МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет
Кафедра автоматизации физико-технических исследований

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФ, д.ф.-м.н
В.Е.Блинов
« » 08 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

СИМВОЛЬНЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ В ФИЗИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

направление подготовки: **03.04.02 Физика**
направленность (профиль): **Все профили подготовки**

Форма обучения
Очная

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	144	32	32		58	18	2			2
Всего 144 часа / 4 зачетных единицы, из них: - контактная работа 68 часов										
Компетенции ОПК-3										

Руководитель программы
д.ф.-м.н. И. Б. Логашенко

Новосибирск, 2022

Содержание

1. **Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.**

Цель дисциплины – знакомство с современными численными методами статистического моделирования физических процессов, а также со специализированными пакетами программ, позволяющими, в частности, реализовывать представляемые численные схемы.

Дисциплина нацелена на формирование у обучающегося общепрофессиональной компетенции:

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-3. Способен применять знания в области информационных технологий, использовать современные компьютерные сети, программные продукты и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет" (далее - сеть "Интернет") для решения задач профессиональной деятельности, в том числе находящихся за пределами профильной подготовки.	**ОПК - 3.1.** Применяет профессионально-профилированные знания в области компьютерных технологий для решения профессиональных задач, в том числе находящихся за пределами профильной подготовки. **ОПК - 3.2.** Применяет знания в области информационных технологий для решения поставленных задач научных исследований с помощью современной аппаратуры, программных продуктов и ресурсов информационно-телекоммуникационной сети с использованием новейшего российского и зарубежного опыта.	**Знать** основы теории метода Монте-Карло: схема метода, погрешность метода, оптимизация метода, алгоритмы реализации случайных элементов; методы численного интегрирования и решения интегральных уравнений, решение модельных физических задач; основные функции системы «Математика». **Уметь** строить моделируемые вероятностные плотности, выводить простейшие формулы моделирования случайных элементов; решать простейшие модельные задачи с помощью пакета программ «Математика». **Владеть** основными принципами построения математических моделей, численная реализация которых связана с применением методов Монте-Карло; современными специализированными пакетами программ, позволяющих эффективно реализовывать численные алгоритмы решения задач математической физики.

2. **Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина «Символьные и численные расчеты в физических приложениях» относится к циклу профессиональных дисциплин по выбору и реализуется в весеннем семестре 1-го курса для магистров, обучающихся по направлению подготовки 03.04.02 Физика. Дисциплина «Символьные и численные расчеты в физических приложениях» непосредственно связана с дисциплинами математического и естественнонаучного цикла и опирается на освоенные при изучении данных дисциплин знания и умения. Магистранту необходимо знать математический анализ, линейную алгебру, основы функционального анализа и теории функций, введение в теорию вероятности, методы математической физики, а также физические основы информатики.

3. **Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.**

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	144	32	32		58	18	2			2
Всего 144 часа / 4 зачетных единицы, из них: - контактная работа 68 часов										
Компетенции ОПК-3										

Реализация дисциплины предусматривает практическую подготовку при проведении следующих видов занятий, предусматривающих участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента, консультации, экзамен.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

- Текущий контроль: опрос студентов в начале каждого занятия, решение задач;
- Промежуточная аттестация: экзамен.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет **144** академических часов/4 зачетных единиц:

- занятия лекционного типа – 32 часа;
- практические занятия – 32 часа;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 58 часов

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, экзамен) составляет 68 часов.

4. **Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.**

Дисциплина «Символьные и численные расчеты в физических приложениях» представляет собой полугодовой курс, читаемый на 1 курсе магистратуры физического факультета во 2 семестре. Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет **144** академических часа / **4** зачетных единицы.

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Всего	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Промежуточная аттестация (в часах)
				Аудиторные часы		Сам. работа в течение семестра (не включая период сессии)	
				Лекции	Практические занятия		
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Обзор системы "Математика". Выражения в системе "Математика"	1	4	2	2		
2	Образцы и подстановки в системе "Математика"	2	6	2	2	2	
3	Функции в системе "Математика"	3	8	2	2	4	
4	Построение базиса Грёбнера	4	8	2	2	4	
5	Математический анализ в системе "Математика"	5	8	2	2	4	
6	Линейная алгебра в системе "Математика"	6	8	2	2	4	
7	Выражения в системе "Математика"	7	8	2	2	4	
8	"Математика" как язык программирования	8	8	2	2	4	
9	Общая схема метода Монте-Карло. Численное интегрирование	9	8	2	2	4	
10	Случайные элементы в задаче переноса. Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода	10	8	2	2	4	
11	Датчики псевдослучайных чисел. Моделирование дискретных случайных величин	11	8	2	2	4	
12	Метод обратной функции распределения	12	8	2	2	4	
13	Моделирование случайных векторов. Метод суперпозиции	13	8	2	2	4	
14	Метод исключения	14	8	2	2	4	
15	Специальные методы моделирования случайных величин	15-16	16	4	4	8	
16	Групповая консультация		2				2
17	Самостоятельная подготовка обучающегося к экзамену		18				18
18	Экзамен		2				2
	Всего:		**144**	**32**	**32**	**58**	**22**

Программа и основное содержание лекций (32 часа)

1	Обзор системы "Математика". Выражения в системе "Математика" (2 часа)
2	Образцы и подстановки в системе "Математика" (2 часа)

3	Функции в системе "Математика" (2 часа)
4	Построение базиса Грёбнера (2 часа)
5	Математический анализ в системе "Математика" (2 часа)
6	Линейная алгебра в системе "Математика" (2 часа)
7	Выражения в системе "Математика" (2 часа)
8	"Математика" как язык программирования (2 часа)
9	Общая схема метода Монте-Карло. Численное интегрирование (2 часа)
10	Случайные элементы в задаче переноса. Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода (2 часа)
11	Датчики псевдослучайных чисел. Моделирование дискретных случайных величин (2 часа)
12	Метод обратной функции распределения (2 часа)
13	Моделирование случайных векторов. Метод суперпозиции (2 часа)
14	Метод исключения (2 часа)
15	Специальные методы моделирования случайных величин (4 часа)

Программа практических занятий (32 часа)

1	Вычисление математического ожидания и дисперсии методом Монте-Карло. (2 часа)
2	Вычисление интеграла методом Монте-Карло. (2 часа)
3	Погрешность и трудоемкость метода Монте-Карло. (2 часа)
4	Метод выборки по важности. (2 часа)
5	Методы уменьшения дисперсии (основные идеи): выделение главной части, интегрирование по части области, выборка по группам. (2 часа)
6	Случайные элементы в задачах теории переноса. (2 часа)
7	Интегральное уравнение второго рода, ряд Неймана. Линейный функционал, как интеграл бесконечно возрастающей кратности. (2 часа)
8	Однородная цепь Маркова, обрывающаяся с вероятностью единица, и ее моделирование. (2 часа)
9	Оценка по столкновениям для вычисления линейного функционала от решения интегрального уравнения второго рода. Прямое моделирование. Локальные оценки. (2 часа)
10	Физические датчики случайных чисел и генераторы псевдослучайных чисел. Метод вычетов и его свойства. (2 часа)
11	Стандартный метод моделирования дискретных распределений и его трудоемкость. (2 часа)
12	Моделирование равномерного дискретного распределения. Квантильный метод. (2 часа)
13	Метод обратной функции распределения. Конструирование моделируемых плотностей. (2 часа)
14	1Моделирование случайных векторов. Конструирование двумерного моделируемого вектора с зависимыми компонентами. (2 часа)
15	Методы интегральной и дискретной суперпозиции. Конструирование моделируемых плотностей (4 часа)

Самостоятельная работа студентов (76 часов)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям.	48
Изучение теоретического материала, не освещаемого на лекциях	10
Подготовка к экзамену	18

5. **Перечень учебной литературы**

5.1. Основная литература

1. Войтишек А.В. Лекции по численным методам Монте-Карло. Уч. пособие. Новосибирск: НГУ, 2018. – 314 с.
2. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. Уч. пособие. Москва: Издательство «Юрайт», 2018. – 367с.

5.2. Дополнительная литература

3. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло. Уч. пособие. Новосибирск: НГУ, 2010. – 66с.

6. **Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся**

1. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. Уч. пособие. Москва: Издательский центр «Академия», 2006.
2. Михайлов Г.А. Весовые методы Монте-Карло. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2000.
3. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс. Санкт-Петербург: Невский Диалект, 2009.
4. Войтишек А.В. Дополнительные сведения о численном моделировании случайных элементов. Новосибирск: НГУ, 2007.
5. Войтишек А.В. Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2007.
6. Войтишек А.В. Дискретно-стохастические модификации стандартного метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2009.
7. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Часть 1: Обзор методов Монте-Карло. Генераторы случайных и псевдослучайных чисел. Новосибирск: НГУ, 1997.
8. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Часть 2: Моделирование дискретных случайных величин. Моделирование непрерывных случайных величин методом обратной функции распределения. Новосибирск: НГУ, 1997.
9. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Часть 3: Моделирование случайных векторов. Моделирование непрерывных случайных величин методом суперпозиции. Моделирование непрерывных случайных величин с использованием методов исключения. Новосибирск: НГУ, 1997.
10. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Часть 4: Моделирование случайных величин с распределениями, связанными с гамма-распределением. Моделирование случайных процессов и полей. Новосибирск: НГУ, 1997.
11. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Часть 5: Вычисление многократных интегралов. Аппроксимация интегралов, зависящих от параметра. Новосибирск: НГУ, 1999.
12. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Часть 6: Вычисление линейных функционалов от решения интегрального уравнения второго рода. Дискретно-стохастические методы решения интегрального уравнения второго рода. Новосибирск: НГУ, 2004.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:
- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет

7.1 Современные профессиональные базы данных

Не используются.

7.2. Информационные справочные системы

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.

2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Перечень результатов обучения по дисциплине «Символьные и численные расчеты в физических приложениях» и индикаторов их достижения представлен в виде знаний, умений и владений в разделе 1.

10.1 Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Текущий контроль

Текущий контроль осуществляется в ходе семестра путем опроса в начале каждой лекции по материалам предыдущей лекции, а также проведения коротких самостоятельных работ в начале каждого занятия с решением типовых задач, разобранных на предыдущем занятии.

Промежуточная аттестация

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-3 сформирована не ниже порогового уровня в части, относящейся к формированию способности использовать специализированные знания в области физических основ информационных технологий в профессиональной деятельности.

Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на экзамене. Экзамен проводится в конце семестра в экзаменационную сессию по билетам в устной форме. Вопросы билета подбираются таким образом, чтобы проверить уровень сформированности компетенции ОПК-3.

Вывод об уровне сформированности компетенций принимается преподавателем. Каждый вопрос билета оценивается от 0 до 5 баллов. Положительная оценка ставится, когда все компетенции освоены не ниже порогового уровня. Оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» означают успешное прохождение промежуточной аттестации.

Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

Индикатор	Результат обучения по дисциплине	Оценочные средства
ОПК - 3.1. Применяет профессионально-профилированные знания в области компьютерных технологий для решения профессиональных задач, в том числе находящихся за пределами профильной подготовки.	**Знать** основы теории метода Монте-Карло: схема метода, погрешность метода, оптимизация метода, алгоритмы реализации случайных элементов; методы численного интегрирования и решения интегральных уравнений, решение модельных физических задач; основные функции системы «Математика».	Проведение опроса после лекций, экзамен.
ОПК - 3.2. Применяет знания в области информационных технологий для решения поставленных задач научных исследований с помощью современной аппаратуры, программных продуктов и ресурсов информационно-телекоммуникационной сети с использованием новейшего российского и зарубежного опыта.	**Уметь** строить моделируемые вероятностные плотности, выводить простейшие формулы моделирования случайных элементов; решать простейшие модельные задачи с помощью пакета программ «Математика». **Владеть** основными принципами построения математических моделей, численная реализация которых связана с применением методов Монте-Карло; современными специализированными пакетами программ, позволяющих эффективно реализовывать численные алгоритмы решения задач математической физики.	Проведение опроса после лекций, экзамен.

10.2 Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Символьные и численные расчеты в физических приложениях».

Таблица 10.2

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК 3.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/ несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК 3.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.
Наличие навыков (владение опытом)	ОПК 3.2	Отсутствие владения материалом по темам/разделам дисциплины. Нет навыков в решении стандартных задач. Наличие грубых ошибок.	Имеется минимальный набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.	Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.	Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач без ошибок и недочетов. Продемонстрированы знания по решению нестандартных задач.

10.3 Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Примеры задач с решением

ЗАДАЧА А1 [2]. *Сформулируйте метод обратной функции распределения и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины* ξ*, имеющей плотность распределения*

$$f(u) = 3\sin\, 2u\, \cos^4 u,\;\; 0 < u < \frac{\pi}{2}.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуя соответствующее уравнение метода обратной функции распределения, последовательно получаем

$$\int_0^{\xi_0} 3\sin\,2u\,\cos^4 u\,du = \alpha_0,\quad \int_0^{\xi_0} 6\cos^5 u\,\sin\,u\,du = \alpha_0,\quad 1-\cos^6\xi_0 = \alpha_0,\quad \xi_0 = \arccos\sqrt[6]{\alpha_0'},$$

где $\alpha_0' = 1-\alpha_0$. Проверка 13.1 из [2] (подстановка значений $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_0 = 1$ в полученную формулу) дает: при $\alpha_0 = 0$ имеем $\xi_0 = \arccos\sqrt[6]{1-0} = 0$, а при $\alpha_0 = 1$ имеем $\xi_0 = \arccos\sqrt[6]{1-1} = \pi/2$.

Задача по теме «Моделирование двумерного вектора»

ЗАДАЧА Б1 [2]. *Сформулируйте стандартный метод моделирования случайного вектора и продемонстрируйте его на примере двумерного вектора* (ξ,η), *имеющего плотность распределения*

$$f(u,v) = \frac{e^{-4uv}}{v^4},\quad u>0,\quad v>\frac{1}{2}.$$

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что интегрирование этой функции по переменной v затруднено, и соответствующее разложение совместной плотности в произведение условной и «безусловной» плотностей не дает простых алгоритмов моделирования случайного вектора (ξ,η). Рассмотрим представление

$$f_\eta(v) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-4uv}du}{v^4} = \frac{1}{4v^5},\quad v>\frac{1}{2};\quad f_\xi(u\,|\,v) = \frac{f(u,v)}{f_\eta(v)} = 4ve^{-4uv},\quad u>0.$$

Выведем формулу метода обратной функции распределения для компоненты η:

$$\int_{1/2}^{\eta_0} \frac{dv}{4v^5} = \alpha_1,\quad 1-\frac{1}{16\eta_0^4} = \alpha_1, \text{ и, наконец, } \eta_0 = \frac{1}{2(\alpha'_1)^{1/4}}, \text{ где } \alpha'_1 = 1-\alpha_1.$$

Проверка 13.1 из [2] при $\alpha_1 = 0$ дает $\eta_0 = 1/(2(1-0)^{1/4}) = 1/2$, а при $\alpha_1 = 1$ - $\eta_0 = 1/(2(1-1)^{1/4}) = +\infty$. Для моделирования компоненты ξ можно использовать табличную формулу моделирования экспоненциального распределения с параметром $\lambda = 4\eta_0$, то есть $\xi_0 = -(\ln\,\alpha_2)/(4\eta_0)$.

Задача по теме «Метод дискретной суперпозиции»

ЗАДАЧА В1 [2]. *Сформулируйте метод дискретной суперпозиции и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины* ξ, *имеющей плотность распределения*

$$f(u) = \frac{3\cos\sqrt{u}}{8\sqrt{u}} + \frac{1}{\pi^2},\quad 0<u<\frac{\pi^2}{4}.$$

РЕШЕНИЕ. Данная плотность не является плотностью элементарного распределения, так как последовательные преобразования уравнения метода обратной функции распределения дают уравнения

$$\int_0^{\xi_0}\left(\frac{3\cos\sqrt{u}}{8\sqrt{u}} + \frac{1}{\pi^2}\right)du = \alpha_0,\quad \frac{3\sin\sqrt{\xi_0}}{4} + \frac{\xi_0}{\pi^2} = \alpha_0, \tag{1}$$

которые неразрешимо относительно ξ_0. По аналогии с выкладками (1) вычисляем

$$p_1 = \int_0^{\pi^2/4} \frac{3\cos\sqrt{u}}{8\sqrt{u}}du = \frac{3\sin\sqrt{\pi^2/4}}{4} = \frac{3}{4},\quad p_2 = \int_0^{\pi^2/4}\frac{du}{\pi^2} = \frac{1}{4}.$$

и получаем представление $f(u) = p_1 f_1(u) + p_2 f_2(u)$, где

$$f_1(u) = \frac{\cos\sqrt{u}}{2\sqrt{u}},\quad f_2(u) \equiv \frac{1}{\pi^2},\quad 0<u<\frac{\pi^2}{4}.$$

Выведем формулы метода обратной функции распределения для плотности $f_1(u)$:

$\int_0^{\xi_0}\frac{\cos\sqrt{u}}{2\sqrt{u}}du = \alpha_2$, $\sin\sqrt{\xi_0} = \alpha_2$, и, наконец $\xi_0 = (\arcsin\,\alpha_2)^2$. Проверка 13.1 из [2] при $\alpha_2 = 0$ дает $\xi_0 = 0$, а при $\alpha_2 = 1$ имеем $\xi_0 = (\arcsin\,1)^2 = \pi^2/4$. Плотность $f_2(u)$ является табличной (это равномерное распределение на интервале $(0,\pi^2/4)$; соответствующая моделирующая формула: $\xi_0 = \pi^2\alpha_2/4$.

Алгоритм метода дискретной суперпозиции для реализации выборочного значения ξ_0 случайной величины ξ имеет вид: *если* $\alpha_1 < 3/4$*, то* $\xi_0 = (\arcsin\ \alpha_2)^2$*, иначе* $\xi_0 = \pi^2\alpha_2/4$.

Задача по теме «Мажорантный метод исключения»

ЗАДАЧА Г1 [2]. *Сформулируйте метод исключения и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины* ξ*, имеющей плотность распределения* $f(u)$*, пропорциональную функции* $g(u) = (2 + (\arcsin\ u)/(5\pi))u^3,\ 0 < u < 1$. *Оцените сверху трудоемкость метода.*

РЕШЕНИЕ. Несложно убедиться в том, что плотность $f(u)$ не является элементарной. Заметим, что $g(u) = Y(u) \times \bar{g}^{(1)}(u)$, где $\bar{g}^{(1)}(u) = u^3$ и $Y(u) = 2 + (\arcsin\ u)/(5\pi)$, причем, в силу монотонности функции $\arcsin\ u$ на интервале $(0,1)$ выполнено неравенство $2 < Y(u) < 2.1$. Тогда $g(u) < g^{(1)}(u) = 2.1u^3$. Вычислим интеграл $\bar{G}^{(1)} = \int_0^1 g^{(1)}(u)\,du = \dfrac{2.1}{4}$. Плотность, пропорциональная мажоранте $g^{(1)}(u)$, является табличной (степенной): $f^{(1)}(u) = 4u^3,\ 0 < u < 1$ [2]; соответствующая моделирующая формула: $\xi_0^{(1)} = \sqrt[4]{\alpha_0}$. Алгоритм метода исключения включает следующие пункты.

1. Реализуем выборочное значение $\xi_0^{(1)}$ *по формуле* $\xi_0^{(1)} = \sqrt[4]{\alpha_1}$*, а также величину* $\eta_0 = \alpha_2 g^{(1)}(\xi_0^{(1)}) = 2.1\alpha_2(\xi_0^{(1)})^3$. *Точка* $(\xi_0^{(1)},\eta_0)$ *равномерно распределена в «подграфике» мажоранты* $g^{(1)}(u)$.

2. Проверяем неравенство $\eta_0 < g(\xi_0^{(1)})$ *или*

$$10.5\pi\alpha_2 < 10\pi + \arcsin\sqrt[4]{\alpha_1}\,. \qquad (2)$$

Если это неравенство выполнено, то точка $(\xi_0^{(1)},\eta_0)$ *принадлежит «подграфику» функции* $g(u)$ *и является равномерно распределенной в этом множестве. Тогда в качестве выборочного значения* ξ_0 *случайной величины* ξ *берем* $\xi_0 = \xi_0^{(1)}$. *Если же неравенство* (2) *не выполнено, то повторяем пункт* 1 *и т.д.*

Трудоемкость s (т.е. среднее число попыток розыгрыша пар $(\xi_0^{(1)},\eta_0)$ до выполнения неравенства (2) оценивается сверху величиной $s < 2.1/2 = 1.05$. Эта величина близка к единице, и, следовательно, предложенный алгоритм мажорантного метода исключения эффективен.

Задача по теме «Выборка по важности»

ЗАДАЧА Д1 [2]. *Сформулируйте метод выборки по важности и продемонстрируйте его на примере вычисления интеграла*

$$I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^{+\infty} (x^{(2)}(x^{(3)})^2 e^{-4x^{(4)}} \times \sqrt{2 + \cos(6x^{(1)}(x^{(2)})^3(x^{(3)})^7(x^{(4)})^9)}\,dx^{(1)}dx^{(2)}dx^{(3)}dx^{(4)}.$$

Оцените сверху дисперсию соответствующей оценки.

РЕШЕНИЕ. В качестве плотности $f(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)})$ выбираем

$$f(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}) = 1 \times (2x^{(2)}) \times (3(x^{(3)})^2) \times (4e^{-4x^{(4)}}),\ 0 < x^{(j)} < 1,\ \ j = 1,2,3 \ \text{ и } \ x^{(4)} > 0,$$

а функция $q(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}) = g(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}) / f(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)})$ имеет вид

$$q(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}) = \frac{1}{24} \times \sqrt{2 + \cos(6x^{(1)}(x^{(2)})^3(x^{(3)})^7(x^{(4)})^9)}\,.$$

Учитывая, что $-1 \le \cos u \le 1$, получаем неравенство $m_1 \le q(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}) \le m_2$, где $m_1 = 1/24$ и $m_2 = \sqrt{3}/24$.

Имеем $I = E\varsigma = Eq(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\xi^{(3)},\xi^{(4)})$ причем компоненты $\xi^{(j)}$, $j = 1,2,3,4$ независимы и имеют табличные распределения [2]: компонента $\xi^{(1)}$ - равномерное, компоненты $\xi^{(2)}$ и $\xi^{(3)}$ - степенное, а $\xi^{(4)}$ - экспоненциальное. Учитывая это, получаем следующий алгоритм выборки по важности.

Реализуем выборочные значения компонент вектора $(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\xi^{(3)},\xi^{(4)})$ *по формулам:* $\xi_i^{(1)} = \alpha_{1,i}$, $\xi_i^{(2)} = \sqrt{\alpha_{2,i}}$, $\xi_i^{(3)} = \sqrt[3]{\alpha_{3,i}}$, $\xi_i^{(4)} = -(\ln\ \alpha_{4,i})/4$, *где* $i = 1,\ldots,n$, *а* $\alpha_{k,j}$, $k = 1,2,3,4$ *- реализации стандартной случайной величины* α *и приближенно вычисляем*

$$I \approx \frac{1}{24n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2+\cos(6\xi_i^{(1)}(\xi_i^{(2)})^3(\xi_i^{(3)})^7(\xi_i^{(4)})^9}) .$$

Справедливо неравенство $D\varsigma \le (m_2 - m_1)^2/4 \approx 2.33\times 10^{-4}$. Это достаточно малая величина и, следовательно, предложенный алгоритм выборки по важности эффективен.

Контрольные вопросы по разделу «Моделирование случайных величин, векторов и функций»

- Что такое стандартное случайное число α ?
- Как реализуются выборочные значения стандартного случайного числа на ЭВМ?
- Каковы принципы построения физического датчика стандартных случайных чисел?
- Что такое метод вычетов?
- Каким образом происходит тестирование генераторов стандартных случайных чисел?
- Опишите стандартный алгоритм моделирования дискретной случайной величины.
- Опишите специальный алгоритм моделирования равномерного дискретного распределения.
- Напишите основное интегральное соотношение для метода обратной функции распределения.
- Опишите стандартный алгоритм моделирования двумерного случайного вектора.
- Как выглядит плотность распределения случайной величины, для численного моделирования которой эффективно применим метод дискретной суперпозиции?
- Почему для плотности, представляющей собой сумму неотрицательных функций, нормирующие коэффициенты, превращающие слагаемые в плотности, имеют смысл вероятностей?
- Опишите метод дискретной суперпозиции.
- Опишите мажорантный метод исключения.
- В каких случаях применимы алгоритмы метода обратной функции распределения, метода суперпозиции и мажорантного метода исключения для моделирования случайной величины с полиномиальной плотностью распределения?
- Напишите формулу моделирования гамма-распределения с целым параметром.
- Напишите формулы моделирования стандартного нормального распределения.

Контрольные вопросы по разделу «Вычисление интегралов методом Монте-Карло»

- Как вычислить математическое ожидание методом Монте-Карло?
- Какая теорема теории вероятностей обосновывает метод Монте-Карло?
- Как записать интеграл в виде математического ожидания?
- Каков порядок погрешности метода Монте-Карло (по числу испытаний)?
- Какой вид имеет аналитическое выражение для погрешности метода Монте-Карло?
- Какая теорема теории вероятностей является основой получения аналитического выражения для погрешности метода Монте-Карло?
- Как оцениваются затраты метода Монте-Карло?
- Что такое трудоемкость метода Монте-Карло?
- Как вычисляются дисперсия оценки и среднее время реализации одного выборочного значения?

- Почему при реализации методов Монте-Карло стараются (при прочих равных условиях) уменьшить дисперсию соответствующей стохастической оценки?
- Какой выбор плотности дает наименьшую дисперсию весовой оценки метода Монте-Карло для задачи вычисления интеграла?
- Что такое метод выборки по важности?
- Как учитываются особенности подынтегральной функции, описываемые дельта-функциями, при построении оценок метода Монте-Карло?
- Какие методы уменьшения дисперсии для задачи вычисления интеграла Вы знаете?

Контрольные вопросы по разделу «Решение интегральных уравнений и приложения метода Монте-Карло»

- Математическая модель какого физического процесса исторически явилась толчком для развития теории алгоритмов численного статистического моделирования?
- Опишите простейшую математическую модель процесса переноса излучения.
- Какие вероятностные распределения приходится моделировать при реализации прямого моделирования процесса переноса излучения?
- Какой вероятностный процесс образуют состояния столкновений в модели переноса излучения?
- Какому уравнению удовлетворяет суммарная плотность столкновений для процесса переноса излучения?
- В каком случае ряд Неймана является единственным решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода?
- Как проверить, что ряд Неймана является решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода?
- Опишите все обозначения в выражении для оценки по столкновениям $\varsigma = \sum_{m=0}^{N} Q^{(m)} h(\xi^{(m)})$.
- Чему равно математическое ожидание оценки по столкновениям?
- Почему линейный функционал от решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода можно трактовать как сумму интегралов бесконечно возрастающей кратности?
- Как связана идея построения оценки по столкновениям с методом выборки по важности?
- Что такое однородная цепь Маркова, обрывающаяся с вероятностью единица?
- Каким образом реализуется, обрыв при моделировании траекторий однородной цепи Маркова, обрывающейся с вероятностью единица?
- Опишите алгоритм моделирования траекторий однородной цепи Маркова, обрывающейся с вероятностью единица.
- Опишите алгоритм метода Монте-Карло для приближения линейного функционала от решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.
- Что такое прямое моделирование?
- Что такое локальная оценка метода Монте-Карло?
- Почему в прикладных задачах чаще применяется метод сопряженных блужданий, а не «функциональная» локальная оценка?

Перечень экзаменационных билетов

БИЛЕТ 1
1. Задача по теме «Моделирование случайного вектора».
2. Вычисление математического ожидания и дисперсии методом Монте-Карло.

БИЛЕТ 2
1. Задача по теме «Моделирование случайного вектора».
2. Вычисление интеграла методом Монте-Карло.

БИЛЕТ 3
1. Задача по теме «Моделирование случайного вектора».

2. Погрешность и трудоемкость метода Монте-Карло.
БИЛЕТ 4
1. Задача по теме «Метод обратной функции распределения».
2. Метод выборки по важности.
БИЛЕТ 5
1. Задача по теме «Метод дискретной суперпозиции».
2. Методы уменьшения дисперсии (основные идеи): выделение главной части, интегрирование по части области, выборка по группам.
БИЛЕТ 6
1. Задача по теме «Метод дискретной суперпозиции».
2. Случайные элементы в задачах теории переноса.
БИЛЕТ 7
1. Задача по теме «Метод исключения».
2. Интегральное уравнение второго рода, ряд Неймана. Линейный функционал, как интеграл бесконечно возрастающей кратности.
БИЛЕТ 8
1. Задача по теме «Метод исключения».
2. Однородная цепь Маркова, обрывающаяся с вероятностью единица, и ее моделирование.
БИЛЕТ 9
1. Задача по теме «Метод исключения».
2. Оценка по столкновениям для вычисления линейного функционала от решения интегрального уравнения второго рода. Прямое моделирование. Локальные оценки.
БИЛЕТ 10
1. Задача по теме «Метод исключения».
2. Физические датчики случайных чисел и генераторы псевдослучайных чисел. Метод вычетов и его свойства.
БИЛЕТ 11
1. Задача по теме «Выборка по важности».
2. Стандартный метод моделирования дискретных распределений и его трудоемкость.
БИЛЕТ 12
1. Задача по теме «Выборка по важности».
2. Моделирование равномерного дискретного распределения. Квантильный метод.
БИЛЕТ 13
1. Задача по теме «Выборка по важности».
2. Метод обратной функции распределения. Конструирование моделируемых плотностей.
БИЛЕТ 14
1. Задача по теме «Метод дискретной суперпозиции».
2. Моделирование случайных векторов. Конструирование двумерного моделируемого вектора с зависимыми компонентами.
БИЛЕТ 15
1. Задача по теме «Выборка по важности».
2. Методы интегральной и дискретной суперпозиции. Конструирование моделируемых плотностей.
БИЛЕТ 16
1. Задача по теме «Метод обратной функции распределения».
2. Обоснование метода исключения. Конструирование плотностей случайных величин, эффективно моделируемых методом исключения.
БИЛЕТ 17
1. Задача по теме «Моделирование случайного вектора».
2. Некоторые специальные методы моделирования непрерывных случайных величин.

Форма экзаменационного билета представлена на рисунке

МИНОБРНАУКИ РОССИИ ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (Новосибирский государственный университет, НГУ)*** ***Физический факультет***
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № ________ 1. …… 2. …… Составитель ________________ /Ф.И.О. преподавателя/ (подпись) «____»________________20 г.

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

Лист актуализации рабочей программы
по дисциплине «Символьные и численные расчеты в физических приложениях»
по направлению подготовки 03.04.02 Физика
Все профили

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного