КОМИТЕТ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ
МИНИСТЕРСТВА НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

В. А. Александров, Е. В. Колесников

Интегральные уравнения

Методические указания

Новосибирск
1993

В методических указаниях изложены сведения об интегральных уравнениях и их приложениях к задаче Штурма — Лиувилля, а также приведены задачи, рекомендуемые для решения на практических занятиях по математическому анализу на физическом факультете Новосибирского государственного университета.

Предисловие

На физическом факультете Новосибирского государственного университета тема «Интегральные уравнения» изучается в четвёртом семестре в рамках курса «Математический анализ». Её изучению отводится 3 лекции и 3 практических занятия в мае месяце.

Основная особенность данных указаний состоит в том, что мы рассматриваем тему «Интегральные уравнения» как продолжение непосредственно изучаемой перед ней темы «Теория операторов в гильбертовых пространствах». Поэтому мы целенаправленно извлекаем основные факты о решениях уравнений Фредгольма и Вольтерра из уже известных свойств операторов в гильбертовых пространствах. За это нам приходится «расплачиваться» тем, что мы находим, как правило, решение интегральных уравнений в пространстве $L_2[a, b]$ (которое является гильбертовым), а не в пространстве непрерывных функций (которое, как известно, гильбертовым не является).

Охарактеризуем вкратце книги, использованные при написании этой работы.

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Это прекрасный учебник по функциональному анализу, на котором учились несколько поколений ныне работающих математиков. Наше изложение весьма близко к принятому в этой книге, но в ней не обсуждается билинейная формула Штурма — Лиувилля.

2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. М.: Наука, 1975.

Пятитомник В. И. Смирнова, выдержавший более 10 изданий, заслуженно считается энциклопедией всех (!) математических курсов, читаемых в университетах. Четвёртый том содержит всё, что мы сообщаем об интегральных уравнениях в этой «методичке».

3. Васильева А. Б., Тихонов Е. А. Интегральные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1989.

Один из последних учебников по интегральным уравнениям, написанный преподавателями-математиками для студентов-физиков. В нем физические примеры и он полностью покрывает содержание данной работы. К сожалению, учебник малодоступен: библиотека НГУ располагает всего 6 экземплярами.

4. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970.

Содержит очень сжатое введение в теорию интегральных уравнений, ориентированное на физиков и снабженное физическими примерами. В отличие от нашего курса, Арфкен нередко подменяет доказательство наводящими соображениями или правдоподобными рассуждениями.

5. Владимиров В. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

Помимо общей теории интегральных уравнений содержит сведéние задачи Штурма — Лиувилля к интегральным уравнениям с использованием обобщенных функций.

6. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИЛ, 1960.

Совершенно изумительная книга, написанная выдающимся ученым на высочайшем уровне, где объединяются простота, строгость и элегантность изложения, единство метода и широта используемых средств, демонстрируются глубокие связи между различными областями математики и физики. Может быть рекомендована скорее преподавателям-математикам, чем студентам-физикам.

В качестве источника задач мы использовали в основном следующие книги:

7. Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Вышейшая школа, 1978.

8. Задания к лабораторным работам по курсу «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов специальности «математика» / А. Я. Дороговцев, С. Д. Ивасишен, Ю. Г. Кондратьев, А. Ю. Константинов. Киев: Изд-во Киевского ун-та.

§1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла. Мы будем рассматривать только такие интегральные уравнения, в которые неизвестная функция входит линейно. Они называются линейными интегральными уравнениями.

Важнейшими примерами линейных интегральных уравнений являются следующие:

$\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) = 0$ — уравнение Фредгольма первого рода,

$\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) = x(t)$ — уравнение Фредгольма второго рода,

$\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t) = 0$ — уравнение Вольтерра первого рода,

$\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t) = x(t)$ — уравнение Вольтерра второго рода.

Здесь $K : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ и $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ — известные функции, а функция $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ является искомой.

Отметим следующие различия в написанных уравнениях: в уравнениях Фредгольма пределы интегрирования постоянны, а в уравнениях Вольтерра верхний предел интегрирования — переменный; в уравнении первого рода неизвестная функция входит только под знаком интеграла.

Поскольку

$$\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds = \int\limits_a^b \widetilde{K}(t,s)x(s)ds,$$

где использовано обозначение:

$$\widetilde{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & a \le s \le t; \\ 0, & t < s \le b. \end{cases}$$

то уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма. В отдельный класс их выделяют из-за того, что их решения обладают рядом специальных свойств, которых, вообще говоря, нет у решений уравнений Фредгольма.

С интегральными уравнениями вы встречались и раньше. Например, доказывая существование и единственность решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, вы сводили его к интегральному уравнению (нелинейному)

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

которое затем решали методом последовательных приближений.

Такое сведе́ние возможно и для дифференциальных уравнений порядка выше первого. Рассмотрим, например, следующую задачу для уравнения n-го порядка:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + p_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + p_n(t)x(t) = f(t), \\ x^{(n-1)}(a) = x^{(n-2)}(a) = \ldots = x'(a) = x(a) = 0, \\ a \le t \le b. \end{cases}$$

Положим

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{a}^{t} y(s)(t-s)^{(n-1)}ds,$$

где $y : [a, b] \to \mathbb{C}$ — новая неизвестная функция. Последовательно дифференцируя это равенство, найдем

$$\begin{cases} x^{(k)}(t) = \frac{1}{(n-k-1)!} \int\limits_{a}^{t} y(s)(t-s)^{n-k-1}ds, \quad 1 \le k \le n-1; \\ x^{(n)} = y(t). \end{cases}$$

При этом, очевидно, выполнены условия $x^{(k)}(a) = 0$ для $1 \le k \le n-1$. Подставляя найденные для $x^{(k)}(t)$ выражения в левую часть изначального уравнения, получим

$$y(t) + \int\limits_{a}^{t} K(t, s)y(s)ds = f(t),$$

где

$$K(t, s) = p_1(t) + p_2(t)\frac{t-s}{1!} + \ldots + p_n(t)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Таким образом, задача Коши для линейного уравнения n-го порядка с нулевыми начальными данными сведена к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Задачи

Составить интегральное уравнение, соответствующее задаче Коши:

1. $u' + 2xu = e^x, \qquad u(0) = 1;$

2. $u'' - \sin x u' + e^x u = x, \qquad u(0) = 1, \qquad u'(0) = -1;$

3. $u''' + xu = e^x, \qquad u(0) = 1, \qquad u'(0) = u''(0) = 0.$

Решить интегральное уравнение, сведя его к обыкновенному дифференциальному уравнению:

4. $x(t) = e^t + \int\limits_0^t x(s)ds;$

5. $x(t) = 1 + \int\limits_0^t sx(s)ds;$

6. $x(t) = \frac{1}{1+t^2} + \int\limits_0^t \sin(t-s)x(s)ds;$

7. $x(t) = e^{-t}\cos t - \int\limits_0^t \cos s e^{-(t-s)}x(s)ds;$

8. $x(t) = 4e^t + 3t - 4 - \int\limits_0^t (t-s)x(s)ds;$

9. $x(t) = t - 1 + \int\limits_0^t (t-s)x(s)ds.$

§2. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта

Интегральным оператором Гильберта — Шмидта называется оператор, сопоставляющий каждой функции $x \in L_2[a,b]$ функцию y с помощью правила

$$y(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

При этом предполагается, что модуль функции $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$, называемой *ядром интегрального оператора Гильберта — Шмидта*, интегрируем в квадрате:

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 dtds < +\infty.$$

Поскольку уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t)$$

может быть записано в операторном виде $x = Ax + f$, где A — оператор Гильберта — Шмидта, то неудивительно, что многие свойства решений интегральных уравнений могут быть получены с помощью общих теорем об операторах в гильбертовом пространстве. Необходимые для этого свойства оператора Гильберта — Шмидта изучаются в настоящем параграфе.

Теорема (о компактности оператора Гильберта — Шмидта)

Интегральный оператор Гильберта — Шмидта A является линейным компактным оператором, переводящим пространство $L_2[a,b]$ в себя. При этом его норма удовлетворяет неравенству

$$||A|| = \left\{ \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 dt ds \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Доказательство

В силу неравенства Коши — Буняковского, для каждого $t \in [a,b]$ имеем:

$$|y(t)|^2 = \left| \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds \right|^2 \leq \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 ds \cdot \int\limits_a^b |x(s)|^2 ds = ||x||^2 \cdot \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 ds.$$

Интегрируя по t, получим:

$$||Ax||^2 = ||y||^2 = \int\limits_a^b |y(t)|^2 dt \leq ||x||^2 \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 dt ds,$$

откуда следует, что $y \in L_2[a,b]$ и для нормы оператора A имеет место оценка, указанная в теореме. Осталось доказать, что оператор A компактен.

Пусть $\{x_n\}$ — полная ортогональная система функций в $L_2[a,b]$. Убедимся, что всевозможные попарные произведения $x_n \cdot \overline{x}_m$ образуют полную ортогональную систему функций в $L_2([a,b] \times [a,b])$.

Её ортогональность следует из того, что

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b [x_n(t)\overline{x_m}(s)] \cdot \overline{[x_{n_0}(t)\overline{x}_{m_0}(s)]} dt ds =$$

$$= \left[\int\limits_a^b x_n(t)\overline{x}_{n_0}(t)dt \right] \cdot \left[\int\limits_a^b x_{m_0}(s)\overline{x}_m(s)ds \right] = 0,$$

если нарушено хоть одно из равенств $n = n_0$ и $m = m_0$. Полнота же будет следовать из известного критерия полноты ортогональной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве: ортогональная система в гильбертовом пространстве полна, если не существует нулевого вектора, ортогонального сразу ко всем векторам системы. Преполагая, что функция $g : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ ортогональная любой функции $x_n\overline{x}_m$ и заменяя двойной интеграл повторным, будем иметь

$$0 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b g(t,s)\overline{x_n(t)\overline{x}_m(s)}dtds = \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b g(t,s)\overline{x}_n(t)dt\right] x_m(s)ds.$$

Поскольку это равенство справедливо при любом m, а система функций $\{x_m\}$ полна в $L_2[a,b]$, заключаем, что функция, стоящая в квадратных скобках, равняется нулю для почти всех $s \in [a,b]$:

$$\int\limits_a^b g(t,s)\overline{x}_n(t)dt = 0.$$

По той же причине $g(t,s) = 0$ для почти всех t и s, а значит, g равняется нулю как элемент пространства $L_2([a,b] \times [a,b])$. Но тогда, в силу критерия полноты, система $\{x_n\overline{x}_m\}$ полна.

Поскольку система $\{x_n\overline{x}_m\}$ полна в $L_2([a,b] \times [a,b])$, то ядро K, как и всякая другая функция из $L_2([a,b] \times [a,b])$, может быть разложено по этой системе:

$$K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}x_n(t)\overline{x}_m(s).$$

Для каждого натурального числа N положим

$$K_N(t,s) = \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn}x_n(t)\overline{x}_m(s)$$

и обозначим через A_N оператор, определяемый ядром K_N.

Нам потребуются следующие свойства оператора A_N:

a) оператор A_N ограничен;

b) оператор A_N отображает $L_2[a,b]$ в некоторое конечномерное пространство;

c) $||A - A_N|| \to 0$ при $N \to \infty$.

Ввиду неравенства (1), свойство (а) очевидно. Свойство (б) следует из того, что для любого $x \in L_2[a,b]$ функция $A_N x$ является линейной комбинацией функций $x_1, x_2, \ldots, x_N$:

$$(A_N x)(t) = \int\limits_a^b K_N(t,s)x(s)ds = \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn}x_n(t)\int\limits_a^b \overline{x}_m(s)x(s)ds = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t),$$

Наконец, чтобы доказать свойство (в), применим неравенство (1) к оператору $A - A_N$:

$$||A - A_N||^2 \leq \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s) - K_N(t,s)|^2 dtds = ||K - K_N||^2,$$

и заметим, что $||K - K_N|| \to 0$ при $N \to \infty$ в силу определения сходимости ряда

$$K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} x_n(t) \overline{x}_m(s).$$

Теперь всё готово для доказательства компактности оператора A. Изучая общие свойства линейных операторов, отображающих гильбертово пространство H в гильбертово пространство H_1, мы видели, что если пространство H_1 конечномерно, что линейный оператор $H \to H_1$ компактен тогда и только тогда, когда он ограничен. Поэтому из свойств (а) и (б) следует, что оператор A_N компактен. Но поскольку мы знаем, что предел последовательности компактных операторов обязательно является компактным оператором, то, в силу свойства (в), мы заключаем, что A компактен. Теорема доказана.

Теорема (об операторе, сопряжённом оператору Гильберта — Шмидта)

Если A — оператор Гильберта — Шмидта, с ядром $K(t,s)$, то сопряжённый ему оператор A^* также является оператором Гильберта — Шмидта с ядром $K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}$, где черта означает комплексное сопряжение.

Доказательство

Покажем, что для оператора $(By)(t) = \int\limits_a^b \overline{K(s,t)} y(s) ds$ и для любых $x, y \in L_2[a,b]$ выполнено равенство $(Ax, y) = (x, By)$ (т. е. $B = A^*$):

$$(Ax, y) = \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b K(t,s) x(s) ds \right] \overline{y(t)} dt = \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b K(t,s) \overline{y(t)} dt \right] x(s) ds =$$

$$= \int\limits_a^b \overline{\left[\int\limits_a^b \overline{K(s,t)} y(s) ds \right]} x(t) dt = (x, By).$$

Задача

10. Доказать, что при $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\gamma > 0$ и $\beta > \frac{\alpha}{2} - 1$ является компактным в пространстве $L_2[0,1]$ оператор A, заданный формулой

$$(ax)(t) = \int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s^\gamma) ds, \qquad t \in [0,1].$$

Является ли A оператором Гильберта — Шмидта? Опишите образ оператора A.

§3. Решение уравнений с вырожденным ядром

В этом параграфе мы рассмотрим один метод решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t), \tag{2}$$

ядро K которого имеет вид

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^n P_j(t)Q_j(s), \tag{3}$$

где $P_j : [a,b] \to \mathbb{C}$, $Q_j : [a,b] \to \mathbb{C}$ — некоторые функции, квадрат модуля которых интегрируем на отрезке $[a,b]$.

Ядро вида (3) называется *вырожденным.* Мы покажем, что решение уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром может быть сведено к решению некоторой линейной системы алгебраических уравнений.

Прежде всего заметим, что без ограничения общности можем считать функции P_j в разложении (3) линейно независимыми: в противном случае мы бы выделили среди P_j максимальное число линейно независимых, выразили бы остальные P_j линейно через независимые и, перегруппировав слагаемые, вновь получили бы выражение вида (3), но теперь в нем все P_j были бы линейно независимы.

Подставив в уравнение (2) вместо $K(t,s)$ его выражение (3), получим

$$x(t) = \sum_{j=1}^n P_j(t) \int_a^b Q_j(s)x(s)ds + f(t)$$

или

$$x(t) = \sum_{j=1}^n q_j P_j(t) + f(t), \tag{4}$$

где введено обозначение

$$q_j = \int_a^b Q_j(s)x(s)ds.$$

Смысл равенства (4) в том, что теперь мы знаем вид решения «с точностью до неопределенных коэффициентов q_j», для нахождения которых подставим (4) в уравнение (2):

$$\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \int\limits_a^b Q_j(s) \Big[\sum_{k=1}^{n} q_k P_k(s) + f(s) \Big] ds + f(t).$$

Вводя обозначение

$$a_{jk} = \int\limits_a^b Q_j(s) P_k(s) ds, \qquad b_j = \int\limits_a^b Q_j(s) f(s) ds,$$

перепишем последнее равенство так:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \Big[\sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_k + b_j \Big].$$

Ввиду линейной независимости функций P_j, это равенство возможно лишь в случае совпадения коэффициентов при P_j в его левой и правой частях:

$$q_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_k + b_j, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Таким образом, мы получили для коэффициентов q_j систему линейных алгебраических уравнений, решив которую с помощью формулы (4) найдём функцию x, заведомо удовлетворяющую интегральному уравнению (2): ведь все выкладки, с помощью которых мы пришли от уравнения (2) к системе (5), можно проделать в обратном порядке.

В заключение отметим, что если ядро уравнения (2) не вырождено, то, разлагая его в ряд Тейлора или ряд Фурье и удерживая конечное число слагаемых, получим уравнение с вырожденным ядром, решения которого по-видимому приближенно совпадают с решениями исходного уравнения. С деталями основанного на этой идее приближенного метода решения интегральных уравнений Фредгольма можно ознакомиться по книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Приближенные методы высшего анализа».

Задачи

Найти все решения уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром

11. $x(t) - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(t) \sin s x(s) ds = \sin t.$

12. $x(t) - \frac{2e}{e^2-1} \int\limits_0^1 \operatorname{ch} tx(s)ds = 1.$

13. $x(t) - \frac{24}{7} \int\limits_0^1 (1-t^2)(1-\frac{3}{2}s)x(s)ds = t.$

14. $x(t) - \int\limits_0^1 (2t-s)x(s)ds = \cos 2\pi t.$

15. $x(t) - \int\limits_{-1}^1 (\frac{3}{2}ts + t^2(s-1))x(s)ds = 0.$

16. $x(t) - \frac{4}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos{(t-s)}^2 x(s)ds = sin2t.$

17. $x(t) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^\pi \cos{(t-s)}x(s)ds = 0.$

18. $x(t) - 3\int\limits_0^1 (t^2s^2 + 4ts + 1)x(s)ds = 2\pi^2 cos2\pi t.$

§4. Альтернатива Фредгольма

Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \to H$ — линейный компактный оператор, A^* — его сопряжённый. Разрешимость уравнения (н)

$$x - Ax = f$$

устанавливается с помощью однородного уравнения (о)

$$x - Ax = 0,$$

сопряженного уравнения (сн)

$$y - A^*y = g$$

и однородного сопряженного уравнения (со)

$$y - A^*y = 0$$

следующей теоремой:

Теорема (альтернатива Фредгольма)

Для уравнения (н) возможны два случая:

I. Однородное уравнение (о) имеет только нулевое решение. При этом однородное сопряженное уравнение (со) также имеет только нулевое решение, а уравнение (н) и (сн) имеют и ровно одно решение для любой правой части.

II. Однородное уравнение (о) имеет n линейно независимых решений $x_1, \ldots, x_n$. При этом однородное сопряженное уравнение (со) также имеет n линейно независимых решений $y_1, \ldots, y_n$, а для разрешимости уравнения (н) необходимо и достаточно, чтобы для каждого $k = 1, \ldots, n$ $(y_k, f) = 0$. При выполнении последних условий общее решение уравнения (н) имеет вид

$$x = x_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n,$$

где x_0 — частное решение неоднородного уравнения (н), а c_k — произвольные постоянные.

Обратим внимание на то, что альтернатива Фредгольма, в частности, утверждает, что уравнение (н) не может иметь бесконечного числа линейно независимых решений.

Поскольку оператор Гильберта — Шмидта компактен, то не вызывает сомнений, что альтернатива Фредгольма имеет прямое отношение к интегральным уравнениям.

Доказательство альтернативы Фредгольма мы проведем только для оператора Гильберта — Шмидта с вырожденным ядром

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t) Q_j(s).$$

В соответствии с результатами предыдущего параграфа, решение уравнения (н) эквивалентно решению следующей линейной системы алгебраических уравнений:

$$q_j - \sum_{k=1}^{m} a_{jk} q_k = b_j, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

где $a_{jk} = \int\limits_a^b Q_j(s) P_k(s) ds$, $\qquad b_j = \int\limits_a^b Q_j(s) f(s) ds$. Ясно, что при этом решение однородного уравнения (о) эквивалентно решению соответствующей однородной системы:

$$q_j - \sum_{k=1}^{m} a_{jk} q_k = 0, \qquad j = 1, ..., m. \tag{7}$$

С другой стороны, в силу §2, сопряженный к A оператор будет задаваться ядром:

$$K^*(t,s) = \sum_{j=1}^{m} \overline{Q_j(t)} \cdot \overline{P_j(s)}.$$

Поэтому вопрос о разрешимости и числе решений уравнений (сн) и (со) эквивалентен такому же вопросу для систем

$$p_j - \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kj}} p_k = c_j, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

и

$$p_j - \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kj}} p_k = 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

соответственно, где черта, как обычно, означает комплексное сопряжение, а

$$c_j = \int\limits_a^b \overline{P_j(s)} g(s) ds.$$

Теперь уже легко убедиться, что для уравнений с вырожденным ядром альтернатива Фредгольма следует из хорошо известных из курса линейной алгебры свойств систем (6) — (9). В самом деле, поскольку система (7) не может иметь бесконечного числа линейно независимых решений, то для уравнения (о) есть только две возможности: либо оно имеет только нулевое решение, либо — конечное число линейно независимых решений.

Если уравнение (о) имеет только нулевое решение, то и система (7) имеет только нулевое решение, а значит, определитель матрицы $(\delta_{jk} - a_{jk})$, где δ_{jk} — символ Кронекера, отличен от нуля. Но тогда отличен от нуля и определитель эрмитово сопряженной ей матрицы $(\delta_{jk} - \overline{a_{kj}})$, следовательно, система (9) (а вместе с ней — и уравнение (со)) также имеет только нулевое решение при любой правой части.

Если же уравнение (о) имеет n линейно независимых решений $x_1, \ldots, x_n$, то и система (7) имеет n линейно независимых решений $q^1 = (q^1_1, \ldots, q^1_m), \ldots, q^n = (q^n_1, \ldots, q^n_m)$ таких, что $x_k(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} q^k_j P_j(t) + f(t)$. Ранг матрицы $(\delta_{jk} - a_{jk})$ равен $m - n$. Но тогда и ранг эрмитово сопряженной ей матрицы $(\delta_{jk} - \overline{a_{kj}})$ равен $m - n$, а значит — система (9) имеет ровно n линейно независимых решений $p^1 = (p^1_1, \ldots, p^1_m), \ldots, p^n = (p^n_1, \ldots, p^n_m)$.

Итак, в соответствии с формулой (4) предыдущего параграфа уравнение (со) имеет n линейно независимых решений $y_1, \ldots, y_n$, определяемых формулами

$$y_k(t) = \sum_{j=1}^{m} p^k_j \overline{Q_j(t)}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

При этом, как известно, необходимым и достаточным условием разрешимости системы (6) является ортогональность ее правой части каждому решению системы (9):

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \overline{p_j^k} = 0, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Принимая во внимание, что

$$y_k(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j^k \overline{Q_j(t)},$$

можем придать последнему такой вид:

$$(f, y_k) = \int_a^b f(t)\overline{y_k(t)}dt = \sum_{j=1}^{m} \overline{p_j^k} \int_a^b f(t)\overline{\overline{Q_j(t)}}dt = \sum_{j=1}^{m} b_j \overline{p_j^k} = 0$$

для любого $k = 1, \dots, n$.

Альтернатива Фредгольма для интегрального оператора с вырожденным ядром доказана. Её доказательство в общем случае интересующиеся могут найти, например, в учебнике А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина «Элементы теории функций и функционального анализа».

Задачи

Исследовать разрешимость уравнения с вырожденным ядром при различных значениях λ.

19. $x(t) - \lambda \int\limits_0^1 (1 + 2t)sx(s)ds = 1 - \frac{3}{2}t.$

20. $x(t) - \lambda \int\limits_0^1 t(1 + s)x(s)ds = t^2.$

21. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 (t + s)x(s)ds = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t.$

22. $x(t) - \lambda \int\limits_0^1 tx(s)ds = \sin 2\pi t.$

23. $x(t) - \lambda \int\limits_0^\pi \sin t \cdot \cos s x(s)ds = \cos t.$

24. $x(t) - \lambda \int\limits_0^\pi \cos(t + s)x(s)ds = 1.$

25. Рассмотрев $\mu = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ и $x(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-at} \pm \frac{t}{a^2+t^2}$, $t \geq 0$, $a > 0$, доказать, что для интегрального уравнения

$$x(t) = \mu \int\limits_0^{+\infty} \sin{(ts)} x(s) ds$$

неверно утверждение теоремы Фредгольма о конечности числа линейно независмых собственных функций однородного уравнения.

§5. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений

При решении уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) = \mu \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t),$$

содержащего параметр μ, оказывается полезной следующая теорема, доказанная ранее в разделе «операторы в гильбертовых пространствах».

Теорема (фон Неймана)

Если H - гильбертово пространство, $B : H \to H$ — линейный оператор такой, что $||B^m|| < 1$ для некоторого натурального m, то оператор $(I - B^{-1})$ существует, линеен, определен во всем пространстве H, ограничен и имеет место неравенство

$$(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n.$$

В самом деле, перепишем изначальное уравнение Фредгольма в операторном виде

$$x = \mu A x + f, \tag{8}$$

где A — соответствующий оператор Гильберта — Шмидта. Учитывая ограниченность оператора Гильберта — Шмидта:

$$||A|| \leq \left\{ \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 dtds \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

на основании теоремы фон Неймана заключаем, что для всех достаточно малых μ (а именно для $|\mu| < 1/||A||$) оператор $(I - \mu A)^{-1}$ может быть представлен в виде ряда

$$(I - \mu A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n$$

Следовательно, при $|\mu| < 1/||A||$ уравнение (8) для любого f имеет единственное решение, которое к тому же задается в виде ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f = f + \mu A f + \mu^2 A(Af) + \dots,$$

называемого *рядом Неймана.*

Другими словами, при $|\mu| < 1/||A||$ решение уравнения (8) может быть получено в виде ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

первый член которого совпадает со свободным членом уравнения (8): $x_0 = f$, а каждый последующий член выражается через предыдущий по рекуррентной формуле $x_{n+1} = \mu A x_n$. Такой способ нахождения решения называется *методом последовательных приближений.*

Интуитивно ясно, что частичная сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ряда Неймана может рассматриваться как приближенное решение уравнения (8). Это соображение действительно лежит в основе одного из распространенных приближенных методов решения интегральных уравнений, с которым можно более детально ознакомиться, например, по книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Приближённые методы высшего анализа».

При построении ряда Неймана нужно уметь находить n-ю степень A^n оператора A при любом n. Ядро оператора A^n называется повторным ядром и обозначается через K_n.

Теорема (о повторном ядре оператора Гильберта — Шмидта)

При $n = 2, 3, \dots,$ оператор A^n является оператором Гильберта — Шмидта и для повторных ядер справедливо соотношение

$$K_n(t,s) = \int_a^b K(t,r) K_{n-1}(r,s) dr.$$

Доказательство

При каждом $n = 2, 3, \dots,$ наша формула вытекает из следующего вычисления:

$$\int_a^b K_n(t,s) x(s) ds = (A^n x)(t) = A(A^{n-1}x)(t) =$$

$$= \int_a^b K(t,r)\big[A^{n-1}x\big](r)dr = \int_a^b K(t,r)\left[\int_a^b K_{n-1}(r,s)x(s)ds\right]dr =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(t,r)K_{n-1}(r,s)dr\right]x(s)ds.$$

Кроме того,

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 dtds = \int_a^b\int_a^b \left|\int_a^b K(t,r)K_{n-1}(r,s)dr\right|^2 dtds \leq$$

$$\leq \int_a^b\int_a^b \left(\int_a^b |K(t,r)|^2 dr \cdot \int_a^b |K_{n-1}(r,s)|^2 dr\right) dtds =$$

$$= \int_a^b\int_a^b |K(t,r)|^2 drdt \cdot \int_a^b\int_a^b |K_{n-1}(r,s)|^2 drds < +\infty.$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем записать ряд Неймана

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f$$

в виде интегрального оператора

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \int_a^b K_n(t,s)f(s)ds = \int_a^b R(t,s;\mu)f(s)ds, \tag{9}$$

где использовано обозначение

$$R(t,s;\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n K_n(t,s).$$

Интегральный оператор (9) называется *резольвентой* изначального интегрального оператора A, а функция R - его *резольвентным ядром.*

Задачи

26. Доказать, что если ядро K симметрично (т. е. удовлетворяет условию $K(t,s) = \overline{K(t,s)}$), то каждое повторное ядро K_n также симметрично.

Найти повторные ядра и резольвенту, а также представить через резольвенту решение следующих интегральных уравнений:

27. $x(t) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi x(s)ds = \sin t;$

28. $x(t) + \pi\int\limits_0^1 t\sin(2\pi s)\cdot x(s)ds = \cos 2\pi t;$

29. $x(t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 te^3 x(s)ds = e^{-t};$

30. $x(t) - \int\limits_0^{\pi/2} \sin t\cos s x(s)ds = 1;$

31. $x(t) - \frac{\ln 2}{2}\int\limits_0^1 2^{t+s}x(s)ds = t.$

§6. Интегральные уравнения с симметричными ядрами

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) = \mu\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds. \tag{10}$$

Будем записывать его в операторном виде $x = \mu Ax$, где $x \in L_2[a,b]$, а оператор Гильберта — Шмидта A отображает Гильбертово пространство $L_2[a,b]$ в себя. Как мы знаем, оператор A компактен и, кроме того, является самосопряженным, если $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$ (при выполнении последнего условия ядро называется *симметричным*).

Напомним, что в разделе «Операторы в гильбертовых пространствах» мы назвали ненулевой вектор $x \in H$ собственным вектором оператора B, отображающего гильбертово пространство H в себя, если $Bx = \lambda x$ для некоторого комплексного числа λ, называемого в этом случае собственным значением оператора B. В отличие от этого, в теории интегральных уравнений функцию $x \in L_2[a,b]$, не равную нулю тождественно, принято называть собственной функцией интегрального уравнения (10) (или собственной функцией уравнения $x = \mu Ax$ или собственной функцией ядра K), если имеет место равенство

$$x(t) = \mu\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$$

или $x = \mu Ax$ для некоторого комплексного числа μ, называемого при этом собственным значением интегрального уравнения (10) (или собственным значением уравнения $x = \mu Ax$ или собственным значением ядра K).

Короче говоря, мы можем сказать, что если $\lambda \neq 0$ является собственным значением оператора A, то число $\mu = 1/\lambda$ является собственным значением уравнения $x = \mu Ax$.

Напомним некоторые свойства собственных чисел и собственных векторов оператора $B : H \to H$, доказанные в разделе «Операторы в гильбертовых пространствах»:

1. Число линейно независимых векторов, отвечающих данному собственному значению $\lambda \neq 0$ компактного оператора B, конечно.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ число собственных значений оператора B, удовлетворяющих неравенству $|\lambda| > \varepsilon$, конечно.

3. Собственные значения компактного оператора B можно пронумеровать в порядке невозрастания модулей $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$.

4. Все собственные числа компактного самосопряженного оператора B вещественны.

5. Любые два собственных вектора самосопряженного компактного оператора B, отвечающие его различным собственным значениям, ортогональны.

6. Каждый ненулевой компактный самосопряженный оператор B имеет по крайней мере одно собственное число, отличное от нуля.

Следующие свойства собственных чисел и собственных функций интегрального уравнения $x = \mu Ax$ непосредственно вытекают из свойств (1) — (6) и в доказательстве не нуждаются:

i. Число линейно независимых собственных функций, отвечающих данному собственному значению μ интегрального уравнения $x = \mu Ax$, конечно.

ii. Для любого $\varepsilon > 0$ число собственных значений интегрального уравнения $x = \mu Ax$, удовлетворяющих неравенству $|\mu| < \varepsilon$, конечно.

iii. Собственные значения интегрального уравнения $x = \mu Ax$ можно пронумеровать в порядке неубывания модулей: $|\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \cdots$.

iv. Все собственные значения интегрального уравнения $x = \mu Ax$ с симметричным ядром вещественны.

v. Любые две собственные функции интегрального уравнения $x = \mu Ax$ с симметричным ядром, отвечающие его различным собственным значениям, ортогональны.

vi. Всякое интегральное уравнение $x = \mu Ax$ с симметричным ядром имеет по крайней мере одно собственное значение.

Задачи

Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения с вырожденным ядром:

32. $x(t) - \mu \int\limits_0^1 (1+2t)sx(s)ds = 0;$ 33. $x(t) - \mu \int\limits_0^1 (t+s)x(s)ds = 0;$

34. $x(t) - \mu \int\limits_0^1 \cos(t-s)x(s)ds = 0;$

Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения

$$x(t) - \mu \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = 0$$

с симметричным ядром, сводя его к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

35. $K(t,s) = \begin{cases} (s-1)t, & 0 \le t \le s; \\ s(t-1), & s \le t \le 1. \end{cases}$

36. $K(t,s) = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le s; \\ -s, & s \le t \le 1. \end{cases}$

37. $K(t,s) = \begin{cases} \sin s \cos t, & 0 \le t \le s; \\ \cos s \sin t, & s \le t \le 1. \end{cases}$

38. $K(t,s) = \frac{1}{2}\sin|t-s|, \quad a = 0, \quad b = \pi.$

§7. Теорема Гильберта — Шмидта для интегральных операторов. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра

Напомним, что наиболее важное свойство собственных функций самосопряжённого компактного оператор даётся следующей теоремой Гильберта — Шмидта: если H — гильбертово пространство и $B : H \to H$ самосопряженный компактный оператор, то в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора B. Чтобы сформулировать аналогичную теорему для интегрального уравнения $x = \mu Ax$ с симметричным ядром, примем следующие соглашения.

Всюду в §7 и 8 мы будем считать, что последовательность $x_1, \ldots, x_n$ собственных функций уравнения $x = \mu Ax$ с симметричным ядром является ортонормированной. Это не ограничивает общности рассуждений, так как в силу свойства (v) из предыдущего параграфа, собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, заведомо ортогональны. Что же касается собственных функций, отвечающих одному и тому же собственному значению, то они, очевидно, лежат в некотором подпространстве и мы можем заменить их произвольным ортонормированным базисом этого подпространства, построенным, например, с помощью процедуры ортогонализации Грама — Шмидта.

Кроме того, нам будет удобно использовать следующее

Определение

Говорят, что функция $f \in L_2[a,b]$ представима через ядро $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$, если существует функция $g \in L_2[a,b]$ такая, что

$$f(t) = \int\limits_a^b K(t,s)g(s)ds,$$

т. е. если f лежит в образе оператора Гильберта — Шмидта с ядром K.

Теорема (Гильберта — Шмидта для интегральных уравнений с симметричным ядром)

Если $f \in L_2[a,b]$ представима через симметричное ядро $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$, то она может быть разложена в ряд

$$f(t) = \sum_n f_n x_n(t), \tag{11}$$

где $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — ортонормированная последовательность собственных функций уравнения (10), а коэффициенты f_n задаются равенствами

$$f_n = \int\limits_a^b f(t)x_n(t)dt.$$

Замечания

1. И в теореме и в определении речь идёт о равенстве функций в пространстве $L_2[a,b]$, а не о их совпадении при каждом t из $[a,b]$.

2. В равенстве (11) суммирование по n может вестись как по конечному, так и по бесконечному множеству. В последнем сумма понимается как сумма бесконечного числа элементов гильбертова пространства $L_2[a,b]$.

Доказательство

Запишем интегральное уравнение (10) в виде $x = \mu Ax$ и обозначим через H образ оператора A. Фактически надо доказать, что в H существует ортонормированный базис из собственных функций уравнения $x = \mu Ax$.

Поскольку A является оператором Гильберта — Шмидта с симметричным ядром, то A компактен и самосопряжён. Значит, в $L_2[a,b]$ существует ортонормированный базис $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ из собственных векторов оператора A. Обозначим через λ_n собственное значение оператора, соответствующее собственному вектору $x_n : Ax_n = \lambda_n x_n$. Из последовательности $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ выберем подпоследовательность $x_{n_1}, \ldots, x_{n_j}, \ldots$ векторов, лежащих в H. Отметим, что векторы $x_{n_1}, \ldots, x_{n_j}, \ldots$ образуют базис в H и в зависимости от размерности H их число может быть конечно или бесконечно.

Убедимся, что теперь ни при каком значении j число λ_{n_j} не может равняться нулю. В самом деле, допустив противное, получим, что ненулевой вектор x_{n_j} удовлетворяет соотношениям $Ax_{n_j} = \lambda_{n_j} x_{n_j} = 0$. С другой стороны, поскольку $x_{n_j} \in H$, то найдется вектор $y \in L_2[a,b]$ такой, что $Ay = x_{n_j}$. Тогда, воспользовавшись самосопряженностью оператора A, будем иметь:

$$||x_{n_j}||^2 = (x_{n_j}, x_{n_j}) = (x_{n_j}, Ay) = (Ax_{n_j}, y) = (0, y) = 0,$$

а значит, $x_{n_j} = 0$. Полученное противоречие и доказывает, что $\lambda_{n_j} \neq 0$.

Учитывая, что $\lambda_{n_j} \neq 0$, мы можем переписать равенство $Ax_{n_j} = \lambda_{n_j} x_{n_j}$ в виде $x_{n_j} = (1/\lambda_{n_j}) Ax_{n_j}$, а значит, можем утверждать, что последовательность $x_{n_1}, \ldots, x_{n_j}, \ldots$ является ортонормированной последовательностью собственных функций уравнения $x = \mu Ax$.

Поскольку $x_{n_1}, \ldots, x_{n_j}, \ldots$ образуют базис в H, а функция f представима через ядро K оператора A, т. е. $f \in H$, то найдутся комплексные числа f_j такие, что

$$f = \sum_j f_j x_{n_j},$$

с точностью до обозначений совпадает с формулой (11). Чтобы найти выражение для f_m, достаточно, как обычно, умножить последнее равенство скалярно на x_{n_m} и воспользоваться ортонормированностью последовательности $x_{n_1}, \ldots, x_{n_j}, \ldots$:

$$\int\limits_a^b f(t) x_{n_m}(t) dt = (f, x_{n_m}) = \sum_j f_j (x_{n_j}, x_{n_m}) = f_m.$$

Теорема доказана.

Применим доказанную теорему к решению неоднородного уравнения $x = \mu Ax + f$, где A — интегральный оператор Гильберта — Шмидта с симметричным ядром K.

Если x является его решением, то $x - f = \mu Ax$, и это значит, функция $x - f$ представима через ядро K. поэтому она может быть разложена в ряд по ортонормированной последовательности $x_1, \dots, x_n, \dots$ собственных функций однородного уравнения $= \mu Ax$:

$$x - f = \sum_n a_n x_n. \tag{12}$$

Подставив это разложение для x в первоначальное уравнение и учитывая, что $x_n = \mu_n A x_n$, получим:

$$f + \sum_n a_n x_n = x = \mu Ax + f = \mu \sum_n \mu_n^{-1} a_n x_n + \mu Af + f$$

или

$$\sum_n \Big(a_n - \frac{\mu}{\mu_n} a_n \Big) x_n = \mu Af.$$

Поскольку функция Af, очевидно, представима через ядро K, то она тоже разлагается в ряд по функциям $x_1, \dots, x_n, \dots$, коэффициенты которого обозначим через b_n:

$$Af = \sum_n b_n x_n, \qquad b_n = \int\limits_a^b (Af)(t) x_n(t) dt.$$

Значит,

$$\sum_n \Big(a_n - \frac{\mu}{\mu_n} a_n - \mu b_n \Big) x_n = 0.$$

Откуда, учитывая линейную независимость функций $x_1, \dots, x_n, \dots$, находим

$$a_n = \mu \frac{\mu_n b_n}{\mu_n - \mu}.$$

Подставляя это выражение в формулу (12), получим:

$$x(t) = f(t) + \mu \sum_n \frac{\mu_n}{\mu_n - \mu} b_n x_n(t).$$

Наконец, воспользовавшись результатами следующего вычисления

$$b_n = \int\limits_a^b (Af)(t) x_n(t) dt = \int\limits_a^b \Bigg[\int\limits_a^b K(t,s) f(s) ds \Bigg] x_n(t) dt =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s)x_n(t)dt \right] f(s)ds = \int_a^b (Ax_n)(s)f(s)ds = \mu_n^{-1} \int_a^b x_n(s)f(s)ds,$$

получим формулу

$$x(t) = f(t) + \mu \sum_n \frac{x_n(t)}{\mu_n - \mu} \int_a^b x_n(s)f(s)ds, \tag{13}$$

называемую разложением решения интегрального уравнения $x = \mu Ax + f$ по собственным функциям ядра. Она позволяет предъявить решение неоднородного уравнения, если известны все решение соответствующего однородного. Иногда говорят, что решение (13) получено методом Гильберта — Шмидта.

Задачи

39. Объясните, почему при $f = 0$ формула (13) теряет смысл.

40. Повторяя рассуждения настоящего параграфа, выясните, как изменится формула (13) для $f \neq 0$ в случае, если параметр μ равен одному из собственных значений μ_n однородного уравнения $x = \mu Ax$. Сравните полученный результат с теоремой Фредгольма.

41. Решить интегральное уравнение

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (t+s)x(s)ds$$

методом Гильберта — Шмидта.

Воспользовавшись результатами решения задач 35 — 38, найти решения неоднородных уравнений Фредгольма с симметричными ядрами при различных значениях μ:

42. $x(t) - \mu \int_0^1 K(t,s)x(s)ds = 1, \qquad K(t,s) = \begin{cases} (s-1)t, & 0 \le t \le s; \\ s(t-1), & s \le t \le 1. \end{cases}$

43. $x(t) - \mu \int_0^1 K(t,s)x(s)ds = \sin \pi t \cos \frac{\pi}{2} t, \qquad K(t,s) = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le s; \\ -s, & s \le t \le 1. \end{cases}$

44. $x(t) - \mu \int_0^\pi K(t,s)x(s)ds = t - \pi, \qquad K(t,s) = \begin{cases} \sin s \cos t, & 0 \le t \le s; \\ \cos s \sin t, & s \le t \le 1. \end{cases}$

45. $x(t) - \mu \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin|t-s| x(s) ds = 1.$

§8. Разложение повторного ядра интегрального оператора по его собственным функциям. Билинейная формула

Дополним теорему Гильберта — Шмидта более специальными предложениями, справедливыми только для интегральных операторов.

Будем считать, что нам задано симметричное ядро $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$. Соответствующий ему оператор Гильберта — Шмидта обозначим, как обычно, через A. Будем считать, что нам известнен базис из ортонормированных собственных функций $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ оператора A и соответствующие им собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ оператора A.

Как обычно, через K_n обозначим повторное ядро, соответствующее K.

Теорема (о разложении ядра или билинейная формула)

Для симметричного ядра K при каждом $n \geq 1$ в пространстве $L_2([a,b] \times [a,b])$ имеет место равенство

$$K_n(t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^n x_j(t) \overline{x_j(s)}. \tag{14}$$

Доказательство

Как мы знаем из доказательства теоремы 1 из §2, если последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ образует ортонормированный базис в $L_2[a,b]$, то последовательность, составленная из всевозможных попарных произведений $x_m(t)\overline{x_n(s)}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2([a,b] \times [a,b])$. Поэтому, как всякая функция $L_2([a,b] \times [a,b])$, K_n может быть разложено в ряд Фурье по этому базису:

$$K_n(t,s) = \sum_{j,k=1}^{\infty} (K_n, x_j \overline{x_k}) x_j(t) \overline{x_k(s)} \tag{15}$$

и нам остается найти коэффициенты этого разложения:

$$(K_n, x_j \overline{x_k}) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_n(t,s) \overline{x_j(t)\overline{x_k(s)}} dt ds = \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b K_n(t,s) x_k(s) ds \right] \overline{x_j(t)} dt =$$

$$= \int\limits_a^b (A^n x_k)(t) \overline{x_j(t)} dt = (A^n x_k, x_j) = \lambda_k (A^{n-1} x_k, x_j) = \ldots = \lambda_k^n (x_k, x_j) = \lambda_k^n \delta_{kj},$$

где δ_{ij} — символ Кронеккера. Подставляя найденное значение в формулу (15), получим разложение (14). Теорема доказана.

В разложении (14) мы, очевидно, можем вести суммирование только по тем индексам j, для которых $\lambda_j \neq 0$. С другой стороны, очевидно, что если x_j является собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению $\lambda_j \neq 0$, то эта же самая функция x_j является собственной функцией уравнения $x = \mu Ax$, соответствующей собственному значению $\mu_j = 1/\lambda_j$ этого уравнения. Поэтому можно переписать билинейную формулу в виде

$$K_n(t,s) = \sum_j \frac{x_j(t)\overline{x_j(s)}}{m_j^n},$$

где $n \geq 1$, а суммирование ведется по множеству индексов некоторой максимальной ортонормированной системы $\{x_j\}$ собственных функций уравнения $x = \mu Ax$. В частности, может случиться так, что последняя формула содержит лишь конечное число слагаемых.

Не останавливаясь на вопросе поточечной сходимости билинейной формулы, укажем один наиболее известный результат в этом направлении.

Теорема (Мерсера)

Если ядро K непрерывно, симметрично и все его собственные значения, за исключением конечного числа их, имеют одинаковый знак, то все собственные функции x_j ядра K непрерывны, ряд

$$\sum_j \frac{x_j(t)\overline{x_j(s)}}{\mu_j}$$

сходится равномерно в $[a,b] \times [a,b]$ и для всех $t \in [a,b]$, $s \in [a,b]$ имеет метро равенство

$$K(t,s) = \sum_j \frac{x_j(t)\overline{x_j(s)}}{\mu_j}.$$

Доказательство теоремы Мерсера может быть найдено, например, в книгах А. Б. Васильевой и Н. А. Тихонова «Интегральные уравнения», Ф. Рисса и Б. Секефальви—Надя «Лекция по функциональному анализу» или в четвертом томе «Курса высшей математики», В. И. Смирнова.

Задачи

46. Докажите «легкую часть» теоремы Мерсера, касающуюся непрерывности собственных функций. А именно покажите, что если ядро K непрерывно, то все функции, представимые через ядро K, — непрерывны и выведите отсюда непрерывность собственных функций $x_j = \mu_j Ax_j$.

Доказать, что при выполнении условий теоремы Мерсера имеют место следующие равенства

47. $\sum\limits_j \frac{|x_n(t)|^2}{\mu_n^2} = \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 ds, \qquad t \in [a,b].$

48. $\sum\limits_n \frac{1}{\mu_n^2} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 dt ds.$ 49. $\sum\limits_n \frac{1}{\mu_n} = \int\limits_a^b K(t,t) dt.$

§9. Применение теории интегральных операторов к задаче Штурма — Лиувилля

Оператором Штурма — Лиувилля называется линейный дифференциальный оператор

$$Ly = \frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dy}{dx}\Big) + q(x)y(x),$$

где функция p непрерывно дифференцируема и положительна, а функция q непрерывна и неотрицательна на интервале $[a,b]$.

Задачей Штурма — Лиувилля называется задача о нахождении тех чисел λ, для которых существует ненулевое C^1-гладкое решение $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, дифференциального уравнения

$$Ly = \lambda \rho y,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(a) + Ay'(a) = 0, \qquad y(b) + By'(b) = 0.$$

Здесь A и B — известные числа, а ρ — известная непрерывная функция.

Значения параметра λ, при которых ненулевое решение существует, называются собственными значениями задачи Штурма — Лиувилля, а сами ненулевые решения называются собственными функциями задачи Штурма — Лиувилля. Такая терминология объясняется тем, что при $\rho \equiv 1$ речь действительно идет о собственных значениях и собственных функциях оператора L.

Определение

Функцией Грина оператора L называется такая обобщенная функция G двух переменных $x, t \in [a,b]$, которая удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Big(p(x)\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\Big) + q(x)G(x,t) = \delta(x-t)$$

для всех $x, t \in [a,b]$. Здесь δ, как обычно, обозначает дельта-функцию Дирака.

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что

1. для оператора Штурма — Лиувилля существует функция Грина, являющаяся «обыкновенной» функцией, симметричной по переменным x и t;

2. если $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма — Лиувилля, то решение задачи

$$Ly = f, \qquad y(a) + Ay'(a) = 0, \qquad y(b) + By'(b) = 0$$

выражается формулой

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x,t) f(t) dt.$$

Для полноты изложения докажем эти утверждения.

Теорема (о явном виде функции Грина)

Пусть y_1 и y_2 являются C^2-гладкими линейно независимыми решениями уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющими условиям $y_1(a) + Ay_1'(a) = 0$, $y_2(b) + By_2'(b) = 0$. Тогда выражение

$$p(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{16}$$

отлично от нуля и не зависит от $x \in [a,b]$, т. е. является отличной от нуля постоянной, которую мы обозначим через $1/c$. При этом функция $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$G(x,t) = \begin{cases} Cy_1(x)y_2(t), & x < t; \\ Cy_1(t)y_2(x), & x > t, \end{cases}$$

является функцией Грина оператора L.

Доказательство

Следующее вычисление убеждает нас, что выражение (16) постоянно в $[a,b]$:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}\right] = p'(y_1y_2' - y_1'y_2) + p(y_1' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2') =$$

$$= y_1(py_2') - y_2(py_1')' = y_2[(-py_1')' + qy_1] - y_1[(-py_2')' + qy_2] = y_2Ly_1 - y_1Ly_2 = 0.$$

Определитель, присутствующий в выражении (16), является опеределителем Вронского линейно независимых решений y_1 и y_2 и поэтому отличен от нуля. Функция p положительна по условию. Следовательно, выражение (16) отлично от нуля.

Дальнейшие вычисления проделаем на основе теоремы о связи классической и обобщенной производной кусочно-гладкой функции: если кусочно-гладкая функция f имеет разрывы в точках x_k, то её обобщенная производная f' связана с ее классической производной f'_c с помощью формулы

$$f' = f'_c + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k),$$

где $[f]_{x_k}$ обозначает скачок функции f в точке x_k.

В силу этой теоремы

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \begin{cases} Cy'_1(x)y_2(t), & \text{если } x < t; \\ Cy_1(t)y'_2(x), & \text{если } x > t. \end{cases}$$

Следовательно,

$$p(x)\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \begin{cases} Cp(x)y'_1(x)y_2(t), & \text{если } x < t; \\ Cp(x)y_1(t)y'_2(x), & \text{если } x > t, \end{cases}$$

и, ещё раз применяя теорему, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\right) = -Cp(x)\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}\delta(x-t)+$$

$$+\begin{cases} C[p(x)y'_1(x)]'y_2(t), & \text{если } x < t; \\ C[p(x)y'_2(x)]'y_1(t), & \text{если } x > t. \end{cases}$$

Учитывая определение постоянной C, отсюда найдем:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\right) + q(x)G(x,t) =$$

$$= \delta(x-t) + \begin{cases} C[-(p(x)y'_1(x))' + q(x)y_1(x)]y_2(t), & x < t; \\ C[-(p(x)y'_2(x))' + q(x)y_2(x)]y_1(t), & x > t. \end{cases}$$

Остается заметить, что второе слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю, так как результат применения оператора L, к каждой из функций y_1 и y_2, есть ноль. Теорема доказана.

Применение теории интегральных операторов к задаче Штурма — Лиувилля основано на следующей лемме.

Лемма

Если $f \in C^2[a,b]$ не является собственным значением задачи Штурма — Лиувилля, то решение $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, задачи

$$Ly = f, \quad y(a) + Ay'(a) = 0, \quad y(b) + By'(b) = 0$$

существует, единственно и выражается формулой

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x,t)f(t)dt. \tag{17}$$

Доказательство

Существование решения обычно доказывается с помощью стандартного приема, применяемого в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, — метода вариации постоянного вектора. Мы опустим эту часть доказательства, поскольку ничего нового добавить не сможем.

Чтобы убедиться в единственности, допустим, что нашлось два решения y_1 и y_2 нашей задачи. Тогда функция $y = y_1 - y_2$ не равна нулю тождественно и удовлетворяет условиям

$$Ly = Ly_1 - Ly_2 = f - f = 0 = o \cdot y,$$

$$y(a) + Ay'(a) = y_1(a) + Ay_1'(a) + y_2(a) + Ay_2'(a) = 0,$$
$$y(b) + By'(b) = y_1(b) + By_1'(b) + y_2(b) + By_2'(a) = 0.$$

Но это означает, что $\lambda = 0$ является собственным значением оператора L. Последнее противоречит условиям леммы. Единственность доказана.

Формулу (17) мы докажем, используя формализм теории обобщенных функций. Если φ — пробная функция (т. е. φ бесконечно дифференцируема и обращается в ноль в некоторой окрестности точек a и b), то, используя определения произвольной обобщенной функции: $(F', \varphi) = -(F, \varphi')$ и умножения обобщенной функции: $(aF, \varphi) = (F, a\varphi)$, можем записать:

$$(Ly, \varphi) = (-(py')' + qy, \varphi) = -((py')', \varphi) + (qy, \varphi) = (py', \varphi') + (y, q\varphi) =$$

$$= (y', p\varphi') + (y, q\varphi) = -(y, (p\varphi')') + (y, q\varphi) = (y, -(p\varphi')' + q\varphi) = (y, L\varphi).$$

Справедливости ради надо отметить, что равенство $(Ly, \varphi) = (y, L\varphi)$ не является для нас новым: оно выражает известный нам факт симметричности оператора Штурма — Лиувилля. Продолжая вычисления, возьмем в качестве y именно ту «обычную» функцию, которая задаётся равенством (17), так что её действие как обобщенной функции задаётся некоторым интегралом:

$$(y, L\varphi) = \Big(\int\limits_a^b G(x,t)f(t)dt, L\varphi\Big) = \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b G(x,t)f(t)dt\right](L\varphi)(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b G(x,t)(L\varphi)(x)dx\right] f(t)dt = ((G(x,t), (L\varphi)(x)), f(t)).$$

Предпоследнее равенство здесь написано на основании теоремы Фубини (докажите самостоятельно существование соответствующего двойного интеграла). Вновь используя симметричность оператора L и вспоминая определение функции Грина, будем иметь

$$((G(x,t),(L\varphi)(x)),f(t)) = ((LG(x,t),\varphi(x)),f(t)) =$$

$$((\delta(x-t),\varphi(x)),f(t)) = (\varphi(t),f(t) = (\varphi,f)).$$

Собирая воедино результаты предыдущих вычислений, получим, что если функция y задана формулой (17), то для любой пробной функции φ имеет место равенство

$$(Ly,\varphi) = (f,\varphi).$$

Это означает, что непрерывные функции Ly и f совпадают как обобщенные функции. Но тогда они совпадают и поточечно. Последнее утверждение можно обосновать, например, ссылкой на лемму Лагранжа из вариационного исчисления. Лемма доказана.

Теперь мы готовы перейти непосредственно к изложению применения теории интегральных операторов к задаче Штурма — Лиувилля.

Из только что доказанной леммы непосредственно следует, что задача Штурма — Лиувилля

$$Ly = \lambda\rho y, \qquad y(a) + Ay'(a) = 0, \qquad y(b) + By'(b) = 0$$

эквивалентна интегральному уравнениею

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,t)\rho(t)y(t)dt. \tag{18}$$

(Для этого нужно функцию $\lambda\rho y$ рассматривать как f).

Ядро полученного интегрального уравнения несимметрично, что не позволяет сразу в полном объеме применить теорию, развитую в предыдущих параграфах. Чтобы исправить такой недостаток, введем новую переменную

$$z(x) = \sqrt{\rho(x)y(x)}.$$

Тогда интегральное уравнение (18) примет вид

$$z(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)z(t)dt, \tag{19}$$

где введено обозначение $K(x,t) = G(x,t)\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(x)}$. Ядро K последнего уравнения, очевидно, симметрично ввиду симметричности функции Грина G, Последнее обстоятельство позволяет нам непосредственно использовать свойства (i) — (vi) §6 и теорему Гильберта — Шмидта для получения соответствующих свойств решений интегрального уравнения (19) и, тем самым, следующих свойств собственных функций и собственных значений задачи Штурма — Лиувилля:

1. Задача Штурма — Лиувилля имеет бесконечное число собственных значений.
2. Для любого $\varepsilon > 0$ число собственных значений задачи Штурма — Лиувилля, удовлетворяющих неравенству $|\lambda| < \varepsilon$, конечно.
3. Собственные значения задачи Штурма — Лиувилля можно перенумеровать в порядке неубывания модулей: $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$
4. Все собственные значения задачи Штурма — Лиувилля вещественны.
5. Любые две собственные функции y_1 и y_2 задачи Штурма — Лиувилля, отвечающие её различным собственным значениям λ_1 и λ_2, ортогональны в интервале $[a, b]$ с весом ρ:

$$\int_a^b y_1(x) y_2(x) \rho(x) dx = 0.$$

Подчеркнем, что не всякое интегральное уравнение (19) с симметричным ядром эквивалентно хоть какой-нибудь задаче Штурма — Лиувилля. Поэтому можно ожидать, что собственные значения задачи Штурма — Лиувилля обладают какими-то дополнительными свойствами. Для примера укажем одно такое свойство. Если, как обычно, рангом собственного значения называть число линейно независимых собственных функций, ему отвечающих, то свойство (i) §6 можно сформулировать так: каждое собственное значение μ интегрального уравнения $x = \mu Ax$ имеет конечный ранг. Для задачи Штурма — Лиувилля имеет место более сильное утверждение.

Теорема

Каждое собственное значение задачи Штурма — Лиувилля имеет ранг, равный единице.

Доказательство

Допустим, что ранг собственного значения λ больше единицы. Тогда существуют по крайней мере две C^2-гладкие линейно независимые функции y_1 и y_2, удовлетворяющие уравнению $Ly = \lambda \rho y$ и граничным условиям $y(a) + Ay'(a) = 0$, $y(b) + By'(b) = 0$. Поскольку уравнение $Ly = \lambda \rho y$ является уравнением второго порядка, то y_1 и y_2, как и два любые другие линейно независимые решения, образуют его фундаментальную систему решений. То есть любое решение $y = y(x)$ уравнения $Ly = \lambda\rho y$ является линейной комбинацией функций y_1 и y_2 и, в частности, удовлетворяет граничным условиям $y(a) + Ay'(a) = 0$, $y(b) + By'(b) = 0$. Но это абсурдно, так как заведомо существует решение уравнения $Ly = \lambda\rho y$, удовлетворяющее, например, условиям $y(a) + Ay'(a) = 1$, $-Ay(a) + y'(a) = 1$. Теорема доказана.

Наконец, укажем без доказательства очень важное свойство собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, вытекающее, по сути дела, из теоремы Гильберта — Шмидта.

Теорема (Стеклова)

Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема, причем $f(a) + Af'(a) = 0$ и $f(b) + Bf'(b) = 0$, то f разлагается в абсолютно и равномерно на $[a, b]$ сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$$

по ортонормированным собственным функциям $y_1, ..., y_n, ...$ задачи Штурма — Лиувилля:

$$Ly = \lambda\rho y, \qquad y(a) + Ay'(a) = 0, \qquad y(b) + By'(b) = 0.$$

При этом коэффициент f_n находится по формуле

$$f_n = \int_a^b f(x)\rho(x)y_n(x)dx.$$

Задачи

50. Найти функцию Грина оператора $Ly = d^2y/dx^2$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

51. Найти функцию Грина для оператора $Ly = d^2y/dx^2 + y$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

52. Преобразовать дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - k^2 y(x) - V_0 \frac{e^{-x}}{x} y(x) = 0,$$

решение которого удовлетворяет граничным условиям $y(0) = y(\infty) = 0$, в интегральное уравнение Фредгольма

$$y(x) = \mu \int_0^{+\infty} G(x,t)\frac{e^{-t}}{t} y(t)dt.$$

Величины V_0 и k^2 постоянны. Отметим, что исходное дифференциальное уравнение получается из уравнения Шредингера с мезонным потенциалом.

53. Исходя из разложения функции Грина по собственным функциям, показать, что

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi t\cdot\sin n\pi s}{n^2}=\begin{cases} s(1-t), & \text{если } s<t;\\ t(1-s), & \text{если } s>t.\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t\cdot\sin(n+\frac{1}{2})\pi s}{(n+\frac{1}{2})^2}=\begin{cases} s, & \text{если } s<t;\\ t, & \text{если } s>t.\end{cases}$$

§10. Интегральные уравнения Вольтерра: теорема о существовании и единственности решения

В самом начале нашего изложения, в §1, было отмечено, что решения уравнения Вольтерра обладают рядом специальных свойств, которых, вообще говоря, нет у решений уравнений Фредгольма. Чтобы обосновать это утверждение, приведём в настоящем параграфе следующую теорему, которую надо рассматривать как «противовес» альтернативе Фредгольма для уравнений Фредгольма, рассмотренной в §4.

Теорема (о существовании и единственности решения уравнения Вольтерра)

Если $K\in L_2([a,b]\times[a,b])$, то при любом μ и любой функции $f\in L_2[a,b]$, уравнение Вольтерра второго рода

$$x(t)=\mu\int_a^t K(t,s)x(s)ds+f(t),\qquad t\in[a,b],$$

имеет и притом единственное решение $x\in L_2[a,b]$, которое может быть найдено с помощью метода последовательных приближений.

Доказательство мы проведем лишь в случае, когда ядро K ограничено. Доказательство общего случая базируется на той же идее, но технически реализуется заметно сложнее. Заинтересованные читатели найдут его, например, в книге Ф. Трикоми «Интегральные уравнения».

Итак, предположим, что $|K(t,s)|\le M$ для всех $t,s\in[a,b]$ и обозначим через A соответствущий оператор Вольтерра. Воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского

$$\left[\int_a^b F_1(t)\cdot F_2(t)dt\right]^2<<\int_a^b F_1^2(t)dt\cdot\int_a^b F_2^2(t)dt,$$

для $x \in L_2[a,b]$ получим:

$$[(Ax)(t)]^2 = \left[\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds\right]^2 \le \int\limits_a^t K^2(t,s)ds \cdot \int\limits_a^t x^2(s)ds \le$$

$$\le (t-a)M^2 \int\limits_a^b x^2(s)ds = (t-a)M^2||x||^2.$$

Опираясь на последнее неравенство, с помощью того же приёма найдем:

$$\left[(A^2x)(t)\right]^2 = \left[\int\limits_a^t K(t,s)(Ax)(s)ds\right]^2 \le \int\limits_a^t K^2(t,s)ds \cdot \int\limits_a^t [(Ax)(s)]^2 ds \le$$

$$\le (t-a)M^2 \int\limits_a^t (s-a)M^2||x||^2 ds = \frac{(t-a)^3}{2} M^4||x||^2.$$

Применяя метод математической индукции, допустим, что для некоторого n выполнено неравенство

$$[(A^n x)(t)]^2 \le \frac{(t-a)^{2n+1}}{(2n)!!} M^{2n}||x||^2 \tag{20}$$

и докажем, что оно верно для $n+1$. В самом деле,

$$[(A^{n+1}x)(t)]^2 = \left[\int\limits_a^t K(t,s)(A^n x)(s)ds\right]^2 \le \int\limits_a^t K^2(t,s)ds \cdot \int\limits_a^t [(A^n x)(s)]^2 ds \le$$

$$\le (t-a)M^2 \int\limits_a^t \frac{(s-a)^{2n+1}}{(2n)!!} M^{2n}||x||^2 ds = \frac{(t-a)^{2n+3}}{(2n)!!(2n+2)} M^{2n+2}||x||^2.$$

Значит, неравенство (20) выполнено для любого n. Поэтому для любого n имеем

$$||A^n x||^2 = \int\limits_a^b [(A^n x)(t)]^2 dt \le \frac{M^{2n}||x||^2}{(2n+2)!!}(b-a)^{2n+2}.$$

Отсюда вытекает следующая оценка для нормы оператора $\mu^n A^n$:

$$||\mu^n A^n|| = \sup_{x \in L_2[a,b]} \frac{||\mu^n A^n x||}{||x||} \le |\mu|^n \frac{M^n (b-a)^{n+1}}{\sqrt{(2n+2)!!}} =$$

$$= \left[\frac{|\mu|M(b-a)}{\sqrt{2}}\right]^n \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}.$$

Поскольку для любого $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0,$$

то при любых значениях параметров μ, M, a и b найдется такое число n, что последнее выражение будет меньше единицы. Но тогда для этого номера n будем иметь

$$||\mu^n A^n|| < 1.$$

Следовательно, по теореме Фон Неймана, цитированной в §5, оператор $I - \mu A$ обратим. Но это и означает, что исходное уравнение Вольтерра, переписанное в операторной форме $x = \mu Ax + f$ или $(I - \mu A)x = f$, имеет и ровно одно решение, задаваемое равенством $x = (I - \mu A)^{-1} f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f$. Теорема Доказана.

Задачи

Используя метод последовательных приближений, решить уравнения:

54. $x(t) = \mu \int\limits_0^t sx(s)ds + 1$;

55. $x(t) = \mu \int\limits_0^t (s-t)x(s)ds + t$.

56. Решить уравнение

$$x(s) = \int\limits_0^t (t-s)x(s)ds + t^2$$

следующими тремя различными способами: а) сведением к дифференциальному уравнению; б) методом последовательных приближений; в) найти резольвенту и, таким образом, решить уравнение.

Используя преобразование Лапласа, решить интегральные уравнения Вольтерра:

57. $x(t) - 2\int\limits_0^t \cos(t-s)x(s)ds = e^t, \qquad t > 0$;

58. $x(t) - \int\limits_0^t e^{-2(t-s)}x(s)ds = 1 + t, \qquad t > 0$;

59. $\int\limits_0^t e^{t-s}x(s)ds = t$.

Оглавление