mathbb{R})$.

77. $(Ax)(t) = x(t+t_0)$, где t_0 — фиксированное вещественное число.

78. $(Ax)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)f(s)\,ds$, где $f \in L_2(\mathbb{R})$ — фиксиро-

ванная функция.

79. Пусть H — гильбертово пространство, S — его замкнутое пространство, $P : H \to S$ — оператор ортогонального проектирования H на S. Найдите P^*.

80. Пусть $A : H \to H_1$ и $B : H_1 \to H_2$ — ограниченные линейные операторы. Докажите, что $(BA)^* = A^*B^*$.

81. Пусть $A : H \to H_1$ — ограниченный линейный обратимый оператор. Докажите, что оператор A^* также обратим и $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

§ 13. Применение сопряжённого оператора при нахождении спектра

Как мы знаем из § 8, при нахождении спектра оператора наибольшие сложности возникают при попытке выяснить, принадлежит ли данное число λ остаточному или непрерывному спектру. Здесь нередко оказывается полезной следующая

Лемма. *Пусть $A : H \to H$ — линейный ограниченный оператор и комплексное число λ не является его собственным значением. Тогда λ принадлежит остаточному спектру оператора A если и только если число $\overline{\lambda}$ является собственным значением оператора A^*, т. е. $\lambda \in \sigma_r(A) \iff \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.*

Доказательство. Допустим, что $\lambda \in \sigma_r(A)$. Это означает, что область определения оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ не плотна в H. Значит, образ оператора $A - \lambda I$ не плотен в H. Следовательно, и замыкание образа оператора $A - \lambda I$ не плотно в H. Обозначим его через S и выберем ненулевой вектор y из $S^\perp$. Тогда для любого $x \in H$ вектор $(A - \lambda I)x$ будет содержаться в S, и мы сможем записать

$$0 = ((A - \lambda I)x, y) = (x, (A - \lambda I)^* y).$$

Поскольку последнее равенство справедливо для всех $x \in H$, то $(A - \lambda I)^* y = 0$, что может быть переписано в виде $(A^* - \overline{\lambda} I^*)y = 0$ или $A^* y = \overline{\lambda} y$. Значит, уравнение $A^* z = \overline{\lambda} z$ имеет ненулевое решение $z = y$. Следовательно, $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

Переходя к доказательству обратного утверждения, допустим, что $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, т. е. что уравнение $A^* z = \overline{\lambda} z$ имеет ненулевое решение $z = y$. Тогда $(A - \lambda I)^* y = 0$ и поэтому для любого $x \in H$

$$0 = (x, (A - \lambda I)^* y) = ((A - \lambda I)x, y).$$

Следовательно, образ оператора $A - \lambda I$ содержится в подпространстве S, ортогональном вектору y. Поскольку λ не является собственным значением оператора A, то оператор $A - \lambda I$ обратим, кроме того, область определения оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ совпадает с образом оператора $A - \lambda I$ и поэтому содержится в S.

С другой стороны, для любого вектора $z \in S$ мы имеем

$$\|y-z\|^2 = (y-z, y-z) = (y, y)-(z, y)-(y, z)+(z, z) = \|y\|^2+\|z\|^2 \geq \|y\|^2,$$

а значит, с помощью векторов z, лежащих в подпространстве S, нельзя сколь угодно близко приблизиться к вектору y. Это означает, что S не плотно в H. Но тогда и область определения оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ не плотна в H, и, следовательно, $\lambda \in \sigma_r(A)$. Лемма доказана.

Продемонстрируем применение этой леммы на примере оператора умножения на независимую переменную в $L_2[0, 1]$, рассмотренного в § 8: $(Ax)(t) = tx(t)$. Там мы сравнительно легко установили, что весь спектр совпадает с отрезком $[0, 1]$, а точечный спектр пуст: $\sigma(A) = [0, 1]$ и $\sigma_p(A) = \emptyset$. Теперь заметим, что сопряжённым к A является он сам:

$$(Ax, y) = \int_0^1 (Ax)(t)\overline{y(t)}\, dt = \int_0^1 tx(t)\overline{y(t)}\, dt = \int_0^1 x(t)\overline{ty(t)}\, dt =$$

$$= \int_0^1 x(t)\overline{Ay(t)}\, dt = (x, Ay).$$

Поэтому, на основании леммы, получаем $\sigma_r(A) = \sigma_p(A) = \emptyset$. Наконец, поскольку $[0, 1] = \sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$, то $\sigma_c(A) = [0, 1]$. Мы получили уже известный нам результат, избежав громоздких рассуждений, связанных с множеством Ω_λ из § 8.

§ 14. Ограниченные самосопряжённые операторы: теорема о точечном спектре, норме и инвариантном подпространстве

Ограниченный линейный оператор $A : H \to H$ называется ***самосопряжённым***, если его сопряжённый совпадает с A, т. е. если $A^* = A$.

Другими словами, A называется самосопряжённым, если равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$ выполняется для всех $x, y \in H$.

Теорема (о точечном спектре самосопряжённого оператора). *Все собственные значения ограниченного самосопряжённого линейного оператора вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны между собой.*

Доказательство. Пусть комплексное число λ является собственным значением самосопряжённого ограниченного оператора $A : H \to H$. Это означает, что найдётся вектор $x \in H$, такой, что $Ax - \lambda x = 0$ и $\|x\| = 1$. Тогда можем написать

$$\lambda = \lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x) = \overline{\lambda},$$

откуда следует, что λ — вещественное число.

Теперь допустим, что λ и μ — различные собственные значения оператора A: $\lambda \neq \mu$. Соответствующие им собственные векторы обозначим через x и y: $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$. Умножим первое из этих равенств скалярно на y, второе — на x и вычтем одно из другого:

$$
\begin{array}{r}
(Ax, y) = \lambda(x, y) \\
- \quad \\
(x, Ay) = \mu(x, y) \\
\hline
(Ax, y) - (x, Ay) = (\lambda - \mu)(x, y).
\end{array}
$$

Здесь мы учли, что $\mu \in \mathbb{R}$. Левая часть последнего равенства равна нулю, т. к. A — самосопряжённый оператор. В правой же части сомножитель $\lambda - \mu$ не равен нулю по предположению. Значит $(x, y) = 0$, т. е. $x \perp y$. Теорема доказана.

Теорема (о норме самосопряжённого оператора). *Если $A : H \to H$ — линейный, самосопряжённый, ограниченный оператор, то*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} |(Ax, x)|.$$

Доказательство. Введём обозначение

$$\alpha = \sup_{\|x\| \le 1} |(Ax, x)|.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, можем записать $|(Ax, x)| \le \|Ax\| \cdot \|x\| \le \|A\| \cdot \|x\|^2$, откуда вытекает, что

$$\alpha = \sup_{\|x\| \le 1} |(Ax, x)| \le \|A\|,$$

т. е. $\alpha \le \|A\|$.

Чтобы доказать противоположное неравенство $\alpha \ge \|A\|$, установим предварительно тождество

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = 4\,\mathrm{Re}(Ax, y), \qquad (24)$$

справедливое для всех векторов $x, y \in H$. Оно вытекает из следующих вычислений:

$$\begin{aligned} &(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = \\ &= (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y) - \\ &- \Big[(Ax, x) - (Ax, y) - (Ay, x) + (Ay, y)\Big] = \\ &= 2\Big[(Ax, y) + (y, Ax)\Big] = 2\Big[(Ax, y) + \overline{(Ax, y)}\Big] = 4\,\mathrm{Re}(Ax, y). \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством (24), будем иметь

$$\begin{aligned} 4\,\mathrm{Re}(Ax, y) &\le \Big|(A(x+y), x+y)\Big| + \Big|(A(x-y), x-y)\Big| = \\ &= \|x+y\|^2 \left|\left(A\frac{x+y}{\|x+y\|}, \frac{x+y}{\|x+y\|}\right)\right| + \|x-y\|^2 \left|\left(A\frac{x-y}{\|x-y\|}, \frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right|. \end{aligned}$$

В правой части последнего выражения стоят два члена вида $|(Az, z)|$, где $\|z\| = 1$. Значит, каждый из этих членов не превосходят α. Воспользовавшись этим обстоятельством и применяя равенство параллелограмма, можем продолжить начатое вычисление:

$$4\,\mathrm{Re}(Ax, y) \le \alpha\left[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right] = 2\alpha\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]. \qquad (25)$$

Предположим, что вектор $x \in H$ выбран так, что $Ax \ne 0$. Подставим в формулу (25)

$$y = \frac{\|x\|}{\|Ax\|}Ax \quad :$$

$$4\frac{\|x\|}{\|Ax\|}\|Ax\|^2 \le 2\alpha\left[\|x\|^2 + \|x\|^2\right].$$

Значит, $\|Ax\| \le \alpha\|x\|$ для всех $x \in H$ таких, что $Ax \ne 0$.

Если же $Ax = 0$, то неравенство $\|Ax\| \le \alpha\|x\|$ выполняется тривиальным образом.

Окончательно мы получаем, что величина $\|Ax\|/\|x\|$ не превосходит α для всех $x \in H$, $x \ne 0$. Следовательно,

$$\|A\| = \sup_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \alpha.$$

Теорема доказана.

Подпространство S гильбертова пространства H называется *инвариантным подпространством* линейного оператора $A : H \to H$, если для любого $x \in S$ мы имеем $Ax \in S$.

Теорема (об инвариантном подпространстве самосопряжённого оператора). *Если $A : H \to H$ — линейный, самосопряжённый, ограниченный оператор и S — его инвариантное подпространство, то $S^\perp$ также является инвариантным подпространством оператора A.*

Доказательство. Нужно проверить, что для любого $x \in S^\perp$ вектор Ax лежит в $S^\perp$. Для этого достаточно убедиться, что равенство $(Ax, y) = 0$ выполняется для всех $x \in S^\perp$ и всех $y \in S$. Ввиду самосопряжённости оператора A, последнее равенство может быть переписано в виде $(x, Ay) = 0$. Теперь ясно, что оно действительно имеет место для всех $x \in S^\perp$ и всех $y \in S$, поскольку выражает факт инвариантности S: для любого $y \in S$ вектор Ay снова лежит в S, а значит, перпендикулярен любому вектору x из $S^{\perp}$.

Задачи

82. Пусть $A : H \to H$ — ограниченный линейный оператор. Докажите следующие утверждения:

а) Если A — самосопряжённый, то выражение (Ax, x) является вещественным для всех $x \in H$.

б) Если выражение (Ax, x) является вещественным для всех $x \in H$, то для всех $x, y \in H$ верно равенство $(A(x+y), x+y) = (x+y, A(x+y))$, из которого вытекает $(Ay, x) + (Ax, y) = (y, Ax) + (x, Ay)$. Аналогично — верно равенство $(A(x+iy), x+iy) = (x+iy, A(x+iy))$, из которого, в свою очередь, вытекает $(Ay, x) - (Ax, y) = (y, Ax) - (x, Ay)$.

в) Если выражение (Ax, x) является вещественным для всех $x \in H$, то A — самосопряжённый оператор.

83. Докажите, что для любого ограниченного оператора A операторы

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

являются самосопряжёнными.

84. Докажите, что для любого ограниченного оператора A найдутся самосопряжённые операторы A_1 и A_2 такие, что $A = A_1 + iA_2$.

85. Докажите, что для любого ограниченного оператора A справедливы равенства $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2$.

86. Докажите, что остаточный спектр ограниченного самосопряжённого оператора пуст.

87. Докажите, что спектр (весь, а не только точечный) самосопряжённого ограниченного оператора состоит только из вещественных чисел.

88. Докажите следующие соотношения для нормы самосопряжённого ограниченного оператора

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{\|x\|^2}.$$

§ 15. Компактные множества и компактные операторы: определения и простейшие свойства

Напомним, что подмножество X гильбертова пространства H называется

а) *ограниченным*, если оно содержится в шаре некоторого конечного радиуса, т. е. если существует положительное число $0 < R < +\infty$ такое, что для всех $x \in X$ выполнено неравенство $\|x\| \leq R$;

б) *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. если из того, что каждая точка последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ лежит в X и $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ вытекает, что $x_0 \in X$.

Множество X, содержащееся в гильбертовом пространстве H, будем называть *компактным*, если из любой его бесконечной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вектору из X.

Обсудим наиболее употребительные свойства компактных множеств.

1) Если H — конечномерное гильбертово пространство, то множество $X \subset H$ компактно тогда и только тогда, когда X замкнуто и ограничено.

Это утверждение называемое обычно *теоремой Лебега*, известно вам для случая $H = \mathbb{R}^n$ из курса математического анализа и здесь доказываться не будет. В общем случае достаточно заметить, что всякое конечномерное пространство H изоморфно $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$.

2) Если множество $X \subset H$ компактно, то X замкнуто и ограничено.

Доказательство. Достаточно проверить, что если множество незамкнуто или неограничено, то оно не может быть компактным.

Пусть X не замкнуто. Тогда найдётся последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек множества X, которая сходится к некоторой точке x_0 пространства H, не лежащей в X. Убедимся, что именно из этой последовательности нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке из X. В самом деле, если бы такая подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2},$

$\dots, x_{n_k}, \dots$ нашлась, то она имела бы два несовпадающих предела: в качестве одного — некоторую точку $\tilde{x}_0$ из X, и в качестве другого — точку x_0, не лежащую в X (ведь, очевидно, любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и исходная последовательность). Пришли к противоречию с единственностью предела. Значит, X не компактно.

Пусть теперь множество X не ограничено. Это значит, что для любого числа R найдётся вектор x из X такой, что $\|x\| > R$. Построим последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ точек множества X следующим образом: выберем $x_1 \in X$ так чтобы $\|x_1\| > 1$ и, если точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ уже построены, то выберем точку $x_{n+1} \in X$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|x_{n+1}\| > \|x_n\| + 1$. Из построенной последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, т. к. никакая её подпоследовательность не является фундаментальной, поскольку, как следует из вычисления

$$\|x_n - x_m\| \geq \big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| =$$
$$= \big|(\|x_n\| - \|x_{n-1}\|) + (\|x_{n-1}\| - \|x_{n-2}\|) + \dots (\|x_{m+1}\| - \|x_m\|)\big| \geq$$
$$\geq 1 + 1 = \dots + 1 = n - m > 1,$$

расстояние между любыми несовпадающими ($n > m$) точками этой последовательности не может быть сделано меньше единицы. Значит X не компактно.

Итак, мы убедились, что "половина" свойства 1) имеет место не только в конечномерных, но и в бесконечномерных пространствах. Следующее свойство показывает, что "вторая половина" свойства 1) в бесконечномерных пространствах неверна.

3) Если замкнутый единичный шар в гильбертовом пространстве H компактен, то H конечномерно.

Доказательство. Допустим, что H бесконечномерно. Фиксируем в H ортонормированный базис $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ состоящий, в силу нашего допущения, из бесконечного числа векторов. Как и при доказательстве свойства 2), убедимся, что из последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, лежащей в единичном замкнутом шаре, нельзя выделить фундаментальной и, тем самым, — сходящейся подпоследовательности:

$$\|x_m - x_m\|^2 = (x_n - x_m, x_n - x_m) =$$
$$= (x_n, x_n) - (x_n, x_m) - (x_m, x_n) + (x_m, x_m) == 1 - 0 - 0 + 1 = 2.$$

Последнее противоречит предположению о компактности единичного замкнутого шара.

4). Если $A : H \to H_1$ — ограниченный линейный оператор и $X \subset H$ компактно, то множество AX, лежащее в пространстве H_1, также компактно.

Доказательство. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ — последовательность точек множества AX. Согласно определению образа множества X под действием оператора A, это означает, что для каждого номера n найдётся точка x_n из множества X такая, что $Ax_n = y_n$. [Обратите внимание, что точек $x \in X$, обладающих свойством $Ax = y_n$ может быть несколько; через x_n мы обозначили какую-то одну (любую) из них]. Тем самым мы построили последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек множества X, а поскольку X компактно, то из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке x_0 множества X: $x_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$. Но тогда точки $y_{n_k} = A(x_{n_k})$ образуют подпоследовательность последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, сходящуюся к точке Ax_0, содержащейся в Ax:

$$\|y_{n_k} - Ax_0\| = \|Ax_{n_k} - Ax_0\| = \|A(x_{n_k} - x_0)\| \leq \|A\| \cdot \|x_{n_k} - x_0\| \to 0$$

при $k \to \infty$. Значит, AX компактно.

Линейный оператор $A : H \to H_1$ называется *компактным*, если для любого ограниченного множества $X \subset H$ замыкание множества AX, содержащегося в H_1, компактно.

Другими словами, оператор A компактен, если из любой ограниченной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ пространства H можно выделить подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, которую оператор A переведёт в сходящуюся (неважно к какому вектору пространства H_1) последовательность $Ax_{n_1}, Ax_{n_2}, \ldots, Ax_{n_k}, \ldots$.

Приведём простейшие свойства компактных операторов.

1) Если $A : H \to H_1$ и $B : H \to H_1$ — компактные операторы, то для любых чисел α и β оператор $\alpha A + \beta B$ также компактен.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — произвольная ограниченная последовательность векторов пространства H.

Поскольку оператор A компактен, а последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — ограничена, то из неё можно выделить такую подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, которую оператор A переводит в сходящуюся последовательность Ax_{n_1}, $Ax_{n_2}, \ldots, Ax_{n_k}, \ldots$.

Теперь воспользуемся тем, что оператор B компактен, а последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ ограничена (ведь все ее точки содержатся в том же шаре, в котором содержатся все точки последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$). Значит из последовательности $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \ldots, x_{n_{k_l}}, \ldots$, которую оператор B переведёт в сходящуюся последовательность $Bx_{n_{k_1}}, Bx_{n_{k_2}}$, $\ldots$, $Bx_{n_{k_l}}, \ldots$.

Таким образом, из произвольной ограниченной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ мы выделили подпоследовательность $x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \ldots, x_{n_{k_l}}, \ldots$, которую оба оператора A и B переводят в сходящиеся последовательности. Следовательно, и оператор $\alpha A + \beta B$ переведёт её в сходящуюся последовательность $\alpha Ax_{n_{k_1}} + \beta Bx_{n_{k_1}}, \alpha Ax_{n_{k_2}} + \beta Bx_{n_{k_2}}, \ldots, \alpha Ax_{n_{k_l}} + \beta Bx_{n_{k_l}}, \ldots$. Тем самым компактность оператора $\alpha A + \beta B$ доказана.

2) Если оператор $A : H \to H_1$ компактен, то он ограничен.

Доказательство. Фиксируем произвольное ограниченное множество X в пространстве H. Поскольку оператор A компактен, то замыкание множества AX компактно. Но всякое компактное множество ограничено, а значит, замыкание множества AX ограничено, т. е. содержится в шаре некоторого конечного радиуса в пространстве H_1. Воспользовавшись тем, что любое множество содержится в своём замыкании, заключаем, что AX содержится в том же шаре и поэтому ограничено. Значит, оператор A переводит любое ограниченное множество X в ограниченное AX, т. е. A — ограничен.

3) Пусть $A : H \to H_1$ — линейный оператор и $\dim H_1 < +\infty$. Для того, чтобы A был компактен необходимо и достаточно,

чтобы A был ограничен.

Доказательство. Необходимость вытекает из свойства 2). Чтобы доказать достаточность, фиксируем ограниченное множество X в пространстве H. Поскольку A — ограниченный оператор, то множество AX ограничено в H_1. Но, как легко убедиться, замыкание ограниченного множества является ограниченным множеством. Поэтому замыкание множества AX ограничено в H_1. Воспользовавшись предположением $\dim H_1 < +\infty$ и теоремой Лебега заключаем, что замыкание множества AX компактно. Тем самым A переводит ограниченное множество в такое, замыкание которое компактно и поэтому — компактен.

4) Для того чтобы тождественный оператор $I : H \to H$ был компактным, необходимо и достаточно, чтобы $\dim H_1 < +\infty$.

Доказательство. Достаточность вытекает из свойства 3). Необходимость будет установлена, если мы убедимся, что если $\dim H_1 = +\infty$, то I не компактен. Для этого обозначим через X единичный замкнутый шар в H: $x = \{x \in H | \|x\| \leq 1\}$. Очевидно, X является ограниченным замкнутым множеством, образ которого IX совпадает с X. На основании допущения $\dim H_1 = +\infty$ и свойства 3) компактных множеств заключаем, что IX не компактно. Значит, из допущения $\dim H_1 = +\infty$ вытекает существование ограниченного множества X, замыкание образа IX которого не компактно. Следовательно, если $\dim H_1 = +\infty$, то I не компактен, что и требовалось доказать.

5) Пусть оператор $A : H \to H_1$ компактен, а операторы $B : H_1 \to H_2$ и $C : H_3 \to H$ ограничены. Тогда операторы BA и AC компактны.

Доказательство. Поскольку оператор A компактен, то из всякой ограниченной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек пространства H можно выделить такую подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ которую оператор A переведёт в сходящуюся последовательность $Ax_{n_1}, Ax_{n_2}, \ldots, Ax_{n_k}, \ldots$. Но ограниченный оператор переводит сходящуюся последовательность в сходящуюся; поэтому последовательность $B(Ax_{n_1})$, $B(Ax_{n_2}), \ldots, B(Ax_{n_k}), \ldots$ сходится. Таким образом, мы видим, что из всякой ограниченной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ можно выделить такую подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, которую оператор BA переведёт в сходящуюся. Значит, BA компактен.

С другой стороны, поскольку оператор C ограничен, то он переведёт любую ограниченную последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ в ограниченную $Cy_1, Cy_2, \ldots, Cy_n, \ldots$. Поскольку оператор A компактен, то из последовательности $Cy_1, Cy_2, \ldots, Cy_n, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $Cy_{n_1}, Cy_{n_2}, \ldots, Cy_{n_k}, \ldots$, которую оператор A переведёт в сходящуюся последовательность $A(Cy_{n_1}), A(Cy_{n_2}), \ldots, A(Cy_{n_k}), \ldots$. Значит, из любой ограниченной последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots, y_{n_k}, \ldots$, которую оператор AC переведёт в сходящуюся последовательность. Следовательно, AC компактен.

6) Если $\dim H_1 = +\infty$, а оператор $A : H \to H$ компактен и обратим, то A^{-1} не может быть ограниченным.

Доказательство будем вести от противного. Предположим, что A^{-1} ограничен. Тогда, согласно свойству 5), из равенства $AA^{-1} = I$ вытекает, что тождественный оператор I компактен. В силу свойства 4) это влечёт $\dim H_1 < +\infty$, что противоречит условию $\dim H_1 = +\infty$. Полученное противоречие означает, что A^{-1} не может быть ограниченным.

Задача

89. Докажите, что следующие два свойства эквивалентны:

а) оператор переводит компактное множество в компактное;

б) оператор переводит ограниченное множество в ограниченное (т. е. он ограничен).

[На первый взгляд, свойство а) должно быть принято за определение компактности оператора. Данная задача, показывая, что свойство а) эквивалентно ограниченности оператора, "оправдывает" более сложное определение компактности оператора, приведённое в тексте параграфа.]

§ 16. Теорема о пределе последовательности компактных операторов

Теорема. *Пусть H и H_1 — гильбертовы пространства и A_1, $A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — последовательность компактных линейных операторов, отображающих H в H_1, причём $A_n \to A$ при $n \to \infty$. Тогда A — компактный оператор.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ограниченная последовательность векторов пространства H. Компактность оператора A будет установлена, если мы убедимся, что из последовательности $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n, \ldots$ векторов пространства H_1 можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Поскольку оператор A_1 компактен, а последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ограничена, то из последовательности A_1x_1, $A_1x_2, \ldots, A_1x_n, \ldots$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Обозначим через $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$ подпоследовательность последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ такую, что последовательность $A_1x_1^{(1)}, A_1x_2^{(1)}, \ldots, A_1x_n^{(1)}, \ldots$ сходится.

Последовательность $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$ содержится в шаре того же радиуса, что и последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и, следовательно, ограничена. Кроме того, оператор A_2 компактен. Поэтому из последовательности $A_2x_1^{(1)}, A_2x_2^{(1)}, \ldots, A_2x_n^{(1)}, \ldots$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Обозначим через $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots$ подпоследовательность последовательности $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$ (а, значит, и последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$) такую, что последовательность $A_2x_1^{(2)}, A_2x_2^{(2)}, \ldots, A_2x_n^{(2)}, \ldots$ сходится.

Если последовательность $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, \ldots$ уже построена, то, рассуждая аналогично предыдущему, выберем из неё подпоследовательность $x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \ldots, x_n^{(m+1)}, \ldots$ так, чтобы последовательность $A_{m+1}x_1^{(m+1)}, A_{m+1}x_2^{(m+1)}, \ldots, A_{m+1}x_n^{(m+1)}, \ldots$ сходилась.

Расположим построенные последовательности в виде бесконечной таблицы

$$\begin{array}{ccccc}
x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, & \ldots \\
x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \ldots, & x_n^{(2)}, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & \ldots, & x_n^{(m)}, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

и рассмотрим диагональную последовательность $x_1^{(1)}$, $x_2^{(2)}$, $\ldots$, $x_n^{(n)}$, $\ldots$. Из способа её построения следует, что она является подпоследовательностью последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Кроме того, для любого номера $k = 1, 2, \ldots$, "хвост" $x_k^{(k)}, x_{k+1}^{(k+1)}, x_{k+2}^{(k+2)}, \ldots$ диагональной последовательности является подпоследовательностью k-ой строки таблицы, а k-ю строку таблицы оператор A_k переводит в сходящуюся последовательность. Поэтому каждый из операторов A_k переводит диагональную последовательность в сходящуюся.

Убедимся, что оператор A переводит диагональную последовательность в сходящуюся. Так как пространство H_1 полно, то достаточно доказать, что последовательность $Ax_1^{(1)}$, $Ax_2^{(2)}$, $\ldots$, $Ax_n^{(n)}$, $\ldots$ фундаментальна.

Наше рассуждение будет основано на следующем соотношении

$$\begin{aligned}
\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| &= \|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)} \pm A_k x_n^{(n)} \pm A_k x_m^{(m)}\| \le \\
&\le \|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\| + \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| + \|A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\| \le \\
&\le \|A - A_k\| \cdot \|x_n^{(n)}\| + \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| + \|A - A_k\| \cdot \|x_m^{(m)}\|,
\end{aligned} \tag{26}$$

справедливом для любых номеров n, m и k.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и будем считать, что для всех номеров n выполняется неравенство $\|x_n\| \le R$.

Выберем число k так, чтобы $\|A - A_k\| \le \varepsilon/(3R)$. Это можно сделать, поскольку $A_n \to A$, а значит $\|A - A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Для такого номера k первый и последний члены в правой части формулы (26) не превосходят $\varepsilon/3$.

Теперь выберем число n_0 такое, чтобы для всех $m, n \ge n_0$ выполнялось неравенство $\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| \le \varepsilon/3$, т. е. чтобы средний член в правой части формулы (26) не превосходил $\varepsilon/3$.

Таким образом, в силу (26), мы для любого $\varepsilon > 0$ нашли число n_0 такое, что для всех $m, n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $Ax_1^{(1)}, Ax_2^{(2)}, \ldots, Ax_n^{(n)}, \ldots$ фундаментальна, а отсюда, как уже было сказано выше, вытекает компактность оператора A. Теорема доказана.

Приведём пример компактного оператора, образ которого бесконечномерен.

Пример. Пусть оператор $A : l_2 \to l_2$ задан формулой

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^2}x_2, \ldots, \frac{1}{2^n}x_n, \ldots\right).$$

Легко понять, что его образ не содержится ни в каком конечномерном подпространстве. Убедимся, что A компактен.

Для этого при каждом n зададим оператор $A_n : l_2 \to l_2$ по формуле

$$A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^2}x_2, \ldots, \frac{1}{2^n}x_n, 0, 0, 0, \ldots\right).$$

Очевидно, A_n линеен и непрерывен, а его образ имеет размерность $n < \infty$. Следовательно, A_n — компактен. Кроме того,

$$\|A_n - A\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x - Ax\|^2 = \sup_{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x|^2 \leq 1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}}|x_k|^2 \leq \frac{1}{3 \cdot 2^{2n}} \to 0$$

при $n \to \infty$, а значит $A_n \to A$. Следовательно, A компактен.

Задачи

90. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Докажите, что оператор A компактен если и только если $\lim\limits_{n \to \infty} Ax_n = 0$.

91. Докажите утверждение, обратное к теореме настоящего параграфа, а именно, докажите, что всякий компактный оператор является пределом последовательности конечномерных непрерывных операторов.

92. Докажите, что оператор, сопряжённый к компактному, компактен.

§ 17. Теорема о дискретности точечного спектра компактного оператора

Теорема. *Если H — гильбертово пространство и $A : H \to H$ — компактный оператор, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся лишь конечное число линейно независимых собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям, модуль которых больше ε.*

Доказательство будем вести от противного, т. е. предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ нашлась (бесконечная) последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ линейно независимых собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям, модуль которых больше ε: $Ax_n = \lambda_n x_n$, $|\lambda| > \varepsilon$.

Применим к этой последовательности процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Результат обозначим через y_1, $y_2, \ldots, y_n, \ldots$.

Утверждается, что 1) последовательность $y_1/\lambda_1, y_2/\lambda_2, \ldots, y_n/\lambda_n, \ldots$ ограничена; и 2) из последовательности $A(y_1/\lambda_1)$, $A(y_2/\lambda_2), \ldots, A(y_n/\lambda_n), \ldots$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Эти два свойства противоречат компактности оператора A и, тем самым, для завершения доказательства теоремы только их и нужно доказать.

Свойство 1) очевидным образом вытекает из соотношений $\|y_n\| = 1$ и $|\lambda_n| > \varepsilon$:

$$\left\| \frac{y_n}{\lambda_n} \right\| = \frac{\|y_n\|}{|\lambda_n|} < \varepsilon.$$

Для доказательства свойства 2) заметим, что вектор y_n лежит в линейной оболочке векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а значит, найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

Поэтому

$$A\frac{y_n}{\lambda_n} = A\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda_n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda_n} \lambda_k x_k =$$

$$= \alpha_n x_n + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \cdots + \alpha_1 x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\alpha_k}{\lambda_n}\lambda_k - \alpha_k\right) x_k = y_n + z_n,$$

где использовано обозначение

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\alpha_k}{\lambda_n}\lambda_k - \alpha_k\right) x_k.$$

Из последнего выражения видно, что вектор z_n лежит в линейной оболочке векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, а значит, — и в линейной оболочке векторов $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Тогда для любых номеров m и n, связанных соотношением $n > m$, будем иметь

$$\left\|A\frac{y_n}{\lambda_n} - A\frac{y_m}{\lambda_m}\right\| = \|y_n + z_n - y_m - z_m\|^2 =$$
$$= (y_n + z_n - y_m - z_m, y_n + z_n - y_m - z_m) =$$
$$= (y_n, y_n) + (z_n - y_m - z_m, z_n - y_m - z_m),$$

поскольку вектор $z_n - y_m - z_m$ лежит в линейной оболочке векторов $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ и поэтому ортогонален вектору y_n. Но $(y_n, y_n) = \|y\|^2 = 1$, а $(z_n - y_m - z_m, z_n - y_m - z_m) = \|z_n - y_m - z_m\|^2 \geq 0$. Следовательно,

$$\left\|A\frac{y_n}{\lambda_n} - A\frac{y_m}{\lambda_m}\right\| \geq 1$$

для любых n бóльших m. Это показывает, что из последовательности $A(y_1/\lambda_1), A(y_2/\lambda_2), \ldots, A(y_n/\lambda_n), \ldots$ нельзя выделить фундаментальной подпоследовательности, а значит, нельзя выделить и сходящейся.

Свойство 2), а с ним и теорема, доказано.

Укажем наиболее важные следствия доказанной теоремы, непосредственно из неё вытекающие:

1). Если оператор A компактен, то любому его ненулевому собственному значению λ отвечает лишь конечное число линейно независимых собственных векторов. [Отметим, что как и в линейной алгебре, это число называется *кратностью* собственного значения λ.]

2) Если оператор A компактен, то для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число его собственных значений, удовлетворяющих неравенству $|\lambda| \geq \varepsilon$.

3) Собственные значения компактного оператора можно перенумеровать в порядке невозрастания модулей с учётом их кратностей, т. е. можно записать $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \cdots \geq 0$, где каждое ненулевое значение λ_n встречается столько раз, какова его кратность.

Задачи

93. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — числовая последовательность. Докажите, что оператор $A : H \to H$, заданный формулой

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x, x_n) x_n$$

компактен, если и только если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

94. Покажите, что число ноль может лежать как в точечном, так и в непрерывном спектре компактного оператора, но не может лежать в его остаточном спектре.

95. Докажите, что если оператор A^n при некотором n компактен, то спектр $\sigma(A)$ оператора A является либо конечным, либо счётным множеством точек.

§ 18. Компактные самосопряжённые операторы: теорема о точечном спектре и теорема Гильберта — Шмидта

Теорема (о непустоте точечного спектра компактного самосопряжённого оператора). *Пусть H — гильбертово пространство, размерность которого не равна нулю, и оператор $A : H \to H$*

компактен, самосопряжён и отличен от нулевого оператора. Тогда существует собственный вектор оператора A, отвечающий ненулевому собственному значению.

Доказательство. Поскольку оператор A самосопряжён и отличен от нулевого, то его норма не равна нулю и может быть найдена по формуле (см. § 14):

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

По определению точной верхней границы, для любого номера $n \in \mathbb{N}$ существует вектор $x_n \in H$ такой, что $\|x_n\| = 1$ и $\|A\| - 1/n \le |(Ax_n, x_n)| \le \|A\|$.

Введём обозначения $\lambda_n = (Ax_n, x_n)$, $y_n = Ax_n - \lambda_n x_n$.

Решающим моментом в данном доказательстве будет то, что $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Если иметь это в виду, то становится ясно, что мы ввели обозначения так, чтобы x_n стремились к собственному вектору, а λ_n — к собственному значению оператора A (хотя сами λ_n собственными значениями и не являются).

Убедимся, что $y_n \to 0$ при $n \to \infty$:

$$0 \le \|y_n\|^2 = (y_n, y_n) = (Ax_n - \lambda_n x_n, Ax_n - \lambda_n x_n) =$$
$$= (Ax_n, Ax_n) - \lambda_n(x_n, Ax_n) - \overline{\lambda_n}(Ax_n, x_n) + |\lambda_n|^2(x_n, x_n) \le$$
$$\le \|A\|^2 - |\lambda_n|^2 \le \|A\|^2 - \left(\|A\| - \frac{1}{n}\right)^2 = 2\frac{1}{n}\|A\| - \frac{1}{n^2} \to 0.$$

[В ходе последнего вычисления мы использовали соотношения $(Ax_n, Ax_n) = \|Ax_n\|^2 \le \|A\|^2 \cdot \|x_n\|^2 = \|A\|^2$, $(x_n, Ax_n) = \overline{\lambda_n}$, $(Ax_n, x_n) = \lambda_n$, $(x_n, x_n) = 1$.]

Перепишем определение y_n в виде

$$x_n = \frac{Ax_n - y_n}{\lambda_n}.$$

С одной стороны, последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ограничена, а оператор A — компактен. Поэтому найдётся подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ такая, что последовательность $Ax_{n_1}, Ax_{n_2},$

…, Ax_{n_k}, … сходится. С другой стороны, последовательность комплексных чисел $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \ldots, \lambda_{n_k}, \ldots$ ограничена, а значит, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\lambda_{n_{k_1}}, \lambda_{n_{k_2}}, \ldots, \lambda_{n_{k_l}}, \ldots$ причём $|\lambda_{n_{k_l}}| \to \|A\| \neq 0$ при $l \to \infty$. Поэтому в формуле

$$x_{n_{k_l}} = \frac{Ax_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}}{\lambda_{n_{k_l}}} \tag{27}$$

правая часть имеет предел при $l \to \infty$. Значит, и левая часть имеет предел, т. е. в H существует вектор x_0 такой, что $x_{n_{k_l}} \to x_0$ при $l \to \infty$. При этом $x_0 \neq 0$, поскольку $\|x_n\| = 1$ для любого n, а следовательно, $\|x_0\| = 1$.

Переходя к пределу при $l \to \infty$ в формуле (27), мы получим

$$x_0 = \frac{Ax_0}{\lambda_0}$$

или $Ax_0 = \lambda_0 x_0$. Тем самым мы нашли собственный вектор x_0 оператора A, отвечающий ненулевому собственному значению λ_0 (ведь $|\lambda_0| = \|A\| \neq 0$). Теорема доказана.

Теорема (Гильберта — Шмидта). *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство ненулевой размерности и $A : H \to H$ — компактный самосопряжённый оператор. Тогда в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.*

Доказательство. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ конечную или бесконечную последовательность, состоящую из ортонормированных собственных векторов оператора A. Этот набор будем называть максимальным, если любой собственный вектор оператора A является линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Далее через $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будем обозначать именно максимальный набор ортонормированных собственных векторов оператора A.

Система $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ содержит хотя бы один вектор, поскольку если $A \neq 0$, то существование хотя бы одного собственного вектора вытекает из предыдущей теоремы. Если же $A = 0$, то любой вектор $x \in H$ является собственным вектором оператора A, отвечающим нулевому собственному значению: $Ax = 0 = 0 \cdot x$.

Система $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ действительно может быть выбрана ортонормированной, поскольку если какие-либо два входящие в неё вектора отвечают разным собственным значениям оператора A, то они взаимноортогональны автоматически в силу теоремы о точечном спектре самосопряжённого оператора (см. § 14). Если же некоторое количество векторов $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ системы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ отвечает одному и тому же собственному значению λ, то любой вектор из линейной оболочки векторов $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ также является собственным вектором оператора A, отвечающим собственному значению λ. Поэтому, применив к последовательности $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ процесс ортогонализации Грама — Шмидта, мы получим ортонормированную последовательность собственных векторов, которую и "вставим" в последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ вместо векторов $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$.

В свою очередь, не вызывает сомнения возможность выбрать систему $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ максимальной. Если на каком-то шаге наша система оказалась не максимальной, то добавим к ней ортогональный ко всем её векторам собственный вектор оператора A. Ясно, что, действуя таким образом, мы в конце концов получим максимальную систему, причём натуральных чисел хватит для нумерации: ведь в сепарабельном гильбертовом пространстве никакая ортонормированная система не может содержать более чем счётное множество векторов.

Обозначим через M замыкание линейной оболочки, построенной выше системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

Если $M = H$, то теорема доказана. Поэтому предположим, что $M \neq H$. Как и всякое гильбертово пространство, H может быть представлено в виде прямой суммы своего замкнутого подпространства M и его ортогонального дополнения $M^\perp$: $H = M \oplus M^\perp$. В силу нашего допущения о том, что $M \neq H$, $M^\perp$ содержит не только нулевой вектор, и поэтому его размерность не равна нулю.

Кроме того, M, очевидно, является инвариантным подпространством оператора A. Поскольку A самосопряжён, то, согласно теореме об инвариантном подпространстве, $M^\perp$ также является инвариантым подпространством оператора A. Поэтому сужение A_0 оператора A на подпространство $M^{\perp}$ переводит его в $M^{\perp}$, т. е. $A_0 : M^{\perp} \to M^{\perp}$.

Наконец, воспользуемся такими очевидными свойствами: а) любое замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства само является гильбертовым пространством; б) сужение компактного оператора на произвольное замкнутое подпространство является компактным оператором; в) сужение ограниченного самосопряжённого оператора на произвольное подпространство является ограниченным самосопряжённым оператором.

Из этих свойств следует, что $A_0 : M^{\perp} \to M^{\perp}$ является компактным самосопряжённым оператором, отображающим гильбертово пространство $M^{\perp}$ в себя. На основании предыдущей теоремы заключаем, что A_0 имеет собственный вектор, т. е. существует вектор $x \in M^{\perp}$, $x \neq 0$ такой, что $A_0 x = \lambda x$. Но тогда x является собственным вектором оператора A, ортогональным всем векторам системы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Последнее противоречит максимальности системы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Значит, случай $M \neq H$ невозможен и теорема доказана.

Задачи

В задачах 96 – 99 использованы следующие предположения и обозначения: $A : H \to H$ — компактный самосопряжённый оператор, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — ортонормированный базис в H, состоящий из собственных векторов оператора A, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — последовательность собственных значений оператора A, причём для каждого n собственное значение λ_n отвечает собственному вектору x_n: $Ax_n = \lambda_n x_n$.

96. Докажите, что для любого $x \in H$ справедливо соотношение

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, x_n) x_n,$$

называемое *канонической формой* компактного самосопряжённого оператора.

97. Докажите, что если λ является регулярным значением оператора A, то для всякого $y \in H$ (единственное) реше-

ние уравнения $(A - \lambda I)x = y$ имеет вид

$$x = R_\lambda(A)y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y, x_n)}{\lambda_n - \lambda} x_n.$$

[Отметим, что последняя формула проясняет структуру резольвенты $R_\lambda(A)$ и уже встречалась нам в конечномерном случае (см. формулу (21)).]

98. Докажите, что для всякого многочлена

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

имеют место соотношения

$$p(A)x = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k A^k\right)x = \sum_{n=1}^{\infty} p(\lambda_n)(x, x_n)x_n,$$

для любого $x \in H$ и

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)),$$

где $\sigma(B)$ обозначает, как обычно, спектр оператора B. [Последнее соотношение называется *теоремой об отображении спектра*. Она справедлива не только для многочленов и не только для компактных самосопряжённых операторов и читается так: *спектр функции от оператора равен образу спектра под действием этой функции*.]

99. Если λ регулярное значение оператора A, такое, что $|\lambda| < \|A\|$, то ряд Неймана может оказаться расходящимся, но иногда следующим приёмом удаётся построить его аналог. Предположим для простоты, что все собственные значения оператора A неотрицательны. Пусть, кроме того, они упорядочены с учётом кратности в порядке невозрастания и собственному значению λ_1 соответствует равно один собственный вектор x_1: $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq 0$. Покажите, что при $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$ и любом $x \in H$ справедливо соотношение

$$(A - \lambda I)^{-1}x = (\lambda_1 - \lambda)(x, x_1)x_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n-1}} A^n(x - (x, x_1)x_1).$$

§ 19. Вариационный принцип Куранта отыскания собственных значений компактного самосопряжённого оператора

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство ненулевой размерности и пусть $A : H \to H$ — компактный самосопряжённый линейный оператор. Тогда, как известно, все собственные значения оператора A вещественны, а ненулевые собственные значения можно занумеровать с учётом кратности следующим образом

$$\lambda_{-1} \le \lambda_{-2} \le \cdots \le \lambda_{-n} \cdots < 0 < \cdots \le \lambda_n \le \cdots \le \lambda_2 \le \lambda_1. \tag{28}$$

Теорема (вариационный принцип Куранта). *При сделанных выше предположениях для любого $n \ge 1$ справедливы соотношения*

$$\lambda_n = \inf_{H_{n-1}} \sup_{\substack{x \ne 0 \\ x \perp H_{n-1}}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}, \tag{29}$$

$$\lambda_{-n} = \sup_{H_{n-1}} \inf_{\substack{x \ne 0 \\ x \perp H_{n-1}}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}, \tag{30}$$

где H_{n-1} обозначает произвольное $(n-1)$-мерное подпространство в H.

Доказательство. В соответствии с теоремой Гильберта—Шмидта, в пространстве H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных функций оператора A. Собственный вектор, отвечающий отличному от нуля собственному значению λ_m $(m = \pm 1, \pm 2, \dots)$ из (28), обозначим через x_m. Совокупность всех собственных векторов, отвечающих собственному значению, равному нулю, очевидно, образует замкнутое линейное подпространство в H. Обозначим через $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ ортонормированный базис этом подпространстве. Тогда совокупность векторов $x_{\pm 1}, x_{\pm 2}, \dots, x_{\pm n} \dots,$ $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ является ортонормированным базисом в H.

Отметим, что достаточно доказать только формулу (29), поскольку формула (30) получается из неё заменой оператора A на $-A$.

В самом деле, положим $\tilde{A} = -A$ и упорядочим ненулевые собственные значения оператора $\tilde{A}$ с учётом их кратностей также как это сделано в (28):

$$\tilde{\lambda}_{-1} \leq \tilde{\lambda}_{-2} \leq \cdots \leq \tilde{\lambda}_{-n} \cdots < 0 < \cdots \leq \tilde{\lambda}_n \leq \cdots \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \tilde{\lambda}_1.$$

Из вычисления

$$\tilde{A}x_m = -Ax_m = -\lambda_m x_m \tag{31}$$

следует, что вектор x_m ($m = \pm 1, \pm 2, \ldots$) является собственным вектором оператора $\tilde{A}$ и, значит, число $-\lambda_m$ содержится среди чисел $\tilde{\lambda}_{\pm 1}$, $\tilde{\lambda}_{\pm 2}$, ... Но точно также можно убедиться, что число $-\tilde{\lambda}_k$ содержится среди чисел $\lambda_{\pm 1}$, $\lambda_{\pm 2}$, ... Поэтому с учётом упорядоченности чисел λ_m и $\tilde{\lambda}_k$, из (31) заключаем, что $\tilde{\lambda}_{-m} = -\lambda_m$.

Допустив, что формула (29) верна, применим её к оператору $\tilde{A}$ и воспользуемся известными соотношениями

$$\sup_{x \in X}[-f(x)] = -\inf_{x \in X}[f(x)], \qquad \inf_{x \in X}[-f(x)] = -\sup_{x \in X}[f(x)]$$

для точной верхней и точной нижней границ функции $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого $n \geq 1$ будем иметь

$$\lambda_{-n} = -\tilde{\lambda}_n = -\inf_{H_{n-1}} \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp H_{n-1}}} \frac{(\tilde{A}x, x)}{\|x\|^2} = -\inf_{H_{n-1}} \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp H_{n-1}}} \left[-\frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}\right] =$$

$$= -\inf_{H_{n-1}} \left[-\inf_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp H_{n-1}}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}\right] = \sup_{H_{n-1}} \inf_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp H_{n-1}}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}.$$

Тем самым мы убедились, что формула (30) вытекает из формулы (29).

Чтобы доказать формулу (29), для $n \geq 1$ введём обозначение

$$\alpha_n = \inf_{H_{n-1}} \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp H_{n-1}}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}.$$

Формула (29), очевидно, следует из двух доказываемых ниже неравенств $\alpha_n \leq \lambda_n$ и $\alpha_n \geq \lambda_n$.

Сначала докажем, что $\alpha_n \le \lambda_n$. Обозначим через L_n линейную оболочку n векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Поскольку система векторов $x_{\pm 1}, x_{\pm 2}, \ldots, x_{\pm n} \ldots, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ является ортонормированным базисом в H, то для любого $x \in H$ справедливо равенство

$$x = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} c_k x_k + \sum_{j=1}^{+\infty} d_j y_j,$$

где $c_k = (x, x_k)$, $d_j = (x, y_j)$. Если же вектор x ортогонален подпространству L_{n-1}, то в последнем разложении будем иметь $c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$, а значит,

$$(Ax, x) = \Bigg(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0,1,\ldots,n-1}}^{+\infty} \lambda_k c_k x_k, \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0,1,\ldots,n-1}}^{+\infty} c_k x_k + \sum_{j=1}^{+\infty} d_j y_j \Bigg) =$$

$$= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0,1,\ldots,n-1}}^{+\infty} \lambda_k |c_k|^2 \le \lambda_n \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0,1,\ldots,n-1}}^{+\infty} |c_k|^2,$$

поскольку если $k \neq 0, 1, \ldots, n-1$, то $\lambda_k \le \lambda_n$. Используя полученное неравенство, можем написать

$$\alpha_n = \inf_{H_{n-1}} \sup_{\substack{x\neq 0 \\ x \perp H_{n-1}}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \le \sup_{\substack{x\neq 0 \\ x \perp L_{n-1}}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \le$$

$$\le \sup_{\substack{c_{\pm 1}, c_{\pm 2}, \ldots, c_{\pm k}, \ldots \\ d_1, d_2, \ldots, d_j, \ldots \\ c_1 = c_2 = \ldots c_{n-1} = 0}} \frac{\lambda_n \sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} |c_k|^2}{\sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} |c_k|^2 + \sum\limits_{j=1}^{+\infty} |d_j|^2} \le \lambda_n.$$

Тем самым неравенство $\alpha_n \le \lambda_n$ доказано.

Теперь покажем, что $\alpha_n \ge \lambda_n$. Для этого фиксируем в H произвольное $(n-1)$-мерное подпространство H_{n-1}. В нашем рассуждении решающее значение будет иметь тот факт, что пересечение подпространств L_n и $H_{n-1}^{\perp}$ состоит не только из нулевого вектора.

Чтобы доказать его, предположим противное. Тогда ортогональное проектирование P подпространства L_n на подпространство H_{n-1} переводит произвольный ненулевой вектор опять в ненулевой вектор и поэтому является обратимым линейным отображением. При этом векторы Px_1, Px_2, $\ldots$, Px_n, оказываются линейно независимыми, ведь в силу линейности P^{-1} из равенства

$$\alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2 + \cdots + \alpha_n Px_n = 0$$

вытекает

$$\begin{gathered} P^{-1}(\alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2 + \cdots + \alpha_n Px_n) = \\ = \alpha_1 P^{-1} Px_1 + \alpha_2 P^{-1} Px_2 + \cdots + \alpha_n P^{-1} Px_n = \\ = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0, \end{gathered}$$

что возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n = 0$, поскольку система векторов x_1, x_2, $\ldots$, x_n, ортонормирована и, тем самым, линейно независима. Таким образом мы получили n линейно независимых векторов Px_1, Px_2, $\ldots$, Px_n, расположенных в $(n-1)$-мерном пространстве H_{n-1}. Полученное противоречие и доказывает, что пересечение $L_n \cap H_{n-1}^{\perp}$ содержит не только нулевой вектор.

Выберем ненулевой вектор $\tilde{x}$ из $L_n \cap H_{n-1}^{\perp}$. Поскольку $\tilde{x} \in L_n$, то он допускает разложение

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k,$$

а значит,

$$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp H_{n-1}}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \geq \frac{(A\tilde{x}, \tilde{x})}{\|\tilde{x}\|^2} = \frac{\left(A \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k, \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k\right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k, \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k A x_k, \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2} \geq \lambda_n \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2} = \lambda_n.$$

Таким образом, мы показали, что для любого $(n-1)$-мерного подпространства H_{n-1} выполняется неравенство

$$\sup_{\substack{x\neq 0\\ x\perp H_{n-1}}} \frac{(Ax,x)}{\|x\|^2} \geq \lambda_n. \tag{32}$$

Значит, и точная нижняя граница величин, стоящих в левой части неравенства (32), также не будет превосходить λ_n:

$$\alpha_n = \inf_{H_{n-1}} \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\perp H_{n-1}}} \frac{(Ax,x)}{\|x\|^2} \geq \lambda_n,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Вышеизложенный принцип Куранта служит основой для приближённого нахождения собственных значений оператора $A+\varepsilon B$ при малых значениях ε в случае, если собственные значения и собственные векторы оператора A нам известны. При этом, например, полагают, что первое (т. е. максимальное) собственное значение оператора $A+\varepsilon B$ численно равно $((A+\varepsilon B)x_1^1, x_1)/\|x_1\|^2$, где x_1 — собственный вектор оператора A, отвечающий его первому (т. е. максимальному) собственному значению. Аналогично поступают с остальными собственными значениями. Такая приближённая схема используется, например, в квантовой механике при изучении атома гелия (см. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц "Квантовая механика").

Задачи

В задачах 100 и 101 для операторов $A: l_2 \to l_2$ и $B: l_2 \to l_2$, найдите собственные значения оператора $A+\varepsilon B$ сначала непосредственно, а затем — приближённо, опираясь на вариационный принцип Куранта. Сравните результаты при $\varepsilon \to 0$.

100. $A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^2}x_2, \ldots \frac{1}{2^n}x_n, \ldots\right)$,

$B(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_3, x_1, 0, 0, \ldots 0, \ldots)$.

101. $A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^2}x_2, \ldots \frac{1}{2^n}x_n, \ldots\right)$.

$B(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 0, 0, \ldots 0, \ldots)$.

Предметный указатель

Содержание