МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики

КРИВОРОТЬКО О.И., ЗВОНАРЕВА Т.А.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ КУРСА "ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ"

Новосибирск, 2021

Содержание

1 Ортогональный тензор, преобразования тензора. Главные оси и главные значения тензора. Инварианты

Ортогональный тензор, преобразования тензора.

Рассмотрим две системы координат $(e_i)_{i=1,\ldots,m}$ и $(e_{i'})_{i'=1,\ldots,m}$, связанные соотношением $e_{i'} = P_{i'i}e_i$, где $P_{i'i}$ – матрица перехода.

Определение 1. Отображение A называется *тензором* валентности n в пространстве $\mathbb{R}^m$, если при переходе из системы координат $(e_i)_{i=1,\ldots,m}$ к $(e_{i'})_{i'=1,\ldots,m}$ оно преобразуется по следующему закону

$$a_{i'_1 i'_2 \ldots i'_n} = P_{i'_1 i_1} P_{i'_2 i_2} \cdot \ldots \cdot P_{i'_n i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Здесь $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ – компоненты тензора A, $i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, \ldots, m$, общим числом m^n.

Тензор третьего *ранга* (или *валентности*) обозначается как $A = (a_{ijk})$.

Определение 2. Преобразование A называется *ортогональным*, если оно удовлетворяет соотношениям $A \cdot A^T = A^T \cdot A = E$, $A^{-1} = A^T$.

Замечание. По повторяющимся индексам идет суммирование.

Операции над тензорами:

1. Сложение: $a_{ijk} + b_{ijk} = z_{ijk}$.
2. Тензорное умножение: $a_{ij} \otimes b_k = z_{ijk}$.
3. Свертка: $a_{iij} = b_j$.

Главные оси и главные значения тензора. Инварианты.

Рассмотрим тензор второго ранга Π: $\Pi a = b$. Если b коллинеарен a, то направление вектора a называется *главным направлением тензора* Π. Так как $b = \lambda a$, то величина λ называется *главным значением тензора* Π.

Алгоритм нахождения главных осей и главных значений тензора:

1. Найти λ из уравнения $\det|\Pi - \lambda E| = 0$ (характеристическое уравнение).
2. Главные направления (оси) a определяются из соотношения $\Pi a = \lambda a$.

Если $\Pi \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (т.е. матрица 3×3), то характеристическое уравнение может быть записано следующим образом:

$$\lambda^3 - \lambda^2(p_{11} + p_{22} + p_{33}) + \lambda \left(\begin{vmatrix} p_{22} & p_{32} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Так как корни уравнения не зависят от выбора системы координат (!), то используя теорему Виета, получим соотношения:

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{32} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3,$$

$$I_3 = \det \Pi = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Так как значения I_1, I_2 и I_3 не меняются при преобразовании координат, они называются ***инвариантами тензора***.

Те тензоры, у которых I_1 обращается в нуль, называются ***девиаторами***.

Из любого тензора Π можно получить девиатор. Рассмотрим величину $\alpha = I_1$. Тогда тензор $\Pi' = \Pi - \frac{1}{3}\alpha E$ будет девиатором.

Пример 1. *Тензор T задан в правом ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 координатами $T_{11} = 2$, $T_{12} = 1$, $T_{13} = 0$ $T_{21} = -1$, $T_{22} = 3$, $T_{23} = 0$, $T_{31} = 1$, $T_{32} = 0$, $T_{33} = 1$. Найти координаты тензора в новом ортонормированном базисе $e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$, если известно, что орты $e_{1'}, e_{2'}$ сонаправлены векторам $a_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $a_2 = -e_1 + e_3$ соответственно.*

► Выразим новый базис через старый. Для этого воспользуемся данными нам векторами a_1 и a_2 и найдем сонаправленные орты нового базиса.

$$\begin{aligned} e_{1'} &= \frac{a_1}{|a_1|} = \frac{1}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}e_3, \\ e_{2'} &= \frac{a_2}{|a_2|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3. \end{aligned}$$

Далее находим ортогональный первым двум орт $e_{3'}$, используя векторное произведение,

$$e_{3'} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3.$$

Таким образом, матрица перехода

$$(P_{i'i}) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}.$$

Теперь можем вычислить компоненты тензора T в новом базисе:

$$\begin{aligned} T_{1'1'} &= P_{1'i}P_{1'j}T_{ij} = P_{1'1}P_{1'1}T_{11} + P_{1'1}P_{1'2}T_{12} + P_{1'1}P_{1'3}T_{13} + P_{1'2}P_{1'1}T_{21} \\ &+ P_{1'2}P_{1'2}T_{22} + P_{1'2}P_{1'3}T_{23} + P_{1'3}P_{1'1}T_{31} + P_{1'3}P_{1'2}T_{32} + P_{1'3}P_{1'3}T_{33} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{3} + 2 + 0 + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}, \\ T_{1'2'} &= P_{1'i}P_{2'j}T_{ij} = P_{1'1}P_{2'1}T_{11} + P_{1'1}P_{2'2}T_{12} + P_{1'1}P_{2'3}T_{13} + P_{1'2}P_{2'1}T_{21} \\ &+ P_{1'2}P_{2'2}T_{22} + P_{1'2}P_{2'3}T_{23} + P_{1'3}P_{2'1}T_{31} + P_{1'3}P_{2'2}T_{32} + P_{1'3}P_{2'3}T_{33} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 + 0 - \frac{1}{2\sqrt{3}} + 0 + \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0, \\ T_{1'3'} &= P_{1'i}P_{3'j}T_{ij} = P_{1'1}P_{3'1}T_{11} + P_{1'1}P_{3'2}T_{12} + P_{1'1}P_{3'3}T_{13} + P_{1'2}P_{3'1}T_{21} \\ &+ P_{1'2}P_{3'2}T_{22} + P_{1'2}P_{3'3}T_{23} + P_{1'3}P_{3'1}T_{31} + P_{1'3}P_{3'2}T_{32} + P_{1'3}P_{3'3}T_{33} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + 0 - \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{3\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \\ T_{2'1'} &= P_{2'i}P_{1'j}T_{ij} = P_{2'1}P_{1'1}T_{11} + P_{2'1}P_{1'2}T_{12} + P_{2'1}P_{1'3}T_{13} + P_{2'2}P_{1'1}T_{21} \\ &+ P_{2'2}P_{1'2}T_{22} + P_{2'2}P_{1'3}T_{23} + P_{2'3}P_{1'1}T_{31} + P_{2'3}P_{1'2}T_{32} + P_{2'3}P_{1'3}T_{33} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2\sqrt{3}} + 0 + \frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_{2'2'} &= P_{2'i}P_{2'j}T_{ij} = P_{2'1}P_{2'1}T_{11} + P_{2'1}P_{2'2}T_{12} + P_{2'1}P_{2'3}T_{13} + P_{2'2}P_{2'1}T_{21} \\
&+ P_{2'2}P_{2'2}T_{22} + P_{2'2}P_{2'3}T_{23} + P_{2'3}P_{2'1}T_{31} + P_{2'3}P_{2'2}T_{32} + P_{2'3}P_{2'3}T_{33} \\
&= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1, \\
T_{2'3'} &= P_{2'i}P_{3'j}T_{ij} = P_{2'1}P_{3'1}T_{11} + P_{2'1}P_{3'2}T_{12} + P_{2'1}P_{3'3}T_{13} + P_{2'2}P_{3'1}T_{21} \\
&+ P_{2'2}P_{3'2}T_{22} + P_{2'2}P_{3'3}T_{23} + P_{2'3}P_{3'1}T_{31} + P_{2'3}P_{3'2}T_{32} + P_{2'3}P_{3'3}T_{33} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \\
T_{3'1'} &= P_{3'i}P_{1'j}T_{ij} = P_{3'1}P_{1'1}T_{11} + P_{3'1}P_{1'2}T_{12} + P_{3'1}P_{1'3}T_{13} + P_{3'2}P_{1'1}T_{21} \\
&+ P_{3'2}P_{1'2}T_{22} + P_{3'2}P_{1'3}T_{23} + P_{3'3}P_{1'1}T_{31} + P_{3'3}P_{1'2}T_{32} + P_{3'3}P_{1'3}T_{33} \\
&= \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{3\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{11}{3\sqrt{2}}, \\
T_{3'2'} &= P_{3'i}P_{2'j}T_{ij} = P_{3'1}P_{2'1}T_{11} + P_{3'1}P_{2'2}T_{12} + P_{3'1}P_{2'3}T_{13} + P_{3'2}P_{2'1}T_{21} \\
&+ P_{3'2}P_{2'2}T_{22} + P_{3'2}P_{2'3}T_{23} + P_{3'3}P_{2'1}T_{31} + P_{3'3}P_{2'2}T_{32} + P_{3'3}P_{2'3}T_{33} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{6}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 + 0 - \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \\
T_{3'3'} &= P_{3'i}P_{3'j}T_{ij} = P_{3'1}P_{3'1}T_{11} + P_{3'1}P_{3'2}T_{12} + P_{3'1}P_{3'3}T_{13} + P_{3'2}P_{3'1}T_{21} \\
&+ P_{3'2}P_{3'2}T_{22} + P_{3'2}P_{3'3}T_{23} + P_{3'3}P_{3'1}T_{31} + P_{3'3}P_{3'2}T_{32} + P_{3'3}P_{3'3}T_{33} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{3} + 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.
\end{aligned}
$$

◀

Пример 2. *Даны тензоры A, B и C в пространстве $\mathbb{R}^2$ с компонентами*

$$a_{11} = 5,\ a_{12} = -2,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = -1, \quad b_1 = 2,\ b_2 = -3,$$
$$c_{111} = 4,\ c_{112} = 1,\ c_{121} = -1,\ c_{122} = 2,\ c_{211} = 7,\ c_{212} = -5,\ c_{221} = 3,\ c_{222} = 6.$$

Найти компоненты тензора $D = A \otimes B + C$, то есть $d_{ijk} = a_{ij} \otimes b_k + c_{ijk}$, и вектор $f_j = d_{iji}$ (свертка тензора D по первому и третьему индексам).

► Пользуясь правилами тензорного умножения и сложения, вычисляем компоненты тензора D третьей валентности:

$$d_{111} = 14,\ d_{112} = -14,\ d_{121} = -5,\ d_{122} = 8,\ d_{211} = 9,\ d_{212} = -8,\ d_{221} = 1,\ d_{222} = 9.$$

Тогда свертка тензора D по первому и третьему индексам имеет вид:

$$f_1 = d_{i1i} = d_{111} + d_{212} = 14 - 8 = 6; \quad f_2 = d_{i2i} = d_{121} + d_{222} = -5 + 9 = 4.$$

◀

Пример 3. *Найти главные оси и главные инварианты симметричного ортогонального тензора. Выписать правый ортонормированный базис собственных направлений.*

$$5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3.$$

► Тензор имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Инварианты тензора A:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 5 + 2 + 5 = 12,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 6 + 24 + 6 = 36,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 50 - 4 - 4 - 2 - 20 - 20 = 0.$$

Найдем главные значения тензора A, для этого составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ или

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda = 0.$$

Корни данного уравнения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. Чтобы найти главные направления решим соответствующие однородные системы уравнений. Для $\lambda_1 = 0$ система принимает вид

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = 1$, получаем решение $v_1 = (1, 2, 1)^T$. Для случая $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ система вырождается в одно уравнение

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

Задавая, например, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ и $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ получаем два решения $v_2 = (-2, 1, 0)^T$ и $v_3 = (-1, 0, 1)^T$.

Вектор v_1 ортогонален каждому из векторов v_2 и v_3, поскольку они соответствуют различным главным значениям. Для построения собственного ортогонального базиса применим процесс ортогонализации к векторам v_2 и v_3. А именно, пусть $b_1 = v_2$, а вектор b_2 построим следующим образом

$$b_2 = v_3 - \frac{(v_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируем полученные ортогональные векторы и получаем ортонормированный базис

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^T,$$

$$e_2 = \frac{b_1}{|b_1|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right)^T,$$

$$e_3 = \frac{b_2}{|b_2|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right)^T.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{vmatrix} = \frac{5}{30} + \frac{4}{30} + \frac{1}{30} + \frac{20}{30} = 1 > 0,$$

то тройка векторов e_1, e_2, e_3 является правым ортонормированным базисом. А тензор A в данном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 61 \end{pmatrix}.$$

◀

Задачи к главе 1

1. В системе координат x_1, x_2, x_3 задан вектор $a = i + 5j + 6k$. Определить компоненты в новой системе координат x_1', x_2', x_3', полученной поворотом вокруг оси Oz на угол $\dfrac{\pi}{6}$.

2. Тензор T задан в левом ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 координатами $T_{11} = 0$, $T_{12} = 1$, $T_{13} = 5$, $T_{21} = 1$, $T_{22} = 0$, $T_{23} = -3$, $T_{31} = 1$, $T_{32} = 2$, $T_{33} = 1$. Найти компоненту тензора $T_{3'1'}$ в новом правом ортонормированном базисе $e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$, если известно, что орты $e_{1'}, e_{2'}$ сонаправлены векторам $a_1 = e_1 - 2e_2 + 3e_3$, $a_2 = -e_1 + e_2 + e_3$ соответственно.

3. Тензор T задан в правом ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 координатами $T_{11} = 3$, $T_{12} = 3$, $T_{13} = 1$, $T_{21} = 2$, $T_{22} = 0$, $T_{23} = 0$, $T_{31} = -1$, $T_{32} = -2$, $T_{33} = 1$. Найти компоненты тензора $T_{1'1'}$ и $T_{1'2'}$ в новом правом ортонормированном базисе $e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$, если известно, что орты $e_{1'}, e_{3'}$ сонаправлены векторам $a_1 = e_1 + e_2 - 4e_3$, $a_2 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ соответственно.

4. Тензор T задан в правом ортонормированном базисе $e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$ координатами $T_{1'2'1'} = 1$, $T_{1'3'1'} = 2$, $T_{1'1'2'} = 3$, $T_{2'1'2'} = -1$, $T_{2'2'3'} = 3$, $T_{2'3'3'} = 2$, $T_{3'3'3'} = 1$, остальные равны нулю. Найти компоненту тензора T_{311} в левом ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, если известно, что орты e_1, e_3 сонаправлены векторам $a_1 = -e_{1'} + 3e_{2'} + 2e_{3'}$, $a_2 = e_{1'} - e_{2'} + 2e_{3'}$ соответственно.

5. Найти компоненты тензора $C: c_{2ij}$, где $C = A \otimes B$ и

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Найти свёртку полученного тензора C по 1-й и 3-й компоненте, т.е. c_{iji}.

6. Найти компоненты тензора $C: c_{i1j3}$, где $C = A \otimes B$ и

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Найти полную свёртку полученного тензора C, т.е. $h_{jk} = c_{iijk}$, а затем h_{jj}.

7. Найдите компоненты тензора $C: c_{3ij21}$, где $C = A \otimes B$.

$$a_{111} = 1,\ a_{121} = 2,\ a_{131} = -1,\ a_{211} = -3,\ a_{221} = -4,\ a_{231} = -2,\ a_{311} = a_{331} = 0,\ a_{321} = 5,$$
$$a_{112} = -1,\ a_{122} = 0,\ a_{132} = 1,\ a_{212} = -5,\ a_{222} = -2,\ a_{232} = -3,\ a_{312} = a_{332} = 4,\ a_{322} = 1,$$
$$a_{113} = 1,\ a_{123} = 0,\ a_{133} = -6,\ a_{213} = a_{223} = 0,\ a_{233} = -1,\ a_{313} = -2,\ a_{323} = 0,\ a_{333} = 3,$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Найдите свёртку полученного тензора C по 2-й и 4-й компоненте, т.е. c_{ijkjm}.

8. Найти главные оси и главные инварианты симметричного ортогонального тензора. Выписать левый ортонормированный базис собственных направлений.

$$7x_1^2 + 4x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

9. Найти главные оси и главные инварианты симметричного ортогонального тензора. Выписать правый ортонормированный базис собственных направлений.

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

10. Найти главные оси и главные инварианты симметричного ортогонального тензора. Выписать левый ортонормированный базис собственных направлений.

$$11x_1^2 + 9x_2^2 + 7x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2.$$

11. Материал, характеризуемый тензором диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

помещен в однородное электрической поле с напряженностью $\vec{E}$. Найти тензор диэлектрической восприимчивости α_{ij} диэлектрика ($4\pi\alpha_{ik} = \varepsilon_{ik} - \delta_{ik}$). Найти вектор поляризации диэлектрика $\vec{P}$ и вектор электрической индукции $\vec{D}$ ($P_i = \alpha_{ik}E_k$, $D_i = \varepsilon_{ik}E_k$). Найти углы, которые векторы $\vec{P}$, $\vec{D}$ и $\vec{E}$ образуют друг с другом, если $\vec{E} = E_0\{2, 1, -2\}$.

Ответы

1. $a = (\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}, 6)$.

2. $T_{3'1'} = -\dfrac{97}{14\sqrt{3}}$.

3. $T_{1'1'} = \dfrac{1}{3}$, $T_{1'2'} = \dfrac{8}{3}$.

4. $T_{311} = \dfrac{43}{14\sqrt{6}}$.

5. $(c_{2ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $c_{i1i} = 2$, $c_{i2i} = -2$.

6. $(c_{i1j3}) = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 36 & -18 & -6 \\ -12 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $(h_{ii}) = \begin{pmatrix} -35 & -10 & 30 \\ 10 & 25 & -15 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$, $h_{ii} = -15$.

7. $(c_{3ij21}) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, $(h_{ii}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 15 & -7 & 23 & -2 & 4 & -9 \\ 4 & 2 & 0 & -27 & -27 & 2 & 3 & 10 & -1 \\ -5 & -1 & 0 & 20 & 16 & -16 & 5 & -8 & -3 \end{array}\right)$.

8. $I_1 = 18$, $I_2 = 81$, $I_3 = 108$, $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $e_2 = (\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}})$, $e_3 = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
9. $I_1 = 3$, $I_2 = -6$, $I_3 = -8$, $e_1 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $e_2 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $e_3 = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.
10. $I_1 = 27$, $I_2 = 236$, $I_3 = 672$, $e_1 = (0, 0, 1)$, $e_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $e_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

2 Симметрирование и альтернирование

Четность подстановки.

Определение 1. *Циклической подстановкой*, или *циклом*, называется такая подстановка $\pi \in S_n$, что при повторении ее достаточное число раз всякий из действительно перемещаемых ею символов может быть переведен в любой другой из этих символов. Для обозначения цикла используют запись $(i \quad \pi(i) \quad \ldots \quad \pi^{t-1}(i))$, где t – число действительно перемещаемых символов подстановки, которое называется длиной цикла.

Определение 2. Цикл длины 2 называется *транспозицией*. Каждая подстановка может быть представлена в виде произведения транспозиций.

Определение 3. Пусть $\pi = \tau_1 \ldots \tau_k$ – разложение подстановки π в произведение транспозиций. Тогда число $\varepsilon(\pi) = (-1)^k$ называется *знаком* (*четностью*) подстановки π. Подстановка называется *четной*, если $\varepsilon(\pi) = 1$, и *нечетной* в противном случае.

Предложение 1. Пусть π – цикл длины l. Тогда его четность равна $\varepsilon(\pi) = (-1)^{l-1}$.

Симметрирование и альтернирование.

Любой ортогональный тензор C валентности 2 представляется единственным образом в виде суммы симметричного тензора A и антисимметричного тензора B. В случае $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (т.е. матриц 3×3) любой симметричный тензор A представляется в виде суммы *девиатора* A_d (если $\operatorname{tr} A_d = 0$) и *шаровой части* $A_* = \frac{1}{3}(\operatorname{tr} A)E$. Итого имеем: $C = A_d + A_* + B$.

Определение 4. Операция симметрирования обозначается ( ). Операция *симметрирования* тензора A валентности q по $k \leq q$ индексам выглядит следующим образом:

$$A_{(m_1 \ldots m_k) m_{k+1} \ldots m_q} = \frac{1}{k!} \sum_{\pi(m_1 \ldots m_k)} A_{\pi(m_1) \ldots \pi(m_k) m_{k+1} \ldots m_q},$$

где $\pi(m_1 \ldots m_k)$ – перестановка.

Определение 5. Операция альтернирования обозначается [ ]. Операция *альтернирования* тензора A валентности q по $k \leq q$ индексам выглядит следующим образом:

$$A_{[m_1 \ldots m_k] m_{k+1} \ldots m_q} = \frac{1}{k!} \sum_{\pi(m_1 \ldots m_k)} \varepsilon(\pi) A_{\pi(m_1) \ldots \pi(m_k) m_{k+1} \ldots m_q}.$$

Пример 1. *Определить четность подстановки*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 7 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

► Действительно перемещаемыми символами являются 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Выберем любой из них, например, 2. $\pi(2) = 4$, $\pi(4) = 5$, $\pi(5) = 7$, $\pi(7) = 1$. Поэтому цикл можно записать как $(2 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 1)$. Выберем один из действительно перемещаемых символов, не участвующих в данном цикле, например, 6. $\pi(6) = 3$, то есть мы имеем еще один цикл $(6 \quad 3)$. Посчитать чётность данной подстановки можно тремя следующими способами:

- Данная подстановка является произведением 5 транспозиций, поэтому $\varepsilon(\pi) = (-1)^5 = -1$.
- У нас есть два цикла длины 5 и 2, поэтому $\varepsilon(\pi) = (-1)^{5+2} = -1$.
- Знак подстановки, состоящей из 7 действительно перемещаемых элементов и 2 циклов, $\varepsilon(\pi) = (-1)^{7-2} = -1$.

Следовательно, подстановка π нечетная. ◀

Пример 2. *Тензор (a_{ijk}) задан матрицей*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Найти компоненты тензоров $a_{(ij)k}$, $a_{[ij]k}$, $a_{(ijk)}$, $a_{[ijk]}$.

▶ Применяем операции симметрирования и альтернирования по двум первым индексам:

$$\begin{aligned}
a_{(11)1} &= \frac{1}{2}(a_{111} + a_{111}) = a_{111} = 7, & a_{[11]1} &= \frac{1}{2}(a_{111} - a_{111}) = 0,\\
a_{(12)1} &= \frac{1}{2}(a_{121} + a_{211}) = \frac{1}{2}(3+4) = \frac{7}{2}, & a_{[12]1} &= \frac{1}{2}(a_{121} - a_{211}) = \frac{1}{2}(3-4) = -\frac{1}{2},\\
a_{(21)1} &= \frac{1}{2}(a_{211} + a_{121}) = \frac{1}{2}(4+3) = \frac{7}{2}, & a_{[21]1} &= \frac{1}{2}(a_{211} - a_{121}) = \frac{1}{2}(4-3) = \frac{1}{2},\\
a_{(22)1} &= \frac{1}{2}(a_{221} + a_{221}) = a_{221} = 6, & a_{[22]1} &= \frac{1}{2}(a_{221} - a_{221}) = 0,\\
a_{(11)2} &= \frac{1}{2}(a_{112} + a_{112}) = a_{112} = -1, & a_{[11]2} &= \frac{1}{2}(a_{112} - a_{112}) = 0,\\
a_{(12)2} &= \frac{1}{2}(a_{122} + a_{212}) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}, & a_{[12]2} &= \frac{1}{2}(a_{122} - a_{212}) = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2},\\
a_{(21)2} &= \frac{1}{2}(a_{212} + a_{122}) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}, & a_{[21]2} &= \frac{1}{2}(a_{212} - a_{122}) = \frac{1}{2}(1-2) = -\frac{1}{2},\\
a_{(22)2} &= \frac{1}{2}(a_{222} + a_{222}) = a_{222} = 5, & a_{[22]2} &= \frac{1}{2}(a_{222} - a_{222}) = 0.
\end{aligned}$$

Вычисляем тензор, симметричный по трём индексам:

$$\begin{aligned}
a_{(111)} &= \frac{1}{3!}(a_{111} + a_{111} + a_{111} + a_{111} + a_{111} + a_{111}) = a_{111} = 7,\\
a_{(121)} &= \frac{1}{3!}(a_{121} + a_{211} + a_{112} + a_{112} + a_{211} + a_{121}) = \frac{1}{3}(3+4-1) = 2,\\
a_{(211)} &= \frac{1}{3!}(a_{211} + a_{112} + a_{121} + a_{211} + a_{121} + a_{112}) = \frac{1}{3}(4-1+3) = 2,\\
a_{(221)} &= \frac{1}{3!}(a_{221} + a_{212} + a_{122} + a_{212} + a_{221} + a_{122}) = \frac{1}{3}(6+1+2) = 3,\\
a_{(112)} &= \frac{1}{3!}(a_{112} + a_{121} + a_{211} + a_{121} + a_{112} + a_{211}) = \frac{1}{3}(-1+3+4) = 2,\\
a_{(122)} &= \frac{1}{3!}(a_{122} + a_{221} + a_{212} + a_{122} + a_{212} + a_{221}) = \frac{1}{3}(2+6+1) = 3,\\
a_{(212)} &= \frac{1}{3!}(a_{212} + a_{122} + a_{221} + a_{221} + a_{122} + a_{212}) = \frac{1}{3}(1+2+6) = 3,\\
a_{(222)} &= \frac{1}{3!}(a_{222} + a_{222} + a_{222} + a_{222} + a_{222} + a_{222}) = a_{222} = 5.
\end{aligned}$$

В результате применения операции альтернирования по трём индексам получаем тензор с нулевыми компонентами:

$$\begin{aligned}
a_{(111)} &= \frac{1}{3!}(a_{111} + a_{111} + a_{111} - a_{111} - a_{111} - a_{111}) = 0,\\
a_{(121)} &= \frac{1}{3!}(a_{121} + a_{211} + a_{112} - a_{112} - a_{211} - a_{121}) = 0,\\
a_{(211)} &= \frac{1}{3!}(a_{211} + a_{112} + a_{121} - a_{211} - a_{121} - a_{112}) = 0,\\
a_{(221)} &= \frac{1}{3!}(a_{221} + a_{212} + a_{122} - a_{212} - a_{221} - a_{122}) = 0,\\
a_{(112)} &= \frac{1}{3!}(a_{112} + a_{121} + a_{211} - a_{121} - a_{112} - a_{211}) = 0,\\
a_{(122)} &= \frac{1}{3!}(a_{122} + a_{221} + a_{212} - a_{122} - a_{212} - a_{221}) = 0,\\
a_{(212)} &= \frac{1}{3!}(a_{212} + a_{122} + a_{221} - a_{221} - a_{122} - a_{212}) = 0,\\
a_{(222)} &= \frac{1}{3!}(a_{222} + a_{222} + a_{222} - a_{222} - a_{222} - a_{222}) = 0.
\end{aligned}$$

◀

Задачи к главе 2

1. Определить четность подстановок

$$\text{а) } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \pi = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Тензор T задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выделить симметричную S и кососимметричную A части тензора T. Выписать шаровую часть и девиатор тензора S.

3. Тензор (a_{ijk}) задан матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 3 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Найти компоненты тензоров $a_{i[jk]}$, $a_{(ij)k}$, $a_{[i|j|k]}$, $a_{(i|j|k)}$, $a_{(ijk)}$, $a_{[ijk]}$. Здесь $a_{[i|j|k]}$ означает альтернирование по двум индексам i и k, исключая j.

4. Тензор $(b_{ijklmnr})$, $i, j, k, l, m, n, r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ задан своими компонентами $t_{2354136} = 12$, $t_{1345664} = 14$, $t_{3413616} = 16$, $t_{5623641} = 17$, $t_{1264635} = 21$, $t_{3426651} = 25$, остальные компоненты равны нулю. Определим тензор $a_{ijklmnr} = b_{[ijkl|m|nr]}$. Вычислить $a_{5124636}$.

5. Тензор (b_{ijklmn}), $i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3, 4, 5$ задан своими компонентами $t_{134415} = 7$, $t_{435142} = 8$, $t_{134452} = 13$, $t_{235441} = 14$, $t_{534214} = 19$, $t_{542134} = 20$, остальные компоненты равны нулю. Определим тензор $a_{ijklmn} = b_{(i|j|klmn)}$. Вычислить a_{534124}.

6. Доказать, что для симметричного по двум первым индексам тензора имеет место тождество

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3}\left(a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki}\right).$$

7. Тензор третьего ранга в $\mathbb{R}^3$ симметричен по двум первым и симметричен по двум последним индексам. Доказать, что он симметричен также и по первому и третьему индексам.

8. Тензор третьего ранга в $\mathbb{R}^3$ симметричен по двум первым индексам и антисимметричен по двум последним индексам. Доказать, что он нулевой.

9. Привести пример ненулевого тензора, для которого $a_{[ijk]} = 0$, но не симметричного по трем индексам.

10. Доказать, что для ненулевого трехвалентного тензора a в $\mathbb{R}^3$ возможно одновременное выполнение равенств $a_{(ijk)} = 0$ и $a_{[ijk]} = 0$.

Ответы

1. а) нечетная, б) четная, в) нечетная.

2. $S = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $S_d = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ $S_* = E$.

3. $(a_{i[jk]}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $(a_{(ij)k}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 9/2 & 3 & 2 \\ 9/2 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right)$,
$(a_{[i|j|k]}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -5 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $(a_{(i|j|k)}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right)$,
$(a_{(ijk)}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 12 & 12 & 7 \\ 12 & 7 & 7 & 6 \end{array}\right)$, $(a_{[ijk]}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

4. $a_{5124636} = -\dfrac{1}{48}$.

5. $a_{534124} = \dfrac{3}{20}$.

3 Неортогональные базисы и общее определение тензора. Операции над тензорами: сложение, произведение, свертка, симметрирование и альтернирование

Пусть при переходе от старой системы координат к новой базис меняется по закону:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i,$$

и обратно

$$\mathbf{e}_i = B^{i'}_i\mathbf{e}_{i'}.$$

Матрицы $A^i_{i'}$ и $B^{i'}_i$ связаны соотношениями

$$A^j_{k'} B^{k'}_i = \delta^j_i \quad B^{j'}_k A^k_{i'} = \delta^{j'}_{i'}.$$

Контравариантный одновалентный тензор: $a^{i'} = B^{i'}_i a^i$.

Ковариантный одновалентный тензор: $a_{i'} = A^i_{i'} a_i$.

Определение 1. *Тензором* валентности (p, q) называется полилинейная функция $T = T(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_q)$ от p ковекторных и q векторных аргументов

$$T(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_q) = T^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} \cdot \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_p} \eta^{i_1} \ldots \eta^{i_q},$$

компоненты которого меняются при переходе из одной системы координат в другую по следующему закону:

$$T^{j'_1 \ldots j'_p}_{i'_1 \ldots i'_q} = B^{j'_1}_{j_1} B^{j'_2}_{j_2} \ldots B^{j'_p}_{j_p} A^{i_1}_{i'_1} A^{i_2}_{i'_2} \ldots A^{i_q}_{i'_q} T^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q}.$$

Операции над тензорами:
1. Сложение: $C^k_{ij} = A^k_{ij} + B^k_{ij}$.
2. Тензорное умножение: $C^{pg}_{ijk} = A^p_i B^q_{jk}$.
3. Свертка: $S_j = A^k_{kj}$.

Определение 2. Операция симметрирования обозначается ( ). Операция *симметрирования* тензора T валентности (p, q) по $k \leq q$ индексам выглядит следующим образом:

$$T^{j'_1 \ldots j'_p}_{(i'_1 \ldots i'_k) i'_{k+1} \ldots i'_q} = \frac{1}{k!} \sum_{\pi(i'_1 \ldots i'_k)} T^{j_1 \ldots j_p}_{\pi(i'_1) \ldots \pi(i'_k) i'_{k+1} \ldots i'_q}.$$

Аналогично определяется симметризация верхних индексов ($k \leq p$); симметризовать можно только по группе индексов одного типа.

Определение 3. Операция альтернирования обозначается [ ]. Операция *альтернирования* тензора T валентности (p, q) по $k \leq q$ индексам выглядит следующим образом:

$$T^{j'_1 \ldots j'_p}_{[i'_1 \ldots i'_k] i'_{k+1} \ldots i'_q} = \frac{1}{k!} \sum_{\pi(i'_1 \ldots i'_k)} \varepsilon(\pi) T^{j_1 \ldots j_p}_{\pi(i'_1) \ldots \pi(i'_k) i'_{k+1} \ldots i'_q}.$$

Аналогично определяется альтернирование верхних индексов ($k \leq p$).

Пример 1. *Является ли тензором отображение t?*

$$t(u, v, \xi, \eta) = \begin{vmatrix} \xi(u) & \eta(u) \\ \xi(v) & \eta(v) \end{vmatrix}.$$

Если t- тензор, то найти его разложение по базису $e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l$.

► Полилинейность t следует из линейности определителя по строкам и столбцам. Имеем

$$t^{kl}_{ij} = t(e_i, e_j, e^k, e^l) = \begin{vmatrix} e^k(e_i) & e^l(e_i) \\ e^k(e_j) & e^l(e_j) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^k_i & \delta^l_i \\ \delta^k_j & \delta^l_j \end{vmatrix} = \delta^k_i \delta^l_j - \delta^k_j \delta^l_i,$$

откуда

$$t = \sum_{i,j,k,l} (\delta^k_i \delta^l_j - \delta^k_j \delta^l_i) e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l = \sum_{i,j} (e^i \otimes e^j \otimes e_i \otimes e_j - e^i \otimes e^j \otimes e_j \otimes e_i).$$

◄

Пример 2. *На* $\mathbb{R}^2$ *заданы своими координатами в базисе* $\{e_1, e_2\}$ *следующие тензоры:*

$$a_{11} = 3,\ a_{12} = 5,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2,$$
$$b^1_1 = 1,\ b^1_2 = -2,\ b^2_1 = -1,\ b^2_2 = 3.$$

Найти $a_{i'j'}$ *и* $b^{i'}_{j'}$ *в базисе* $\{e_{1'}, e_{2'}\}$*:* $e_{1'} = e_1 + 3e_2$, $e_{2'} = e_1 + 4e_2$.

► Выпишем матрицу перехода $A^i_{i'}$ от старой системы координат к новой и найдём матрицу перехода $B^{i'}_i$ от новой системы координат к старой как обратную к $A^i_{i'}$:

$$(A^i_{i'}) = \begin{pmatrix} A^1_{1'} & A^1_{2'} \\ A^2_{1'} & A^2_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (B^{i'}_i) = \left(A^i_{i'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} B^{1'}_1 & B^{1'}_2 \\ B^{2'}_1 & B^{2'}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем координаты тензора a_{ij} в новом базисе:

$$\begin{aligned}
a_{1'1'} = A^i_{1'}A^j_{1'}a_{ij} &= A^1_{1'}A^1_{1'}a_{11} + A^1_{1'}A^2_{1'}a_{12} + A^2_{1'}A^1_{1'}a_{21} + A^2_{1'}A^2_{1'}a_{22} \\
&= 1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 2 = 39, \\
a_{1'2'} = A^i_{1'}A^j_{2'}a_{ij} &= A^1_{1'}A^1_{2'}a_{11} + A^1_{1'}A^2_{2'}a_{12} + A^2_{1'}A^1_{2'}a_{21} + A^2_{1'}A^2_{2'}a_{22} \\
&= 1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 4\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 2 = 50, \\
a_{2'1'} = A^i_{2'}A^j_{1'}a_{ij} &= A^1_{2'}A^1_{1'}a_{11} + A^1_{2'}A^2_{1'}a_{12} + A^2_{2'}A^1_{1'}a_{21} + A^2_{2'}A^2_{1'}a_{22} \\
&= 1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot 5 + 4\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 2 = 46, \\
a_{2'2'} = A^i_{2'}A^j_{2'}a_{ij} &= A^1_{2'}A^1_{2'}a_{11} + A^1_{2'}A^2_{2'}a_{12} + A^2_{2'}A^1_{2'}a_{21} + A^2_{2'}A^2_{2'}a_{22} \\
&= 1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 4\cdot 5 + 4\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot 4\cdot 2 = 59.
\end{aligned}$$

Находим компоненты тензора $b^{i'}_{j'}$:

$$\begin{aligned}
b^{1'}_{1'} = B^{1'}_i A^j_{1'} b^i_j &= B^{1'}_1 A^1_{1'} b^1_1 + B^{1'}_1 A^2_{1'} b^1_2 + B^{1'}_2 A^1_{1'} b^2_1 + B^{1'}_2 A^2_{1'} b^2_2 \\
&= 4\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 3\cdot 3 = -28, \\
b^{1'}_{2'} = B^{1'}_i A^j_{2'} b^i_j &= B^{1'}_1 A^1_{2'} b^1_1 + B^{1'}_1 A^2_{2'} b^1_2 + B^{1'}_2 A^1_{2'} b^2_1 + B^{1'}_2 A^2_{2'} b^2_2 \\
&= 4\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot 4\cdot(-2) + (-1)\cdot 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 4\cdot 3 = -39, \\
b^{2'}_{1'} = B^{2'}_i A^j_{1'} b^i_j &= B^{2'}_1 A^1_{1'} b^1_1 + B^{2'}_1 A^2_{1'} b^1_2 + B^{2'}_2 A^1_{1'} b^2_1 + B^{2'}_2 A^2_{1'} b^2_2 \\
&= (-3)\cdot 1\cdot 1 + (-3)\cdot 3\cdot(-2) + 1\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot 3\cdot 3 = 23, \\
b^{2'}_{2'} = B^{2'}_i A^j_{2'} b^i_j &= B^{2'}_1 A^1_{2'} b^1_1 + B^{2'}_1 A^2_{2'} b^1_2 + B^{2'}_2 A^1_{2'} b^2_1 + B^{2'}_2 A^2_{2'} b^2_2 \\
&= (-3)\cdot 1\cdot 1 + (-3)\cdot 4\cdot(-2) + 1\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot 4\cdot 3 = 32.
\end{aligned}$$

◄

Пример 3. *Найти полную свёртку тензора* t *из примера 1 при условии* $\dim V = n$.

► Так как у тензора два верхних и два нижних индекса, то существуют две полные свёртки t^{ij}_{ij} и t^{ji}_{ij}. Согласно примеру 1 $t^{kl}_{ij} = \delta^k_i\delta^l_j - \delta^k_j\delta^l_i$, тогда

$$t^{ij}_{ij} = \delta^i_i\delta^j_j - \delta^i_j\delta^j_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq j, \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Откуда $\sum\limits_{i,j} t^{ij}_{ij} = n^2 - n$.

Аналогично

$$t^{ji}_{ij} = \delta^j_i \delta^i_j - \delta^j_j \delta^i_i = \begin{cases} -1, & \text{если } i \neq j, \\ \ \ 0, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

и $\sum\limits_{i,j} t^{ji}_{ij} = n - n^2$. ◀

Пример 4. *В пространстве* $\mathbb{R}^2$ *заданы тензоры* a *ранга* $(1,1)$, b *ранга* $(0,2)$ *и* c *ранга* $(0,2)$ *с координатами*

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $a^i_{[j} b_{|i|k]}$, $a^i_{(j} b_{k)i}$, $a^i_j b_{ik} + c_{jk}$.

▶ Находим тензоры $a^i_j b_{ik}$ и $a^i_j b_{ki}$:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 b_{11} + a^2_1 b_{21} & a^1_1 b_{12} + a^2_1 b_{22} \\ a^1_2 b_{11} + a^2_2 b_{21} & a^1_2 b_{12} + a^2_2 b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \\ (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 1 & (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -10 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a^1_1 b_{11} + a^2_1 b_{12} & a^1_1 b_{21} + a^2_1 b_{22} \\ a^1_2 b_{11} + a^2_2 b_{12} & a^1_2 b_{21} + a^2_2 b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 0 & (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Применяем операции альтернирования к первому тензору и симметрирования ко второму

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a^i_1 b_{i1} - a^i_1 b_{i1}}{2} & \dfrac{a^i_1 b_{i2} - a^i_2 b_{i1}}{2} \\ \dfrac{a^i_2 b_{i1} - a^i_1 b_{i2}}{2} & \dfrac{a^i_2 b_{i2} - a^i_2 b_{i2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8-8}{2} & \dfrac{6-(-10)}{2} \\ \dfrac{(-10)-6}{2} & \dfrac{0-0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \dfrac{a^i_1 b_{1i} + a^i_1 b_{1i}}{2} & \dfrac{a^i_1 b_{2i} + a^i_2 b_{1i}}{2} \\ \dfrac{a^i_2 b_{1i} + a^i_1 b_{2i}}{2} & \dfrac{a^i_2 b_{2i} + a^i_2 b_{2i}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5+5}{2} & \dfrac{7+(-10)}{2} \\ \dfrac{(-10)+7}{2} & \dfrac{(-2)+(-2)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем сумму тензоров $a^i_j b_{ik}$ и c_{jk}:

$$\begin{pmatrix} a^i_1 b_{i1} + c_{11} & a^i_1 b_{i2} + c_{12} \\ a^i_2 b_{i1} + c_{21} & a^i_2 b_{i2} + c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+6 & 6+7 \\ (-10)+3 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

◀

Задачи к главе 3

1. Какие из следующих выражений являются тензорами?
   (а) $t(u,v) = 2u^1v^3 + u^2v^1 - u^3v^3$;
   (б) $t(u,v) = u^1v^1 - 3u^2v^2 + v^1v^3$;
   (в) $t(u,v) = (u^1 - v^1)^2 + (u^2 - v^2)^2 + (u^3 - v^3)^2$.

2. На V^2 заданы своими координатами в базисе $\{e_1, e_2\}$ следующие тензоры:

$$a_{11} = 7,\ a_{12} = 6,\ a_{21} = 4,\ a_{22} = 1$$
$$b^1_1 = 1,\ b^1_2 = 5,\ b^2_1 = -2,\ b^2_2 = 4$$
$$c^1_1 = 1,\ c^1_2 = 2,\ c^2_1 = 1,\ c^2_2 = -3.$$

   Найти координаты $a_{1'2'}$, $b^{2'}_{1'}$, $c^{1'}_{2'}$ этих тензоров в базисе $\{e_{1'}, e_{2'}\}$: $e_{1'} = 3e_1 + e_2$, $e_{2'} = e_1 - e_2$. Вычислить также в новом базисе $\{e_{1'}, e_{2'}\}$ тензор $a_{ij}c^j_k$.

3. На V^2 заданы своими координатами в базисе $\{e_1, e_2\}$ следующие тензоры:

$$a_{11} = 3,\ a_{12} = -1,\ a_{21} = 2,\ a_{22} = 5$$
$$b^1_1 = 2,\ b^1_2 = 2,\ b^2_1 = 3,\ b^2_2 = 1$$
$$c^1_1 = 5,\ c^1_2 = -3,\ c^2_1 = 2,\ c^2_2 = -1.$$

   Найти координаты $a_{2'1'}$, $b^{1'}_{1'}$, $c^{2'}_{2'}$ этих тензоров в базисе $\{e_{1'}, e_{2'}\}$: $e_{1'} = e_1 - 2e_2$, $e_{2'} = 4e_1 + e_2$. Вычислить также в новом базисе $\{e_{1'}, e_{2'}\}$ тензор $a_{ij}b^i_k$.

4. Посчитать полную свёртку тензоров:
   (а) a^i_j,
   (б) $a^i_j b_{kl}$,
   (в) $a^i_j c^k d_l$,
   (г) $b_{ij} c^k c^l$.
   Где

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (c^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (d_i) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В пространстве V^3 заданы тензоры b ранга $(0,2)$ и a ранга $(1,1)$ с матрицами относительно некоторого базиса:

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 5 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Найти матрицы тензоров: $a^i_{[j} b_{|i|k]}$, $a^i_{(j} b_{k)i}$, $a^i_j b_{ki} + c_{jk}$.

6. Доказать, что для тензора четвертого ранга a в $\mathbb{R}^n$ справедливо равенство $a^{ij}_{kl} = a^{(ij)}_{kl} + a^{[ij]}_{kl}$.

7. В $\mathbb{R}^n$ заданы тензоры a^{kl}_{ij}, $b^{kl}_{ij} = a^{kl}_{(ij)}$ и $c^{kl}_{ij} = a^{[kl]}_{ij}$. Доказать, что $b^{[kl]}_{ij} = c^{kl}_{(ij)}$.

Ответы

1. (а) тензор, (б) не тензор, (в) не тензор.

2. $a_{1'2'} = 6$, $b^{2'}_{1'} = \dfrac{7}{2}$, $c^{1'}_{2'} = \dfrac{3}{4}$, $a_{ij}c^j_k = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $a_{2'1'} = 12$, $b^{1'}_{1'} = \dfrac{2}{3}$, $c^{2'}_{2'} = \dfrac{61}{9}$, $a_{ij}b^i_k = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$.

4. (а) $a^i_i = -1$, (б) нельзя посчитать полную свертку, (в) $a^i_i c^j d_j = -14$, $a^i_j c^j d_i = 32$,
   (г) $b_{ij} c^i c^j = 94$.

5. $(a^i_{[j} b_{|i|k]}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{15}{2} & -1 \\ \frac{15}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $(a^i_{(j} b_{k)i}) = \begin{pmatrix} 6 & \frac{13}{2} & 5 \\ \frac{13}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 5 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$, $(a^i_j b_{ki} + c_{jk}) = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 16 & -1 & -7 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

4 Метрический тензор. Основные понятия и свойства. Понятие псевдотензора

Напомним, что задание билинейной формы эквивалентно заданию дважды ковариантного тензора ϕ_{ij}: $\phi(x,y) = \phi_{ij}x^i y^j$, коэффициенты которого выражаются через базис следующим образом: $\phi_{ij} = \phi(e_i, e_j)$.

Метрический тензор: $g_{ij} = e_i e_j$, e_i – компоненты базиса в векторном пространстве.

Свойства метрического тензора:

1. Условие симметричности: $g_{ij} = g_{ji}$.
2. Условие невырожденности: $\det|g_{ij}| = g \neq 0$.

Дважды контравариантный тензор g^{ij}: $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$.

Скалярное произведение: $(x,y) = g_{ij}x^i y^j$, $\quad (x,x) = g_{ij}x^i x^j$ (скалярный квадрат).

Угол между векторами: $\cos\phi = \dfrac{g_{ij}x^i y^j}{\sqrt{x_i x^i}\sqrt{y_j y^j}}$.

Ортогональность векторов x и y: $(x,y) = 0$.

Для метрического тензора справедлив тензорный закон преобразования компонент при переходе в другую систему координат:

$$g_{i'j'} = A^i_{i'}A^j_{j'}g_{ij}, \quad g^{i'j'} = B^{i'}_i B^{j'}_j g^{ij}.$$

Поднятие и опускание индексов.

1. Опускание индекса производится с помощью тензора g_{ij}: $x_i = g_{ij}x^j$, $a^{\cdot\cdot k\cdot}_{ij\cdot l} = g_{pj}a^{\cdot pk\cdot}_{i\cdot\cdot l}$.
2. Поднятие индекса производится с помощью тензора g^{ij}: $x^i = g^{ij}x_j$, $a^{\cdot jk\cdot}_{i\cdot\cdot l} = g^{pj}a^{\cdot\cdot k\cdot}_{ip\cdot l}$.
3. $g^{\cdot j}_{i\cdot} = g^{jp}g_{ip} = \delta^j_i$ – тензор подстановки, т.к. $a_{jk}g^k_i = a_{ji}$.

Псевдотензор.

Определение 1. *Псевдотензором* называется обьект P, определяемый в каждом ориентированном базисе набором чисел $P^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_q}$ так, что при переходе от одного такого базиса к другому эти числа преобразуются по формуле

$$P^{j'_1\ldots j'_p}_{i'_1\ldots i'_q} = \operatorname{sign}(\det A) B^{j'_1}_{j_1}B^{j'_2}_{j_2}\ldots B^{j'_p}_{j_p}A^{i_1}_{i'_1}A^{i_2}_{i'_2}\ldots A^{i_q}_{i'_q}T^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_q}.$$

Свойства псевдотензора:

1. Результат умножения псевдотензора на число и сумма двух однотипных псевдотензоров - псевдотензор.
2. Сумма тензора и псевдотензора не определена.
3. Перестановка однотипных индексов псевдотензора дает псевдотензор.
4. Произведение двух псевдотензоров - тензор.
5. Произведение тензора и псевдотензора - псевдотензор.
6. Свертка псевдотензора дает псевдотензор.

Векторное произведение.

Пусть даны два вектора x^i, y^j и два ковектора x_i, y_j. Тогда u_k и u^k – ковариантные и контравариантные компоненты векторного произведения векторов x^i, y^j и ковекторов x_i, y_j, соответственно:

$$u_k = \varepsilon_{ijk}x^i y^j, \quad u^k = \varepsilon^{ijk}x_i y_j.$$

Здесь $\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g}\delta_{ijk}$ и $\varepsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta_{ijk}$ – ковариантный и контравариантный тензор Леви-Чивиты, соответственно (в правой системе координат)

$$\delta_{123} = \delta_{231} = \delta_{312} = 1, \quad \delta_{321} = \delta_{213} = \delta_{132} = -1, \quad \delta_{ijk} = 0 \text{ иначе.}$$

Геометрический смысл. $u_k = \varepsilon_{ijk} x^i y^j$ – это ориентированная площадь параллелограмма, стороны которого $\vec{x}$ и $\vec{y}$, представленная псевдовектором, длина которого равна площади, а направление ортогонально к плоскости параллелограмма.

Свойства:
1. $\varepsilon_{ijk} = (e_i, e_j, e_k)$ – смешанное произведение, построенное на базисных векторах.
2. $V = \varepsilon_{ijk} x^i y^j z^k$ – ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$.

Примеры псевдотензоров:
1. Ориентированный объем - псевдоскаляр.
2. Результат векторного произведения в трехмерном пространстве, например вектор момента импульса - псевдовектор.
3. Символы Леви-Чивиты.

Ковариантный ранг (число нижних индексов)	Контравариантный ранг (число верхних индексов)		
	0	1	2
0	Скаляр, длина вектора, интервал (теория относительности), скалярная кривизна	Вектор (алгебра), 4-векторы в специальной теории относительности	Тензор энергии-импульса, бивектор, обратный метрический тензор
1	Ковектор, линейная форма, градиент скалярной функции	Линейный оператор $L : V \to V$, дельта Кронекера	
2	Билинейная форма, Скалярное произведение, Метрический тензор, Тензор Риччи, Тензор кручения, Тензор электромагнитного поля, Тензор напряжений, Тензор деформаций, Квадрупольный момент	Линейный оператор $L : V^2 \to V$	Тензор упругости (жесткости)
3	Тензор Леви-Чивиты	Тензор кривизны Римана	
r	Полилинейная форма, Форма объема	Линейный оператор $L : V^r \to V$	

Таблица 1: Примеры тензоров сгруппированных по валентности.

Пример 1. *Является ли тензором функция $\varepsilon(u, v, \xi) = (\xi, u, v)$? Если да, то какова его валентность?*

► Проверяем полилинейность:

$$\varepsilon(u, v, \alpha\xi + \beta\zeta) = (\alpha\xi + \beta\zeta) \cdot (u \times v) = \alpha\xi \cdot (u \times v) + \beta\zeta \cdot (u \times v) = \alpha\varepsilon(u, v, \xi) + \beta\varepsilon(u, v, \zeta),$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\alpha u + \beta w, v, \xi) &= \xi \cdot ((\alpha u + \beta w) \times v) = \xi \cdot (\alpha u \times v) + \xi \cdot (\beta w \times v) \\ &= \alpha\xi \cdot (u \times v) + \beta\xi \cdot (w \times v) = \alpha\varepsilon(u, v, \xi) + \beta\varepsilon(w, v, \xi),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(u, \alpha v + \beta w, \xi) &= \xi \cdot (u \times (\alpha v + \beta w)) = \xi \cdot (u \times \alpha v) + \xi \cdot (u \times \beta w) \\
&= \alpha \xi \cdot (u \times v) + \beta \xi \cdot (u \times w) = \alpha \varepsilon(u, v, \xi) + \beta \varepsilon(u, w, \xi).
\end{aligned}
$$

Таким образом, смешанное произведение является тензором.

Так как векторное произведение преобразует пару векторов из одного пространства в вектор из сопряженного, и скалярное произведение имеет дело с парой векторов из разных пространств, то данный тензор может иметь только валентности $(3, 0)$ или $(0, 3)$. ◄

Пример 2. *Метрический тензор и тензор* a_{ij} *заданы соответственно матрицами:*

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Найти a^{ij}.

► Для поднятия индекса найдём

$$
g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Далее вычисляем компоненты тензора a^{ij}:

$$
\begin{aligned}
a^{11} = g^{1i} g^{1j} a_{ij} &= g^{11} g^{11} a_{11} + g^{11} g^{12} a_{12} + g^{12} g^{11} a_{21} + g^{12} g^{12} a_{22} \\
&= 5 \cdot 5 \cdot 0 + 5 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \\
a^{12} = g^{1i} g^{2j} a_{ij} &= g^{11} g^{21} a_{11} + g^{11} g^{22} a_{12} + g^{12} g^{21} a_{21} + g^{12} g^{22} a_{22} \\
&= 5 \cdot 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 15, \\
a^{21} = g^{2i} g^{1j} a_{ij} &= g^{21} g^{11} a_{11} + g^{21} g^{12} a_{12} + g^{22} g^{11} a_{21} + g^{22} g^{12} a_{22} \\
&= 2 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 7, \\
a^{22} = g^{2i} g^{2j} a_{ij} &= g^{21} g^{21} a_{11} + g^{21} g^{22} a_{12} + g^{22} g^{21} a_{21} + g^{22} g^{22} a_{22} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5.
\end{aligned}
$$

◄

Пример 3. *Доказать, что*

$$
\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.
$$

► Рассмотрим

$$
\begin{vmatrix} g_{il} & g_{im} & g_{in} \\ g_{jl} & g_{jm} & g_{jn} \\ g_{kl} & g_{km} & g_{kn} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} g_{1l} & g_{1m} & g_{1n} \\ g_{2l} & g_{2m} & g_{2n} \\ g_{3l} & g_{3m} & g_{3n} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \det G.
$$

Осталось заметить, что это - инвариантная (верная не только в ортонормированных базисах) форма записи доказываемого утверждения. ◄

Пример 4. *В аффинной правой системе координат* e_1, e_2, e_3 *заданы векторы* $u = 3e_1 + e_2 + e_3$, $v = e_1 - e_2 + 2e_3$. *Фундаментальный тензор*

$$
g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.
$$

Найти единичный вектор $w = (w^i)$, ортогональный векторам u и v, такой, что тройка векторов u, v, w правая.

► Найдем удовлетворяющий условиям ковектор $(\tilde{w}_i)$ как результат векторного произведения u и v. Так как $\sqrt{g} = 1$, то символ Леви-Чивиты $\varepsilon_{ijk} = \delta_{ijk}$, и компоненты ковектора

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_1 &= \varepsilon_{ij1}u^i v^j = \varepsilon_{231}u^2v^3 + \varepsilon_{321}u^3v^2 = u^2v^3 - u^3v^2 = 1\cdot 2 - 1\cdot(-1) = 3,\\
\tilde{w}_2 &= \varepsilon_{ij2}u^i v^j = \varepsilon_{312}u^3v^1 + \varepsilon_{132}u^1v^3 = u^3v^1 - u^1v^3 = 1\cdot 1 - 3\cdot 2 = -5,\\
\tilde{w}_3 &= \varepsilon_{ij3}u^i v^j = \varepsilon_{123}u^1v^2 + \varepsilon_{213}u^2v^1 = u^1v^2 - u^2v^1 = 3\cdot(-1) - 1\cdot 1 = -4.
\end{aligned}$$

Для перехода от ковектора к вектору вычислим

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2\\ -5 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда компоненты вектора (w^i)

$$\begin{aligned}
\tilde{w}^1 &= g^{1i}\tilde{w}_i = g^{11}\tilde{w}_1 + g^{12}\tilde{w}_2 + g^{13}\tilde{w}_3 = 6\cdot 3 + (-5)\cdot(-5) + 2\cdot(-4) = 35,\\
\tilde{w}^2 &= g^{2i}\tilde{w}_i = g^{21}\tilde{w}_1 + g^{22}\tilde{w}_2 + g^{23}\tilde{w}_3 = (-5)\cdot 3 + 5\cdot(-5) + (-2)\cdot(-4) = -32,\\
\tilde{w}^3 &= g^{3i}\tilde{w}_i = g^{31}\tilde{w}_1 + g^{32}\tilde{w}_2 + g^{33}\tilde{w}_3 = 2\cdot 3 + (-2)\cdot(-5) + 1\cdot(-4) = 12.
\end{aligned}$$

Последним действием выполним нормировку найденного вектора:

$$|\tilde{w}| = \sqrt{g_{ij}\tilde{w}^i\tilde{w}^j} = \sqrt{\tilde{w}_j\tilde{w}^j} = \sqrt{3\cdot 35 + (-5)\cdot(-32) + (-4)\cdot 12} = \sqrt{121} = 11,$$
$$w = \frac{\tilde{w}}{|\tilde{w}|} = \frac{35}{11}e_1 - \frac{32}{11}e_2 + \frac{12}{11}e_3.$$

◄

Задачи к главе 4

1. Метрический тензор и тензоры a_{ij} и $b^{i\cdot}_{\cdot j}$ заданы соответственно матрицами:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$$

   Найти a^{ij} и $b^{\cdot j}_{i\cdot}$.

2. Метрический тензор и тензоры a_{ij} и $b^{i\cdot}_{\cdot j}$ заданы соответственно матрицами:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3\\ 1 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3\\ -2 & 0 & 5\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

   Найти a^{ij} и $b^{\cdot j}_{i\cdot}$.

3. Заданы: базис $e_1 = 3i + j + k$, $e_2 = i + 2j + k$, $e_1 = i - j + 2k$, тензор $(t^i_j) = (e_1 + e_2 - 2e_3)\otimes(e^1 + 3e^3) + (2e_1 - e_3)\otimes(e^1 + e^2 - 4e^3)$, вектор $v = e_1 - e_2 + 2e_3$. Выписать координаты тензора (t^i_j). Найти длину ковектора u, если $u_j = t^i_j v_i$.

4. В аффинной правой системе координат e_1, e_2 заданы ковекторы $u = -e^1 + 2e^2 + e^3$, $v = e^1 + e^2 - 2e^3$. Фундаментальный тензор

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти единичный ковектор w, ортогональный ковекторам u и v.

5. В аффинной левой системе координат e_1, e_2, e_3 заданы векторы $u = e_1 + 2e_2 + 4e_3$, $v = -e_1 - 2e_2 + 2e_3$. Фундаментальный тензор

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти единичный ковектор w, ортогональный векторам u и v, такой, что тройка векторов u, v, w правая.

6. Задана аффинная система координат $e_1 = 3i + j + 2k$, $e_2 = 2i - j + k$, $e_3 = -i + j - 2k$ и ковекторы $u = e^1 + 3e^2 + e^3$, $v = e^1 + 2e^2 - e^3$. Вычислить w_2, где $w = u \times v$.

7. Доказать, что
1) $\sum\limits_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$;
2) $\sum\limits_{k,j} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$;
3) $\sum\limits_{k,j,i} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

8. Доказать, что $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sqrt{g}\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ – псевдотензор, где

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } i_1 \dots i_n \text{ попарно различны и порядок} \\ & i_1 \dots i_n \text{ соответствует ориентации базиса,} \\ -1, & \text{если } i_1 \dots i_n \text{ попарно различны и порядок} \\ & i_1 \dots i_n \text{ не соответствует ориентации базиса,} \\ 0, & \text{если среди } i_1 \dots i_n \text{ есть равные,} \end{cases}$$

и каждый индекс пробегает значения $1, \dots, n$.

9. Доказать, что псевдотензор γ из задачи 8 антисимметричен, т.е. $\gamma_{[i_1 i_2 \dots i_n]} = \gamma_{i_1 i_2 \dots i_n}$.

Ответы

1. $a^{ij} = \begin{pmatrix} -18 & 30 \\ 32 & -53 \end{pmatrix}$, $b_{i\cdot}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} -22 & 12 \\ 43 & 24 \end{pmatrix}$.

2. $a^{ij} = \dfrac{1}{169}\begin{pmatrix} 68 & -101 & 38 \\ -114 & 224 & -53 \\ 260 & -232 & 204 \end{pmatrix}$, $b_{i\cdot}^{\cdot j} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} -51 & 95 & 119 \\ 27 & -113 & -95 \\ -48 & 172 & 151 \end{pmatrix}$.

3. $t_1^1 = 3$, $t_2^1 = 2$, $t_3^1 = -5$, $t_1^2 = 1$, $t_2^2 = 0$, $t_3^2 = 3$, $t_1^3 = -3$, $t_2^3 = -1$, $t_3^3 = -2$, $|u| = \sqrt{41}$.

4. $w = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{15}}, -\dfrac{4}{\sqrt{15}}, -\dfrac{1}{\sqrt{13}}\right)^T$.

5. $w = \left(\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{31}}, -\sqrt{\dfrac{10}{31}}, 0\right)^T$.

6. $w_2 = -\dfrac{9}{4}$.

5 Тензорные поля. Криволинейные системы координат и преобразование тензора. Коэффициенты Ламе. Градиент, дивергенция векторного поля, лапласиан, ротор

Определение 1. *Касательное пространство* T_x в точке аффинного пространства A^n есть векторное пространство той же размерности, образованное множеством всех векторов с началом в этой же точке. Касательные пространства в разных точках естественным образом отождествляются между собой с помощью параллельного переноса.

Определение 2. Говорят, что в области $U \subset A^n$ задано *тензорное поле t валентности* (p, q), если задано отображение $x \to t_x$, которое в каждой точке этой области ставит в соответствии тензор указанной валентности в ее касательное пространство.

Например, при $p = 1, q = 2$ имеем $t_x(u, v, w) = t^i_{jk}(x^1, \dots, x^n) w_i u^j v^k$.

Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ – декартова система координат в E^n, $(u^1, \dots, u^n)$ – криволинейная система координат в $G \subset E^n$.

Определение 3. В области G координатными линиями являются прямые линии $u^k = c^k$, $k \neq i$, $u^i = t$, где $c^k = \mathrm{const}$, t – параметр. Тогда при отображении области G в E^n они переходят в кривые линии γ_i, уравнения которых записываются так:

$$x^r = x^r(c^1, c^2, \dots, c^{i-1}, t, c^{i+1}, \dots, c^n), \quad r = 1, \dots, n.$$

Кривые γ_i в области G называются *координатными линиями* в криволинейных координатах $(u^1, \dots, u^n)$.

Через каждую точку $M(u^1, \dots, u^n)$ проходит n координатных линий $\gamma_i(t)$, $i = 1, \dots, n$.

Координаты *касательного вектора* $s_i(M)$ к $\gamma_i(t)$ в точке $M(u^1, \dots, u^n)$ относительно основного фиксированного базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ выражаются по формулам:

$$s_i(M) = \frac{\partial x^k}{\partial u^i} e_k.$$

Замечание. Введение криволинейной системы координат в области G индуцирует в каждой точке M базис $\{s_1(M), s_2(M), \dots, s_n(M)\}$, который называется *локальным базисом в точке* M.

Преобразование тензора при переходе из одной системы координат в другую.

Рассмотрим тензорное поле валентности (1, 2) $V^i_{jk}(M) = V^i_{jk}(x^1, \dots, x^n)$. Тогда при переходе в новую систему координат $\{x^{1'}, \dots, x^{n'}\}$ компоненты тензорного поля будут преобразовываться по следующему закону:

$$V^{i'}_{j'k'}(M) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M) \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M) \cdot V^i_{jk}(M).$$

Локальный базис $s_i(M)$, соответственно, в новой системе координат $\{x^{1'}, \dots, x^{n'}\}$ преобразуется как

$$s_{i'}(M) = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} s_k(M).$$

В случае ортогональных криволинейных координат в E^3 вводятся *коэффициенты Ламе*:

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u^i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Градиент функции:

$$(\operatorname{grad} f)_{x^i} = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Дивергенция векторного поля a:

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \cdot \left[\frac{\partial(H_2 H_3 a_{x^1})}{\partial x^1} + \frac{\partial(H_3 H_1 a_{x^2})}{\partial x^2} + \frac{\partial(H_1 H_2 a_{x^3})}{\partial x^3}\right].$$

Лапласиан:

$$\triangle f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\right].$$

Ротор векторного поля a:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot} a)_{x^1} &= \frac{1}{H_2 H_3}\left\{\frac{\partial(H_3 a_{x^3})}{\partial x^2} - \frac{\partial(H_2 a_{x^2})}{\partial x^3}\right\},\\
(\operatorname{rot} a)_{x^2} &= \frac{1}{H_1 H_3}\left\{\frac{\partial(H_1 a_{x^1})}{\partial x^3} - \frac{\partial(H_3 a_{x^3})}{\partial x^1}\right\},\\
(\operatorname{rot} a)_{x^3} &= \frac{1}{H_2 H_1}\left\{\frac{\partial(H_2 a_{x^2})}{\partial x^1} - \frac{\partial(H_1 a_{x^1})}{\partial x^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Составляющие векторов и тензоров в локальном нормированном базисе называют *физическими компонентами*. Физические и обычные компоненты связаны соотношениями вида

$$a_i^f = \frac{1}{H_i} a_i, \quad a_f^i = H_i a^i,$$
$$a_{ij}^f = \frac{1}{H_i H_j} a_{ij} = \frac{H_j}{H_i} a_i^j = \frac{H_i}{H_j} a_j^i = H_i H_j a^{ij}.$$

Пример 1. *Найти координатные поверхности, локальный базис, метрический тензор и коэффициенты Ламе для цилиндрической системы координат:*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi,\\ y = \rho\sin\varphi,\\ z = z, \end{cases}$$

где $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, +\infty)$.

► Чтобы найти координатные поверхности поочередно фиксируем криволинейные координаты:

1)$\rho = \rho_0$

$$\begin{cases} x = \rho_0\cos\varphi,\\ y = \rho_0\sin\varphi,\\ z = z. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho_0^2,\\ z = z. \end{cases}$$

Получили круговой цилиндр радиуса ρ_0 с осью Oz.

2)$\varphi = \varphi_0$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi_0, \\ y = \rho\sin\varphi_0, \\ z = z. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\sin\varphi_0 - y\cos\varphi_0 = 0, \\ z = z. \end{cases}$$

Так как $\rho \geq 0$, то данная система описывает полуплоскость, проходящую через ось Oz.

3)$z = z_0$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z_0. \end{cases}$$

Получаем плоскость, параллельную плоскости Oxy.

Далее вычисляем локальный базис, считая $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $u^1 = \rho$, $u^2 = \varphi$, $u^3 = z$.

$$\begin{aligned} s_1(M) &= \frac{\partial x^k}{\partial u^1}e_k = \frac{\partial x}{\partial \rho}e_1 + \frac{\partial y}{\partial \rho}e_2 + \frac{\partial z}{\partial \rho}e_3 = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2, \\ s_2(M) &= \frac{\partial x^k}{\partial u^2}e_k = \frac{\partial x}{\partial \varphi}e_1 + \frac{\partial y}{\partial \varphi}e_2 + \frac{\partial z}{\partial \varphi}e_3 = -\rho\sin\varphi e_1 + \rho\cos\varphi e_2, \\ s_3(M) &= \frac{\partial x^k}{\partial u^3}e_k = \frac{\partial x}{\partial z}e_1 + \frac{\partial y}{\partial z}e_2 + \frac{\partial z}{\partial z}e_3 = e_3. \end{aligned}$$

Находим компоненты метрического тензора:

$$\begin{aligned} g_{11}(M) &= s_1(M)s_1(M) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1, \\ g_{12}(M) &= s_1(M)s_2(M) = -\rho\sin\varphi\cos\varphi + \rho\sin\varphi\cos\varphi = 0, \\ g_{13}(M) &= s_1(M)s_3(M) = 0, \\ g_{22}(M) &= s_2(M)s_2(M) = \rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = \rho^2, \\ g_{23}(M) &= s_2(M)s_3(M) = 0, \\ g_{33}(M) &= s_3(M)s_3(M) = 1, \end{aligned}$$

В силу симметричности метрического тензора $g_{21} = g_{12} = 0$, $g_{31} = g_{13} = 0$, $g_{32} = g_{23} = 0$, и тензор имеет следующий вид:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть цилиндрическая система координат является ортогональной, и для нее можно считать коэффициенты Ламе:

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1, \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi} = \rho, \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1. \end{aligned}$$

◄

Пример 2. *В криволинейной системе координат* (x^1, x^2, x^3) *в точке* $M = (1, 0, 2)$ *тензор имеет координаты*

$$(t^i_j) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты $t^{i'}_{j'}$ *в системе координат* $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$*, связанной с* (x^1, x^2, x^3) *соотношениями* $x^{1'} = x^3 - e^{x^2}$*,* $x^{2'} = x^1 + e^{x^2}$*,* $x^{3'} = 3x^1$*.*

► Чтобы вычислить координаты $t^{i'}_{j'}$ необходимо знать матрицы $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ и $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$. Считаем матрицу

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \partial x^{1'}/\partial x^1 & \partial x^{2'}/\partial x^1 & \partial x^{3'}/\partial x^1 \\ \partial x^{1'}/\partial x^2 & \partial x^{2'}/\partial x^2 & \partial x^{3'}/\partial x^2 \\ \partial x^{1'}/\partial x^3 & \partial x^{2'}/\partial x^3 & \partial x^{3'}/\partial x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -e^{x^2} & e^{x^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если известны выражения x^i через $x^{i'}$, то аналогичным образом можно найти матрицу $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$. В нашем случае можно легко получить соотношения:

$$\begin{cases} x^1 = \dfrac{1}{3} x^{3'}, \\ x^2 = \ln\left(x^{2'} - \dfrac{1}{3} x^{3'}\right), \\ x^3 = x^{1'} + x^{2'} - \dfrac{1}{3} x^{3'}. \end{cases}$$

Поэтому можем посчитать

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial x^{1'} & \partial x^2/\partial x^{1'} & \partial x^3/\partial x^{1'} \\ \partial x^1/\partial x^{2'} & \partial x^2/\partial x^{2'} & \partial x^3/\partial x^{2'} \\ \partial x^1/\partial x^{3'} & \partial x^2/\partial x^{3'} & \partial x^3/\partial x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/(x^{2'} - x^{3'}/3) & 1 \\ 1/3 & -1/(3x^{2'} - x^{3'}) & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Если же мы не знаем выражения для x^i через $x^{i'}$, то можем посчитать матрицу $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ следующим образом:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial x^{1'} & \partial x^2/\partial x^{1'} & \partial x^3/\partial x^{1'} \\ \partial x^1/\partial x^{2'} & \partial x^2/\partial x^{2'} & \partial x^3/\partial x^{2'} \\ \partial x^1/\partial x^{3'} & \partial x^2/\partial x^{3'} & \partial x^3/\partial x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/e^{x^2} & 1 \\ 1/3 & -1/3e^{x^2} & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/e^{x^2} & 1 \\ 1/3 & -1/3e^{x^2} & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/(x^{2'} - x^{3'}/3) & 1 \\ 1/3 & -1/(3x^{2'} - x^{3'}) & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицы $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ и $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, выраженные через x^i, и найдем компоненты тензора в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$:

$$t^{1'}_{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{1'}} t^i_j = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} t^1_1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} t^1_2 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} t^1_3 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} t^2_1$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_2^2+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}t_3^2+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}t_1^3+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_2^3+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}t_3^3\\
&=0+0+0+0+0+2e^{x^2}+0+0+2=2e^{x^2}+2,\\
t_{2'}^{1'}&=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{2'}}t_j^i=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_1^1+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_2^1+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}t_3^1+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_1^2\\
&+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_2^2+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}t_3^2+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_1^3+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_2^3+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}t_3^3\\
&=0+0+0+0-1+2e^{x^2}+0+0+2=2e^{x^2}+1,\\
t_{3'}^{1'}&=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{3'}}t_j^i=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}t_1^1+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}t_2^1+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}t_3^1+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}t_1^2\\
&+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}t_2^2+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}t_3^2+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}t_1^3+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}t_2^3+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}t_3^3\\
&=0+0+0+0+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}e^{x^2}-1+0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}e^{x^2}-\frac{4}{3},\\
t_{1'}^{2'}&=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{1'}}t_j^i=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}t_1^1+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_2^1+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}t_3^1+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}t_1^2\\
&+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_2^2+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}t_3^2+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}t_1^3+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_2^3+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}t_3^3\\
&=0+0+1+0+0-2e^{x^2}+0+0+0=-2e^{x^2}+1,\\
t_{2'}^{2'}&=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{2'}}t_j^i=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_1^1+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_2^1+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}t_3^1+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_1^2\\
&+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_2^2+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}t_3^2+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_1^3+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_2^3+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}t_3^3\\
&=0-\frac{1}{e^{x^2}}+1+0+1-2e^{x^2}+0+0+0=-\frac{1}{e^{x^2}}-2e^{x^2}+2,\\
t_{3'}^{2'}&=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{3'}}t_j^i=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}t_1^1+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}t_2^1+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}t_3^1+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}t_1^2\\
&+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}t_2^2+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}t_3^2+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}t_1^3+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}t_2^3+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}t_3^3\\
&=\frac{2}{3}+\frac{1}{3e^{x^2}}-\frac{1}{3}+0-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{x^2}+0+0+0=\frac{1}{3e^{x^2}}+\frac{2}{3}e^{x^2},\\
t_{1'}^{3'}&=\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{1'}}t_j^i=\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}t_1^1+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_2^1+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}t_3^1+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}t_1^2\\
&+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_2^2+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}t_3^2+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}t_1^3+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_2^3+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}t_3^3\\
&=0+0+3+0+0+0+0+0+0=3,\\
t_{2'}^{3'}&=\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{2'}}t_j^i=\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_1^1+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_2^1+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}t_3^1+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_1^2\\
&+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_2^2+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}t_3^2+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_1^3+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_2^3+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}t_3^3\\
&=0-\frac{3}{e^{x^2}}+3+0+0+0+0+0+0=-\frac{3}{e^{x^2}}+3,\\
t_{3'}^{3'}&=\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{3'}}t_j^i=\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}t_1^1+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}t_2^1+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}t_3^1+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}t_1^2
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}t_2^2+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}t_3^2+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}t_1^3+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}t_2^3+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}t_3^3$$
$$=2+\frac{1}{e^{x^2}}-1+0+0+0+0+0+0=\frac{1}{e^{x^2}}+1.$$

Подставляя координаты точки M в найденные выражения, получаем

$$t_{1'}^{1'}=4,\quad t_{2'}^{1'}=3,\quad t_{3'}^{1'}=-2,$$
$$t_{1'}^{2'}=-1,\quad t_{2'}^{2'}=-1,\quad t_{3'}^{2'}=1,$$
$$t_{1'}^{3'}=3,\quad t_{2'}^{3'}=0,\quad t_{3'}^{3'}=2.$$

Если же для нахождения компонент тензора использовать матрицы $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ и $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, выраженные через $x^{i'}$, то компоненты тензора

$$t_{1'}^{1'}=2x^{2'}-\frac{2}{3}x^{3'}+2,\quad t_{2'}^{1'}=2x^{2'}-\frac{2}{3}x^{3'}+1,\quad t_{3'}^{1'}=-\frac{2}{3}x^{2'}+\frac{2}{9}x^{3'}-\frac{4}{3},$$
$$t_{1'}^{2'}=-2x^{2'}+\frac{2}{3}x^{3'}+1,\quad t_{2'}^{2'}=-\frac{1}{x^{2'}-x^{3'}/3}-2x^{2'}+\frac{2}{3}x^{3'}+2,\quad t_{3'}^{2'}=\frac{1}{3x^{2'}-x^{3'}}+\frac{2}{3}x^{2'}-\frac{2}{9}x^{3'},$$
$$t_{1'}^{3'}=3,\quad t_{2'}^{3'}=-\frac{3}{x^{2'}-x^{3'}/3}+3,\quad t_{3'}^{3'}=\frac{1}{x^{2'}-x^{3'}/3}+1,$$

и необходимо вычислить координаты точки M'. Они находятся из соотношений, связывающих системы координат, следующим образом:

$$M_1'=M_3-e^{M_2}=2-1=1,$$
$$M_2'=M_1+e^{M_2}=1+1=2,$$
$$M_3'=3M_1=3.$$

Тогда, подставляя координаты точки M' в выражения для компонент искомого тензора, получаем тензор, равный найденному в предыдущем случае. ◀

Пример 3. *Найти дивергенцию и ротор векторного поля $a=(r\cos\theta,-\sin^2\varphi,r^2)$, градиент и лапласиан скалярного поля $f=\varphi\sin\theta+r$ в сферических координатах.*

▶ Сферическая система координат

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\phi,\\ y=r\sin\theta\sin\phi,\\ z=r\cos\theta\end{cases}$$

является ортогональной, и, считая $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, $u^1=r$, $u^2=\theta$, $u^3=\varphi$, коэффициенты Ламе $H_1=1$, $H_2=r$, $H_3=r\sin\theta$. Тогда:

- Дивергенция

$$\operatorname{div}a=\frac{1}{H_1H_2H_3}\cdot\left[\frac{\partial(H_2H_3a_1)}{\partial r}+\frac{\partial(H_3H_1a_2)}{\partial\theta}+\frac{\partial(H_1H_2a_3)}{\partial\varphi}\right]$$
$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\left[\frac{\partial(r^3\sin\theta\cos\theta)}{\partial r}+\frac{\partial(-r\sin\theta\sin^2\varphi)}{\partial\theta}+\frac{\partial(r^3)}{\partial\varphi}\right]$$
$$=3\cos\theta-\frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{r\sin\theta};$$

- Ротор

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{rot} a)_r &= \frac{1}{H_2H_3}\left\{\frac{\partial(H_3a_3)}{\partial\theta} - \frac{\partial(H_2a_2)}{\partial\varphi}\right\} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial(r^3\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(-r\sin^2\varphi)}{\partial\varphi}\right\}\\
&= r\operatorname{ctg}\theta + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r\sin\theta},\\
(\operatorname{rot} a)_\theta &= \frac{1}{H_1H_3}\left\{\frac{\partial(H_1a_1)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(H_3a_3)}{\partial r}\right\} = \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r^3\sin\theta)}{\partial r}\right\}\\
&= -3r,\\
(\operatorname{rot} a)_\varphi &= \frac{1}{H_2H_1}\left\{\frac{\partial(H_2a_2)}{\partial r} - \frac{\partial(H_1a_1)}{\partial\theta}\right\} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(-r\sin^2\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta}\right\}\\
&= -\frac{\sin^2\varphi}{r} + \sin\theta;
\end{aligned}
$$

- Градиент

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{grad} f)_r &= \frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial r} = 1\cdot 1 = 1,\\
(\operatorname{grad} f)_\theta &= \frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\cdot\varphi\cos\theta = \frac{\varphi\cos\theta}{r},\\
(\operatorname{grad} f)_\varphi &= \frac{1}{H_3}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\sin\theta = \frac{1}{r};
\end{aligned}
$$

- Лапласиан

$$
\begin{aligned}
\triangle f &= \frac{1}{H_1H_2H_3}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\right]\\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\varphi\sin\theta\cos\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(1)\right]\\
&= \frac{2}{r} + \frac{\varphi\cos^2\theta - \varphi\sin^2\theta}{r^2\sin\theta}.
\end{aligned}
$$

◀

Задачи к главе 5

1. Найти координатные поверхности, локальный базис, метрический тензор и коэффициенты Ламе для тороидальная система координат:

$$
\begin{cases}
x = \dfrac{c\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta},\\
y = \dfrac{c\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta},\\
z = \dfrac{c\,\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta},
\end{cases}
$$

где $c \in (0, \infty)$, $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta, \varphi \in (-\pi, \pi]$.

2. Найти координатные поверхности, локальный базис, метрический тензор и коэффициенты Ламе для конической системы координат:

$$\begin{cases} x = \dfrac{r\mu\nu}{bc}, \\ y = \dfrac{r}{b}\sqrt{\dfrac{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2-c^2}}, \\ z = \dfrac{r}{c}\sqrt{\dfrac{(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c^2-b^2}}, \end{cases}$$

где $\nu^2 \le c^2 \le \mu^2 \le b^2$.

3. В криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) в некоторой точке тензор T имеет вид $(T^i_j) = 12\, e_1 \otimes e^1 + 14\, e_1 \otimes e^2 + 16\, e_2 \otimes e^1 + 18\, e_2 \otimes e^2 + 20\, e_3 \otimes e^2 + 22\, e_2 \otimes e^3 + 24 e_3 \otimes e^3$. Найти координату $T^{1'}_{2'}$ в этой точке в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial x^{1'} & \partial x^1/\partial x^{2'} & \partial x^1/\partial x^{3'} \\ \partial x^2/\partial x^{1'} & \partial x^2/\partial x^{2'} & \partial x^2/\partial x^{3'} \\ \partial x^3/\partial x^{1'} & \partial x^3/\partial x^{2'} & \partial x^3/\partial x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x^{1'}} & 5 & 0 \\ -3 & e^{x^{2'}} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

.

4. В криволинейной системе координат (x^1, x^2) в точке (1,0) задан тензор

$(T^i_{jk}) = 4\, e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 + 3\, e_1 \otimes e^2 \otimes e^1 + 2\, e_1 \otimes e^2 \otimes e^2 + e_2 \otimes e^1 \otimes e^1 + e_2 \otimes e^1 \otimes e^2 + 2\, e_2 \otimes e^2 \otimes e^2$.

Найти координату $T^{2'}_{1'1'}$ в системе координат $(x^{1'}, x^{2'})$, связанной с (x^1, x^2, x^3) соотношениями:

$$x^{1'} = x^1 x^2; \quad x^{2'} = \frac{1}{2}\left((x^2)^2 - (x^1)^2\right).$$

5. Вычислить дивергенцию векторного поля:
(а) $a = (z, -\mathrm{sh}^2\tau, a\cos\sigma)$ в биполярных цилиндрических координатах;
(б) $a = (\sin\varphi, r\sin\theta, r\cos\varphi)$ в сферических координатах.

6. Вычислить ковариантную компоненту $(\mathrm{rot}\, a)_2$, где $a = (a_1, a_2, a_3)$, а координаты u, v, z связаны с декартовыми соотношениями:
(а) $x = u + \sqrt{v+1}$, $y = u - \sqrt{v+1}$, $z = z$. Векторное поле a имеет вид: $a = (vz, uz, u^2)$;
(б) $x = a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi$, $y = a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi$, $z = z$. Векторное поле a имеет вид: $a = (\varphi^2, \xi^2, \xi z)$.

7. Для функции f вычислить ковариантную компоненту $(\mathrm{grad}\, f)_1$ в:
(а) тороидальной системе координат. Функция f имеет вид: $f = x^2 + y^2 + xy$;
(б) цилиндрической параболической системе координат. Функция f имеет вид: $f = z(\tau^2 + \sigma^2)$.

8. Вычислить $\triangle f$:
(а) в параболической цилиндрической системе координат при $f = (z-1)(\tau^2 + \sigma^2)$;
(б) в сферических координатах при $f = r^2 - \cos\theta - \sin^2\phi$.

9. Доказать тождества:

a) $\mathrm{grad}\,(\varphi \cdot \psi) = \varphi \mathrm{grad}\,\psi + \psi \mathrm{grad}\,\varphi$.
b) $\mathrm{div}\,(\varphi \cdot \vec{A}) = \varphi \mathrm{div}\,\vec{A} + (\vec{A} \cdot \mathrm{grad}\,\varphi)$.

c) $\operatorname{div}[\vec{A}\times\vec{B}] = (\vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B})$.

d) $\operatorname{rot}[\vec{A}\times\vec{B}] = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{div}\vec{A}$.

e) $\operatorname{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + [\vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A}] + [\vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B}]$.

f) $\triangle(\varphi\cdot\psi) = \varphi\cdot\triangle\psi + 2(\operatorname{grad}\phi\cdot\operatorname{grad}\psi) + \psi\cdot\triangle\phi$.

g) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \triangle\vec{A}$.

Ответы

1. $\alpha = const$ - торы $\left(\sqrt{x^2+y^2} - c\operatorname{cth}\alpha\right)^2 + z^2 = \left(\dfrac{c}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^2$,

$\beta = const$ - сферы $x^2+y^2+(z-c\operatorname{ctg}\beta)^2 = \left(\dfrac{c}{\sin\beta}\right)^2$,

$\varphi = const$ - полуплоскости $\dfrac{x}{\cos\varphi} = \dfrac{y}{\sin\varphi}$;

$$s_1(M) = \left(\frac{c\cos\varphi(1-\operatorname{ch}\alpha\cos\beta)}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2}, \frac{c\sin\varphi(1-\operatorname{ch}\alpha\cos\beta)}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2}, -\frac{c\operatorname{sh}\alpha\sin\beta}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2}\right)^T,$$

$$s_2(M) = \left(-\frac{c\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi\sin\beta}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2}, -\frac{c\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi\sin\beta}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2}, \frac{c(\operatorname{ch}\alpha\cos\beta-1)}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2}\right)^T,$$

$$s_3(M) = \left(-\frac{c\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}, \frac{c\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}, 0\right)^T;\ H_\alpha = H_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta},\ H_\varphi = \frac{c\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta};$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \dfrac{c^2}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{c^2}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{c^2\operatorname{sh}^2\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2} \end{pmatrix}.$$

2. $r = const$ - сферы $x^2+y^2+z^2 = r^2$, $\mu = const$ и $\nu = const$ - взаимно перпендикулярные конусы $\dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2+b^2} + \dfrac{z^2}{\mu^2-c^2} = 0$ и $\dfrac{x^2}{\nu^2} + \dfrac{y^2}{\nu^2-b^2} + \dfrac{z^2}{\nu^2+c^2} = 0$;

$$s_1(M) = \left(\frac{\mu\nu}{bc}, \frac{1}{b}\sqrt{\frac{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2-c^2}}, \frac{1}{c}\sqrt{\frac{(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c^2-b^2}}\right)^T,$$

$$s_2(M) = \left(\frac{r\nu}{bc}, \frac{r\mu}{b(\mu^2-b^2)}\sqrt{\frac{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2-c^2}}, \frac{r\mu}{c(\mu^2-c^2)}\sqrt{\frac{(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c^2-b^2}}\right)^T,$$

$$s_3(M) = \left(\frac{r\mu}{bc}, \frac{r\nu}{b(\nu^2-b^2)}\sqrt{\frac{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2-c^2}}, \frac{r\nu}{c(\nu^2-c^2)}\sqrt{\frac{(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c^2-b^2}}\right)^T;$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r^2(\nu^2-\mu^2)}{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{r^2(\mu^2-\nu^2)}{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)} \end{pmatrix};\ H_r = 1,\ H_\mu = r\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}},$$

$$H_\nu = r\sqrt{\frac{\mu^2-\nu^2}{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}}.$$

3. $T^{1'}_{2'} = \dfrac{14e^{2x^{2'}} + 150e^{x^{2'}} + 400}{e^{3x^{1'}+x^{2'}} + 15}$.

4. $T^{2'}_{1'1'} = \dfrac{2(x^1)^3 - 5(x^1)^2x^2 - x^1(x^2)^2 + (x^2)^3}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$.

5. (а) $\operatorname{div} a = \dfrac{\sin\sigma\,\mathrm{sh}^2\tau - z\,\mathrm{sh}\,\tau}{a}$; (б) $\operatorname{div} a = \dfrac{2\sin\varphi}{r} + 2\cos\theta - \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}$.

6. (а) $(\operatorname{rot} a)_2 = v + \dfrac{u}{\sqrt{v+1}}$; (б) $(\operatorname{rot} a)_2 = \dfrac{z}{a\sqrt{\mathrm{sh}\,\xi - \cos\varphi}}$.

7. (а) $(\operatorname{grad} f)_1 = \dfrac{c\,\mathrm{sh}\,\alpha(\sin(2\varphi)+2)(\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta - 1)}{(\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)^2}$; (б) $(\operatorname{grad} f)_1 = \dfrac{2z\tau}{c\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}$.

8. (а) $\triangle f = \dfrac{4z-4}{c^2(\tau^2+\sigma^2)}$; (б) $\triangle f = 6 + \dfrac{2\cos\theta}{r^2} - \dfrac{2\cos(2\varphi)}{r^2\sin^2\theta}$.

6 Понятие геодезических линий. Символы Кристоффеля и их свойства. Ковариантная производная

Геодезическая линия – это кратчайшая линия, соединяющая две точки поверхности. Геодезические линии описываются следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\cdot\frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

здесь x^i – криволинейные координаты, s – параметр, задающий кривую, $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ – символы Кристоффеля второго рода, $\Gamma_{i,\alpha\beta} = g_{i\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ – символы Кристоффеля первого рода:

$$\Gamma_{i,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right).$$

Свойства символов Кристоффеля:

1. Связь символов Кристоффеля первого и второго родов: $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = g^{i\lambda}\Gamma_{i,\alpha\beta}$; $\Gamma_{i,\alpha\beta} = g_{i\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$.
2. Симметрия: $\Gamma_{i,\alpha\beta} = \Gamma_{i,\beta\alpha}$; $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}$.
3. Связь с метрикой: $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} + \Gamma_{\beta,\alpha\gamma}$.

Закон преобразования символов Кристоффеля при замене координат.

Пусть $x^i = x^i(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^n)$. Тогда символы Кристоффеля преобразуются по следующему закону:

$$\overline{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^\lambda}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial\overline{x}^i}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial\overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial\overline{x}^i\partial\overline{x}^k}\cdot\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^\lambda}, \quad \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma}^l_{ik}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\overline{x}^l}\cdot\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2\overline{x}^l}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial x^\lambda}{\partial\overline{x}^l}.$$

Ковариантная производная.

Ковариантная производная ковариантного вектора A_α – *тензор второго ранга* (0, 2):

$$\nabla_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - A_i\Gamma^i_{\alpha\beta}.$$

Ковариантная производная контравариантного вектора A^α – *тензор второго ранга* (1, 1):

$$\nabla_\beta A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + A^\lambda\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}.$$

Нетрудно вычисляется ковариантная производная произвольного тензора $A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma}$:

$$\nabla_\lambda A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma} = \frac{\partial A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma}}{\partial x^\lambda} - A_{\mu\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma}\Gamma^\mu_{\alpha\lambda} - A_{\alpha\mu\cdot}^{\cdot\cdot\gamma}\Gamma^\mu_{\beta\lambda} + A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\mu}\Gamma^\gamma_{\mu\lambda}.$$

Контравариантная производная: $\nabla^\mu A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma} = g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma}$.

Основные векторные операции.

Градиент: $\nabla_\alpha f = \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ и $\nabla^\alpha f = g^{\alpha\lambda}\dfrac{\partial f}{\partial x^\lambda}$.

Лапласиан: $\triangle f = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ik}\dfrac{\partial f}{\partial x^k}\right)$.

Дивергенция: $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial(\sqrt{g}g^{i\lambda}a_\lambda)}{\partial x^i}$.

Ротор ковекторного поля $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$*:*

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_i = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(g_{i1}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right) + g_{i2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right) + g_{i3}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right)\right).$$

Пример 1. *Найти геодезические на правильном конусе.*

► По смыслу геодезический путь между двумя точками - локально кратчайший путь между ними. Мы можем развернуть конус, чтобы он лёг на плоскость и провести прямую через эти точки (прямая-кратчайшая на плоскости). Это правомерно, так как любой другой нарисованный на конусе путь будет более длинным, в чём мы убедимся, развернув конус. ◄

Пример 2. *Пусть в области, определенной неравенствами* $-\infty < u < \infty$, $0 \le v \le 2\pi$, *задан метрический тензор* $g_{11} = g_{22} = 1/v^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$. *Вычислить символы Кристоффеля первого и второго рода и найти геодезические.*

► Находим символы Кристоффеля первого рода

$$\Gamma_{1,11} = 0, \qquad \Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,21} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = -\frac{1}{v^3}, \qquad \Gamma_{1,22} = 0,$$
$$\Gamma_{2,11} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = \frac{1}{v^3}, \qquad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = 0, \qquad \Gamma_{2,22} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial v} = -\frac{1}{v^3}.$$

Находим элементы g^{ij}

$$g = \begin{vmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{v^4}, \qquad g^{11} = g^{22} = v^2, \qquad g^{12} = g^{21} = 0.$$

Затем находим символы Кристоффеля второго рода

$$\Gamma^1_{11} = 0, \qquad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = g^{11}\Gamma_{1,12} = -\frac{1}{v}, \qquad \Gamma^1_{22} = 0,$$
$$\Gamma^2_{11} = g^{22}\Gamma_{2,11} = \frac{1}{v}, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \qquad \Gamma^2_{22} = g^{22}\Gamma_{2,22} = -\frac{1}{v}.$$

Напишем уравнения геодезических линий

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{ds^2} + 2\Gamma^1_{12}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} = 0, \\ \dfrac{d^2v}{ds^2} + \Gamma^2_{11}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + \Gamma^2_{22}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Подставив сюда выражение для Γ^1_{12}, Γ^2_{11} и Γ^2_{22} получим

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{ds^2} - \dfrac{2}{v}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} = 0, \\ \dfrac{d^2v}{ds^2} + \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 - \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Полагая $u = const$, первое уравнение системы становится тождеством, а второе принимает вид $\dfrac{d^2v}{ds^2} - \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 = 0$, из которого (с помощью метода понижения порядка) $v = C_2 e^{C_1 s}$. Таким образом, геодезические линии $u = const$, $v = \varphi(s)$ есть параметрически заданные прямые, параллельные оси Ov. Пусть теперь $\dfrac{du}{ds} \neq 0$, тогда существует функция $s = s(u)$, и $v = v(s(u))$. Откуда следует

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{du}\frac{du}{ds},$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} = \frac{d^2v}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{dv}{du}\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{d^2v}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{dv}{du}\left(\frac{2}{v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}\right) = \left(\frac{du}{ds}\right)^2\left[\frac{d^2v}{du^2} + \frac{2}{v}\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right].$$

Подставляя найденные выражения во второе уравнение системы (1), получаем

$$\left(\frac{du}{ds}\right)^2\left[\frac{d^2v}{du^2} + \frac{1}{v}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{1}{v}\right] = 0.$$

Откуда следует

$$\frac{d^2v}{du^2} + \frac{1}{v}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{1}{v} = 0, \quad \text{так как} \quad \frac{du}{ds} \neq 0.$$

Решаем данное дифференциальное уравнение методом понижения порядка. Делаем замену $\dfrac{dv}{du} = p(v)$, тогда $\dfrac{d^2v}{du^2} = pp'$, и уравнение переписывается в виде

$$pp' + \frac{1}{v}p^2 + \frac{1}{v} = 0$$

или

$$\frac{pp'}{p^2+1} = -\frac{1}{v}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln(p^2+1) = -2\ln v + C_1,$$

$$p = \frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{C_1 - v^2}{v^2}},$$

$$\frac{vdv}{\sqrt{C_1 - v^2}} = du,$$

$$\sqrt{C_1 - v^2} = -u + C_2,$$

$$C_1 - v^2 = (u - C_2)^2,$$

$$v^2 + (u - C_2)^2 = C_1.$$

Таким образом, мы получили, что геодезическими линиями в заданной метрике являются прямые, параллельные оси Ov и окружности с центром на оси Ou. ◀

Пример 3. *Найти ковариантную производную тензорного поля, которое в полярных координатах имеет ненулевые компоненты* $t_1^1 = \rho$, $t_2^1 = -\sin\varphi$, $t_1^2 = 0$, $t_2^2 = 1$.

▶ В полярной системе координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi, \end{cases}$$

полагая $x^1 = x$, $x^2 = y$, $u^1 = r$, $u^2 = \varphi$, метрический и обратный к нему тензоры имеют вид:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix}.$$

Откуда символы Кристоффеля первого и второго рода

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{1,11} = 0, & \Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,21} = 0, & \Gamma_{1,22} = -\rho, \\ \Gamma_{2,11} = 0, & \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = \rho, & \Gamma_{2,22} = 0; \\ \Gamma_{11}^1 = 0, & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, & \Gamma_{22}^1 = -\rho, \\ \Gamma_{11}^2 = 0, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \dfrac{1}{\rho}, & \Gamma_{22}^2 = 0. \end{array}$$

Находим компоненты ковариантной производной:

$$\begin{aligned}
\nabla_1 t_1^1 &= \frac{\partial t_1^1}{\partial \rho} - t_1^1\Gamma_{11}^1 - t_2^1\Gamma_{11}^2 + t_1^1\Gamma_{11}^1 + t_1^2\Gamma_{21}^1 = 1 - 0 - 0 + 0 + 0 = 1, \\
\nabla_1 t_2^1 &= \frac{\partial t_2^1}{\partial \rho} - t_1^1\Gamma_{21}^1 - t_2^1\Gamma_{21}^2 + t_2^1\Gamma_{11}^1 + t_2^2\Gamma_{21}^1 = 0 - 0 + \frac{\sin\varphi}{\rho} + 0 + 0 = \frac{\sin\varphi}{\rho}, \\
\nabla_1 t_1^2 &= \frac{\partial t_1^2}{\partial \rho} - t_1^2\Gamma_{11}^1 - t_2^2\Gamma_{11}^2 + t_1^1\Gamma_{11}^2 + t_1^2\Gamma_{21}^2 = 0 - 0 - 0 + 0 + 0 = 0, \\
\nabla_1 t_2^2 &= \frac{\partial t_2^2}{\partial \rho} - t_1^2\Gamma_{21}^1 - t_2^2\Gamma_{21}^2 + t_2^1\Gamma_{11}^2 + t_2^2\Gamma_{21}^2 = 0 - 0 - \frac{1}{\rho} + 0 + \frac{1}{\rho} = 0, \\
\nabla_2 t_1^1 &= \frac{\partial t_1^1}{\partial \varphi} - t_1^1\Gamma_{12}^1 - t_2^1\Gamma_{12}^2 + t_1^1\Gamma_{12}^1 + t_1^2\Gamma_{22}^1 = 0 - 0 + \frac{\sin\varphi}{\rho} + 0 + 0 = \frac{\sin\varphi}{\rho}, \\
\nabla_2 t_2^1 &= \frac{\partial t_2^1}{\partial \varphi} - t_1^1\Gamma_{22}^1 - t_2^1\Gamma_{22}^2 + t_2^1\Gamma_{12}^1 + t_2^2\Gamma_{22}^1 = -\cos\varphi + \rho^2 - 0 + 0 - \rho = \rho^2 - \rho - \cos\varphi, \\
\nabla_2 t_1^2 &= \frac{\partial t_1^2}{\partial \varphi} - t_1^2\Gamma_{12}^1 - t_2^2\Gamma_{12}^2 + t_1^1\Gamma_{12}^2 + t_1^2\Gamma_{22}^2 = 0 - 0 - \frac{1}{\rho} + 1 + 0 = 1 - \frac{1}{\rho}, \\
\nabla_2 t_2^2 &= \frac{\partial t_2^2}{\partial \varphi} - t_1^2\Gamma_{22}^1 - t_2^2\Gamma_{22}^2 + t_2^1\Gamma_{12}^2 + t_2^2\Gamma_{22}^2 = 0 - 0 - 0 - \frac{\sin\varphi}{\rho} + 0 = -\frac{\sin\varphi}{\rho},
\end{aligned}$$

◀

Задачи к главе 6

1. Найти геодезические линии прямого геликоида

$$x = v\cos u, \quad y = v\sin u, \quad z = au.$$

2. Найти геодезические линии на конусе, полученном при вращении луча $y = 2x$ $(x > 0)$ вокруг оси абсцисс.

3. Найти компоненту $T_{12\cdot}^{\cdot\cdot 1}$ тензора $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = \nabla_i S_{j\cdot}^{\cdot k}$, где

$$S = (S_{j\cdot}^{\cdot k}) = \sin x^2\, e_1 \otimes e^1 + 8x^1\, e_1 \otimes e^2 + 7\, e_2 \otimes e^1 + 6\, e_2 \otimes e^2$$

и символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2};\ \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}.$$

4. Тензор T имеет компоненты $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & x^1 + x^2 \\ 2x^2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти его контрвариантную производную, если известны символы Кристоффеля и метрический тензор

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{11}^1 = (x^1)^2, & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = x^1 x^2, & \Gamma_{22}^1 = (x^2)^2, \\ \Gamma_{11}^2 = 0, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = x^1/x^2, & \Gamma_{22}^2 = 0, \end{array} \qquad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/x^1 & x^2/x^1 \\ x^2/x^1 & x^2 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислить $\operatorname{div} a$ и ковариантные компоненты $\operatorname{rot} a$, где $a = (x^1 - x^2, 3x^2, 1)$, а координаты (x^1, x^2, x^3) связаны с декартовыми соотношениями

$$x = -x^3 + \sqrt{(x^3)^2 + x^1},\ y = x^2,\ z = x^3 + \sqrt{(x^3)^2 + x^1}.$$

6. Вычислить $\triangle f$ и контрвариантные компоненты градиента f, где

$$f = (x^3)^2 - x^2 x^3 + (x^1)^2 + x^2,$$

а координаты (x^1, x^2, x^3) связаны с декартовыми соотношениями

$$x = x^3 e^{x^2},\ y = e^{x^2} \sin x^1,\ z = e^{x^2} \cos x^1.$$

Ответы

1. $u = const$ и $v = \pm \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{(v^2 + a^2)(C_1(v^2 + a^2) - 1)}} + C_2$ — множество геодезических линий прямого геликоида.

2. Рассматривая в качестве локальных координат пару (x, φ), получаем множество геодезических линий $\varphi = const$ и $\varphi = \sqrt{2} \arctan\left(\sqrt{2C_1 x^2 - 1}\right) + C_2$.

3. $T_{12\cdot}^{\cdot\cdot 1} = 8 + \dfrac{x^2(6 - \sin x^2)}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$.

4. $\nabla^1 T_{11} = -x^1 - 3x^2$, $\nabla^1 T_{12} = -1 + \dfrac{1 + x^2}{x^1} - (x^1 + x^2)\left(x^1 + \dfrac{1}{x^2} + (x^2)^2\right)$, $\nabla^1 T_{21} = -1 + \dfrac{2x^2}{x^1} - 2x^2\left(x^1 + \dfrac{1}{x^2} + (x^2)^2\right)$, $\nabla^1 T_{22} = -\dfrac{2}{x^2} - x^2(x^1 + 3x^2)\left(1 + \dfrac{(x^2)^2}{x^1}\right)$, $\nabla^2 T_{11} = -(x^1)^2 - 3x^1 x^2$, $\nabla^2 T_{12} = x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^1} - (x^1 + x^2)\left(x^1 + x^1 x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\right) - x^1$, $\nabla^2 T_{21} = -2x^2\left(x^2\left(x^1 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 1 + x^1(x^2)^2\right) - x^1$, $\nabla^2 T_{22} = -2 - (x^2)^2(x^1 + 3x^2)(1 - x^2)$.

5. $\operatorname{div} a = \dfrac{8(x^3)^4 + 4x^1(x^3)^2 + 6x^2(x^3)^2 - (x^1)^2 + 3x^1x^2}{2((x^3)^2 + x^1)^3}$, $(\operatorname{rot} a)_1 = \dfrac{x^3}{((x^3)^2 + x^1)^{3/2}}$,
$(\operatorname{rot} a)_2 = 0$, $(\operatorname{rot} a)_3 = \dfrac{4(x^3)^2 + 2x^1}{((x^3)^2 + x^1)^{3/2}}$.

6. $\triangle f = (4(x^3)^2 - x^2x^3 + 2x^3 + 4)e^{-2x^2}$, $\nabla^1 f = 2x^1 e^{-2x^2}$, $\nabla^2 f = (1 + x^3(x^2-1) - 2(x^3)^2)e^{-2x^2}$,
$\nabla^3 f = (2(x^3)^3 + (x^3)^2(1-x^2) + x^3 - x^2)e^{-2x^2}$.

7 Основы теории поверхностей. Длина кривой. Первая квадратичная форма. Кривизна кривой и кручение кривой. Нормаль к поверхности

Длина дуги плоской кривой, заданной уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, вычисляется по формуле

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

Пусть в некоторой системе координат (u, v) поверхность задана уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, тогда выражение

$$ds^2 = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2, \text{ где}$$
$$E(u,v) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)^2, \; F(u,v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \; G(u,v) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)^2,$$

называется первой квадратичной формой поверхности. Кроме того, её также называют просто линейным элементом поверхности, подчеркивая этим, что знание её достаточно для вычисления длин дуг.

Кривизна k_1 и кручение k_2 пространственной кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ определяются по формулам:

$$k_1 = \frac{|(\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s))|}{|\boldsymbol{r}'(s)|^3},$$
$$k_2 = \frac{(\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{r}'''(s))}{|(\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s))|^2}.$$

В случае параметрического задания кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

$$k_1 = \frac{\sqrt{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{3/2}},$$
$$k_2 = \frac{x'''(z''y' - y''z') + y'''(x''z' - z''x') + z'''(y''x' - x''y')}{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2}.$$

Пусть поверхность задана в неявном виде $F(x, y, z) = 0$, тогда уравнение нормали в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M)}.$$

Пример 1. *Найти длину дуги гиперболической винтовой линии* $x = a\operatorname{ch} t$, $y = a\operatorname{sh} t$, $z = at$, *заключенную между точками* 0 *и* t.

► Вычисляем длину дуги

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 \tau + a^2 \operatorname{ch}^2 \tau + a^2}\, d\tau = a\sqrt{2} \int_0^t \operatorname{ch} \tau\, d\tau = a\sqrt{2} \operatorname{sh} \tau.$$

◄

Пример 2. *Найти линейный элемент цилиндра* $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, $z = v$, $u \in [0, 2\pi)$.

► Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = R^2 \sin^2 u + R^2 \cos^2 u = R^2,$$
$$F(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$
$$G(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1.$$

Тогда первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = R^2 du^2 + dv^2.$$

◄

Пример 3. *Найти кривизну и кручение кривой* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

► Считаем кривизну

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\sqrt{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2b^2 \sin^2 t + a^2b^2 \cos^2 t + (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t)^2}}{(a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2)^{3/2}} \\ &= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Находим кручение

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{x'''(z''y' - y''z') + y'''(x''z' - z''x') + z'''(y''x' - x''y')}{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2} \\ &= \frac{a^2 b \sin^2 t + a^2 b \cos^2 t}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

◄

Пример 4. *Написать уравнение нормали к поверхности* $z = e^{x^2 \cos y} + 2\sin y$ *в точке* $M = (\sqrt{2}, \pi/4, -e)$.

► Переписываем уравнение поверхности в виде $F(x,y,z) = e^{x^2 \cos y} + 2\sin y - z$, и находим частные производные

$$F'_x = 2x \cos y e^{x^2 \cos y},$$
$$F'_y = -x^2 \sin y e^{x^2 \cos y} + 2\cos y,$$
$$F'_z = -1.$$

Вычисляем значения производных в точке M:

$$F'_x(M) = 2e^{\sqrt{2}},$$
$$F'_y(M) = -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} + \sqrt{2},$$
$$F'_z(M) = -1.$$

Тогда уравнение нормали к поверхности имеет вид

$$\frac{x-\sqrt{2}}{2e^{\sqrt{2}}} = \frac{y-\pi/4}{\sqrt{2}(1-e^{\sqrt{2}})} = \frac{z+e}{-1}.$$

◄

Задачи к главе 7

1. Вычислить длину дуги кривой, заданной в полярной системе координат

$$r = 3(1+\sin\varphi), \quad -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0.$$

2. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 6 - 3t^2, \\ y = 4t^3, \end{cases} \qquad t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

3. Найти линейный элемент поверхности $x = u + e^v$, $y = v$, $z = u - e^v$.

4. Найти линейный элемент тора $x = (R + r\cos\varphi)\cos\theta$, $y = (R + r\cos\varphi)\sin\theta$, $z = r\sin\varphi$, $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$.

5. Найти кривизну и кручение следующих кривых:
(а) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a\cos\dfrac{t}{2}$ в точке $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$;
(б) $x = t$, $y = t^2 + 2t + 3$, $z = t^3 - 5t^2 + 7$ в точке $M = (1, 6, 3)$.

6. Написать уравнение нормали к следующим поверхностям:
(а) $x^3y + xz^3 - 3xyz + 4x^2 + 5y - z + 7 = 0$ в точке $M = (0, -1, 2)$;
(б) $e^z - z + xy = 3$ в точке $M = (x_0, y_0, z_0)$, если $y_0 = 1$, $z_0 = 0$.

Ответы

1. $s = 6(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

2. $s = 26$.

3. $ds^2 = 2du^2 + (1 + 2e^{2v})dv^2$.

4. $ds^2 = r^2du^2 + r^2\cos^2\varphi dv^2$.

5. (а) $k_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{8a}$, $k_2 = -\dfrac{5\sqrt{2}}{24a}$; (б) $k_1 = \dfrac{1}{33\sqrt{11}}$, $k_2 = \dfrac{1}{2}$.

6. (а) $\dfrac{x}{14} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{-1}$; (б) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{0}$.

Список литературы

1. Аюпова Н. Б. Лекции по векторному и тензорному анализу. Новосибирск: НГУ, 2012.

2. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Москва: Наука, 1965.

3. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Москва: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953.

4. Simmonds J. G. A Brief on Tensor Analysis. New York: Springer, 1994.

5. Абрамов А. А. Введение в тензорный анализ и риманову геометрию. Москва: Либроком, 2012.

Примеры тензоров в различных областях математики и физики

Раздел науки	Тензоры и их применение
Специальная теория относительности	4-векторы, в том числе 4-вектор координат в 4-мерном пространстве-времени Минковского, метрический тензор, интервал (теория относительности) («длина» в этом пространстве); 4-тензоры применяются для обозначения любого тензора над четырёхмерным пространством-временем, повороты системы отсчёта в котором включают как обычные повороты трёхмерного пространства, так и переход между системами отсчёта, которые движутся с разными скоростями одна относительно другой. Тензор над пространством 4-векторов, каждый индекс которого принимает четыре значения: одно «временное» и три «пространственных». Примером является 4-импульс (4-вектор энергии-импульса)
Общая теория относительности (ОТО)	Метрический тензор над псевдоримановым 4-мерным многообразием, являющийся в ОТО развитием понятия ньютоновского гравитационного потенциала и получающиеся из него свертки тензора кривизны Римана — тензор Риччи и скалярная кривизна (свёртка тензора Риччи), связанные в этой же теории с энергией гравитационного поля и непосредственно входящие в основное уравнение теории (в левой части уравнения Эйнштейна они совместно образуют так называемый тензор Эйнштейна), тензор энергии-импульса материальных полей, входящие в правую часть уравнения Эйнштейна
Классическая электродинамика	Тензор электромагнитного поля над пространством Минковского, содержащий напряжённости электрического и магнитного поля и являющийся главным объектом классической электродинамики в 4-мерной записи. В частности, уравнения Максвелла записываются с его помощью в виде единственного 4-мерного уравнения
Теория упругости и Механика сплошных сред	Тензоры второго ранга над 3-мерным физическим пространством Тензор деформаций и тензор напряжений, связанные между собой через тензор упругости 4-го ранга. Также применяются модули упругости
Квантовая теория поля	В релятивистской теории поля возникают тензор энергии-импульса и Спин-тензор, которые в КТП принимают вид линейных операторов над вектором состояния
Кинематика твёрдого тела	Важнейшую роль играет тензор инерции, связывающий угловую скорость с моментом импульса и кинетической энергией вращения. Этот тензор отличается от большинства других тензоров в физике, представляющих собой, вообще говоря, тензорные поля, тем, что один тензор характеризует одно абсолютно твёрдое тело, полностью определяя, вместе с массой, его инерцию
Теория поля	Квадрупольный момент и вообще тензоры, входящие в мультипольное разложение: всего один тензор целиком представляет момент распределения зарядов соответствующего порядка в данное время.

Другие разделы	Многие величины, являющихся скалярными характеристиками вещества в случае изотропности последнего, являются тензорами в случае анизотропного вещества. Говоря конкретнее, это относится к субстанциальным коэффициентам, связывающим векторные величины или стоящие перед произведениями (в частности, квадратами) векторов. Примерами могут быть удельная электропроводность (также и обратное ей удельное сопротивление), теплопроводность, диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость, скорость звука (зависящая от направления) и т. д. Часто в физике полезен псевдотензор Леви-Чивиты, входящий, например, в координатную запись векторного и смешанного произведений векторов. Компоненты этого тензора всегда записываются практически одинаково (с точностью до скалярного множителя, зависящего от метрики), а в правом ортонормированном базисе — совершенно одинаково всегда (каждая равна 0, $+1$ или 1)