

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет



Согласовано, декан ФФ

Блинов В.Е.

2025 г.

Рабочая программа дисциплины

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Направление подготовки: 03.03.02 Физика

Направленность (профиль): все профили

Форма обучения: очная

Семестр	Общий объём	Виды учебных занятий (в часах)					Промежуточная аттестация (в часах)				
		Аудиторная работа		Иная контактная работа		Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Контрольные работы	Приём заданий и консультации			Консультации	Зачёт	Дифференцированный зачёт	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	162	32	32	8	16	50	18	2			4
2	234	64	64	6	32	44	18	4			2
Итого	396	96	96	14	48	94	36	6			6
Всего 396 академических часов / 11 зачётных единиц, из них: – контактная работа 266 академических часов											
Компетенции ОПК-1											

Ответственный за образовательную программ
д. ф.-м. н., проф.

С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2025

Содержание

1	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы	3
2	Место дисциплины в структуре образовательной программы	3
3	Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу	4
4	Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий	4
5	Перечень учебной литературы.	8
6	Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.	8
7	Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	9
7.1	Ресурсы сети Интернет	9
7.2	Современные профессиональные базы данных	9
8	Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине	9
8.1	Перечень программного обеспечения	9
8.2	Информационные справочные системы	9
9	Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	9
10	Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине	10
10.1	Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине	10
10.2	Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине	11
10.3	Типовые контрольные задания и иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения	13

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Учебная дисциплина «Линейная алгебра и геометрия» имеет своей целью дать знания в этой области и методах, применяемых в других математических дисциплинах, физике, научить применять полученные знания для освоения теоретических основ физических курсов, читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета. Дисциплина нацелена на формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.	ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. ОПК-1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. ОПК-1.3. Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необходимых в профессиональной деятельности. ОПК-1.4. Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин.	Знать определения и понятия, относящиеся к основным темам линейной алгебры и геометрии, формулировки и доказательства основных теорем; основные методы и подходы линейной алгебры и геометрии. Уметь решать типовые задачи, применять понятия и факты линейной алгебры и геометрии для решения теоретических и практических задач, самостоятельно работать над нестандартными математическими задачами. Знать основы линейной алгебры и геометрии для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина начинается с введения в высшую математику. Оно основано на школьных знаниях и нацелено на быстрое знакомство слушателей с математическими понятиями и приёмами, востребованными на первых физических дисциплинах, а также развитие у них навыков самостоятельной работы в условиях вуза.

Дальнейшее изучение курса приводит к понятиям линейного (векторного) пространства и линейного отображения, которые являются основой практически всех традиционно сложившихся математических дисциплин, теоретической физики, вычислительной математики. С более широкой точки зрения предметом изучения курса является идея линейности, проработка её математического языка. Одним из наиболее ярких примеров применения этого принципа является линейность малых приращений, нашедшая широкое применение в математическом анализе.

Первое знакомство с комплексными числами происходит именно в курсе линейной алгебры и геометрии, а дальнейшее их изучение продолжается в курсе теории функций комплексного переменного. Собственные числа и собственные векторы используются при решении систем линейных дифференциальных уравнений. Ряд важнейших геометрических понятий и методов развиваются в конечномерных векторных пространствах со скалярным произведением. Изучение конечномерных векторных пространств и операторов в них является необходимой предпосылкой для изучения бесконечномерных, играющих большую роль в современном анализе, в частности в функциональном анализе, и его многочисленных приложениях к физике.

3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу

Трудоёмкость дисциплины — 11 з.е. (396 академических часов).

Форма промежуточной аттестации: семестр 1 — экзамен; семестр 2 — экзамен.

№	Вид деятельности	Семестр	
		1	2
1	Лекции, ч	32	64
2	Практические занятия, ч	32	64
3	Контрольные работы, ч	8	6
4	Занятия в контактной форме, ч	94	172
	из них:		
5	аудиторных занятий, ч	88	166
6	консультаций, ч	2	4
7	промежуточная аттестация, ч	4	2
8	Самостоятельная работа, ч	68	62
9	Всего, ч	162	234

4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий

Семестр 1

Лекции (32 ч)

Наименование темы и её содержание	Объём, часов
Производные и интегралы	
Правила отыскания производных. Скорость изменения функции и определение производной. Арифметические правила. Производные основных функций: степенной, показательной, тригонометрических. Производная обратной функции. Производная композиции. Производная вектор-функции. Функции двух и более переменных, частные производные.	2
Исследование функций с помощью производных. Область определения и поведение на границе. Симметрия и периодичность. Точки разрыва и промежутки непрерывности. Нули и промежутки постоянства знака. Экстремумы и промежутки возрастания и убывания. Перегибы и промежутки вогнутости. Асимптоты. Построение графиков функций.	4
Поиск первообразных. Начальная таблица первообразных. Общие правила: линейность, замена переменной. Интегрирование по частям. Площадь подграфика и определённый интеграл. Интегрирование рациональных функций. Рационализация некоторых интегралов.	4

Элементы аналитической геометрии	
Векторы в трёхмерном пространстве. Скалярное произведение, длины, углы. Определители второго и третьего порядков, полное раскрытие, раскрытие по столбцу или строке, вычищение определителя. Смешанное произведение, ориентированные объёмы. Векторное произведение. Двойное векторное произведение, тождества Лагранжа и Якоби. Проекция вектора на прямую и на плоскость. Уравнения прямых и плоскостей.	4
Смена координат и матрицы. Преобразования декартовых координат на плоскости: сдвиги, растяжения, повороты. Запись преобразования матрицей. Операции с матрицами. Линейные преобразования и обратимость. Матрицы и системы линейных уравнений.	4
Комплексные числа. Алгебраическая форма и операции. Показательная форма. Комплексное сопряжение. Умножение и поворот. Возведение в натуральную степень. Извлечение корня. Матричная форма. Комплексная экспонента. Основная теорема алгебры многочленов.	4
Элементарные дифференциальные уравнения	
Уравнения первого порядка. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ и его решений. Поле направлений, порождаемое дифференциальным уравнением, изоклины. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения с однородной правой частью. Линейное уравнение и метод вариации.	4
Уравнения второго порядка и системы. Уравнения гармонических колебаний без трения и с трением. Неоднородные уравнения со специальной правой частью. Биения и резонанс. Связь между уравнениями и системами, фазовые портреты.	6

Практические занятия (32 ч)

Содержание практического занятия	Объём, часов
Решение задач на вычисление производных	2
Решение задач на исследование функций	4
Решение задач на поиск первообразных	6
Решение задач на векторы в трёхмерном пространстве	4
Решение задач на смену координат и матрицы	4
Решение задач на комплексные числа	4
Решение задач на дифференциальные уравнения первого порядка	4
Решение задач на уравнения гармонических колебаний	4

Самостоятельная работа студентов (68 ч)

Перечень занятий на СРС	Объём, часов
Подготовка к практическим занятиям	19
Выполнение домашних заданий	19
Подготовка к контрольным работам	12
Подготовка к экзамену	18

Семестр 2

Лекции (64 ч)

Наименование темы и её содержание	Объём, часов
Фигуры первого и второго порядков	
Прямые и плоскости. Фигуры и уравнения. Параметрическое задание. Нормальные уравнения. Общие уравнения. Уравнения в отрезках. Уравнения по точкам. Смена способа задания прямой или плоскости. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Расстояния. Проекции и перпендикуляры. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым.	2
Эллипсы, параболы и гиперболы. Полярные и канонические уравнения. Фокальные свойства, ортогональность софокусных семейств. Оптические свойства. Конические сечения.	2
Общее уравнение линии второго порядка. Компактная матричная запись общего уравнения. Задача классификации. Метрическая классификация. Канонический вид и приведение к нему поворотом и переносом. Уравнение касательной. Обзор поверхностей второго порядка: эллипсоиды и гиперboloиды, конусы, параболоиды, цилиндры.	3
Билинейные и квадратичные формы. Векторы, координаты и однородные функции. Векторное произведение как линейный оператор. Тензор моментов инерции. Переходы от матрицы к форме и от формы к матрице. Симметричные формы. Поведение матрицы формы при смене базиса. Канонический вид симметричной формы, метод Лагранжа.	3
Начала многомерной линейной алгебры	
Системы линейных уравнений 2. Начальная терминология. Элементарные преобразования. Метод исключения неизвестных на примерах. Ступенчатые матрицы. Общий алгоритм приведения к ступенчатому виду.	4
Линейные пространства строк и столбцов. Линейные пространства. Комбинации и (не)зависимость. Линейная оболочка. Появление и исчезновение зависимости. Существование базиса подпространства. Размерность линейного пространства.	2
Системы линейных уравнений 3. Ранг матрицы, теорема о совпадении рангов по строкам и по столбцам. Критерий совместности системы линейных уравнений. Однородные линейные системы, пространство решений, фундаментальная система решений. Неоднородные линейные системы, многообразие решений.	4
Действия с подпространствами. Пересечение и сумма. Формула размерностей Грассмана. Сумма нескольких подпространств. Прямые суммы. Размерность прямой суммы. Дополнение к подпространству. Прямая сумма как конструкция.	2
Матрицы и определители	
Свойства определителей. Комбинаторный подход. Миноры и раскрытие по строке или столбцу. Треугольные матрицы. Определитель как функция строк.	4
Невырожденные матрицы. Критерий невырожденности матрицы. Формула для обратной матрицы. Правило Крамера. Ранг матрицы по минорам.	2
Вещественные квадратичные формы. Закон инерции, сигнатура. Невырожденные формы, (полу)определённые формы. Сужение на подпространство. Главные миноры, определение сигнатуры методом Якоби. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.	2
Полиномиальная интерполяция. Уравнение прямой. Интерполяционный полином в форме Лагранжа. Полином Тейлора. Интерполяция Эрмита.	2

Линейные отображения и операторы	
Линейные отображения. Отображения пространств столбцов и матрицы. Выбор базиса. Изоморфизм. Матрица отображения в базисах. Смена базиса и матрица перехода. Закон изменения матрицы отображения. Элементарные матрицы. Простейший вид матрицы отображения. Образ, прообраз, ядро. Структура линейного отображения.	4
Линейные операторы. Пространство линейных отображений. Ранг и дефект оператора. Примеры линейных операторов. Проекторы. Инвариантные подпространства. Диагонализуемость.	4
Диагонализация матрицы оператора. Собственные числа и векторы. Характеристический многочлен. Характеристические корни. Собственные и корневые подпространства. Сумма собственных подпространств. Кратности корня. Критерий диагонализуемости. Формулировка корневого разложения.	4
Функции матриц. Мотивация. Полиномы и суммы рядов. Теорема Гамильтона — Кэли. Диагонализация и жорданова форма. Полиномиальный подход, формула Сильвестра. Формула Бухгейма. Вычищение определителя Вандермонда. Обращение матрицы Вандермонда.	4
Пространства со скалярным произведением	
Стандартное евклидово пространство. Стратегия: от линейной алгебры к линейной геометрии. Ортонормированные базисы \mathbb{R}^n и ортогональные матрицы. Строение маломерных ортогональных матриц. Диагонализация симметричных матриц. Метод ортогонализации Грама — Шмидта. Разложение вектора по ортонормированной системе. Ортогональное дополнение к подпространству.	4
Унитарная триангуляция. Стандартное эрмитово пространство. Ортонормированные базисы \mathbb{C}^n и унитарные матрицы. Унитарная триангуляция Шура. Эрмитовы матрицы и спектральная теорема. Другие версии спектральной теоремы. Разложение Холецкого.	4
Общие евклидовы и эрмитовы пространства. Стандартное скалярное произведение. Свойства стандартного вырастают в аксиомы общего. Матрица Грама. Неравенство Коши и углы. Объёмы и расстояния.	2
Нормальные операторы. Сопряжённый оператор. Спектральная теорема. Спектральные портреты. Канонические виды. Коммутирующие самосопряжённые операторы.	3
Разложения операторов и матриц. Эрмитово разложение оператора. Алгебраические структуры на операторах. Полярное разложение оператора. Спектральное разложение нормального оператора. Функциональное исчисление.	3

Практические занятия (64 ч)

Содержание практического занятия	Объём, часов
Решение задач на прямые и плоскости	6
Решение задач на линии и поверхности второго порядка	4
Решение задач на квадратичные формы	4
Решение систем линейных уравнений	4
Освоение основных понятий линейной алгебры и связей между ними	6
Решение задач на определители	4
Решение задач на вещественные квадратичные формы	2
Решение задач на линейные отображения и операторы	4
Решение задач на диагонализацию матриц	4

Применение диагонализации к системам дифференциальных уравнений	4
Решение задач на функции от матриц	4
Решение задач на ортогонализацию	4
Решение задач на ортогональное дополнение, проекции и отклонения	4
Освоение общего понятия скалярного произведения	4
Решение задач на канонические виды операторов	4
Решение задач на полярное разложение	2

Самостоятельная работа студентов (62 ч)

Перечень занятий на СРС	Объём, часов
Подготовка к практическим занятиям	16
Выполнение домашних заданий	16
Подготовка к контрольным работам	12
Подготовка к экзамену	18

5. Перечень учебной литературы

- ❶ Электронные версии пособий, подготовленные на кафедре высшей математики ФФ НГУ, см. п. 7.1.
- ❷ А. П. Ульянов, Конспект лекций по алгебре и геометрии: учебное пособие по курсу высшей алгебры и аналитической геометрии: [для студентов 1 курса физ. фак. НГУ: в 3 ч.] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, физ. фак.– Новосибирск: РИЦ НГУ, 2007-2008. Ч. 1: [Главы 1-3], 2007. – 35 с. (78 экз.).
- ❸ А. П. Ульянов, Конспект лекций по алгебре и геометрии: учебное пособие по курсу высшей алгебры и аналитической геометрии: [для студентов 1 курса физ. фак. НГУ: в 3 ч.] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, физ. фак.– Новосибирск: РИЦ НГУ, 2007-2008. Ч. 2: [Главы 4-9], 2007. – 54 с. (48 экз.).

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

- ❹ Н. И. Александрова, Семинары по высшей алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие: [для студентов 1 курса физического факультета НГУ] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, физ. фак.– Новосибирск: РИЦ НГУ, 2007. – 87 с. (78 экз.).
- ❺ Б. П. Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу: [учебное пособие для мат. и физ. спец. вузов] / 14-е изд., испр. М.: Изд-во МГУ, 1998. – 624 с. (42 экз.).
- ❻ А. Ф. Филиппов, Сб. задач по дифференциальным уравнениям / 7-е изд., стер. М.: Наука, 1992. – 127 с. (200 экз.).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

7.1. Ресурсы сети Интернет

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:

- сайт кафедры высшей математики ФФ НГУ:
<http://www.phys.nsu.ru/ok03/Manuals.html>,
<https://www.nsu.ru/n/physics-department/departments/kafedra-vysshey-matematiki/>;
- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.2. Современные профессиональные базы данных

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

8.1. Перечень программного обеспечения

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office, а также свободное ПО Linux. Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

8.2. Информационные справочные системы

Не используются.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

- 1 Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации. Аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.
- 2 Помещения для самостоятельной работы обучающихся. Помещения оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

10.1. Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня. Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем. Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на экзамене, проводимом в экзаменационную сессию. В первом семестре экзамен письменный, а во втором устный.

Индикатор	Результат обучения по дисциплине	Оценочные средства
ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	Знать определения и понятия, относящиеся к основным темам линейной алгебры и геометрии, формулировки и доказательства основных теорем; основные методы и подходы линейной алгебры и геометрии.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен.
ОПК-1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. ОПК-1.3. Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необходимых в профессиональной деятельности.	Уметь решать типовые задачи, применять понятия и факты линейной алгебры и геометрии для решения теоретических и практических задач, самостоятельно работать над нестандартными математическими задачами.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен.
ОПК-1.4. Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин.	Знать основы линейной алгебры и геометрии для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен.

Семестр 1: Текущий контроль успеваемости

Для оценки освоения дисциплины применяется балльно-рейтинговая система. Результаты текущего контроля успеваемости учитываются при промежуточной аттестации.

- (1) Тестирование базовых вычислительных навыков в компьютерном классе. Студенту даётся три попытки: в начале сентября, в начале октября, в конце декабря. Тест оценивается пропорционально количеству верных ответов, максимум составляет 100 баллов. Лучший из результатов засчитывается в качестве балла за компьютерное тестирование.
- (2) В течение семестра проводится три потоковых контрольных работы. Каждая такая работа оценивается пропорционально количеству правильно решённых задач, максимум составляет 100 баллов.

Семестр 1: Промежуточная аттестация

- (3) Письменный экзамен оценивается пропорционально количеству правильно решённых задач, максимум составляет 200 баллов.
- (4) Общая сумма баллов студента определяется как сумма баллов за компьютерное тестирование, потоковые контрольные работы и письменный экзамен. Итоговая оценка по дисциплине «Линейная алгебра и геометрия» выставляется согласно следующей таблице.

Общая сумма баллов за семестр	Итоговая оценка по дисциплине
От 500 до 600 баллов	Отлично
От 400 до 499 баллов	Хорошо
От 300 до 399 баллов	Удовлетворительно
От 0 до 299 баллов	Неудовлетворительно

Семестр 2: Текущий контроль успеваемости

Для оценки освоения дисциплины применяется балльно-рейтинговая система. Результаты текущего контроля успеваемости учитываются при промежуточной аттестации.

- (1) В течение семестра студент сдаёт преподавателю в устной форме задачи из заданий, типовые примеры которых приведены в п. 10.3. Сдавая задачу, студент объясняет ход её решения и при необходимости отвечает на дополнительные вопросы преподавателя по ней, имеющие принципиальное значение для данной дисциплины.
- (2) За каждую сданную в срок задачу студент получает до 5 баллов согласно таблице в п. 10.2. За каждую задачу, сданную (полностью или частично) после установленного срока, студент получает 0 баллов. Возможный максимум за сдачу заданий составляет 200 баллов.
- (3) В течение семестра проводится три потоковых контрольных работы. Каждая такая работа оценивается пропорционально количеству правильно решённых задач, максимум составляет 100 баллов.

Семестр 2: Промежуточная аттестация

- (4) Структура устного экзамена и правила начисления баллов на нём описаны в п. 10.2. Возможный максимум за устный экзамен составляет 300 баллов.
- (5) Общая сумма баллов студента определяется как сумма баллов за сдачу заданий, потоковые контрольные работы и устный экзамен. Итоговая оценка по дисциплине «Линейная алгебра и геометрия» выставляется согласно следующей таблице.

Общая сумма баллов за семестр	Итоговая оценка по дисциплине
От 650 до 800 баллов	Отлично
От 500 до 649 баллов	Хорошо
От 350 до 499 баллов	Удовлетворительно
От 0 до 349 баллов	Неудовлетворительно

10.2. Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине

Структура устного экзамена

- (1) Если студент в течение семестра не сдал какие-то задачи из заданий, то сначала он сдает эти оставшиеся задачи (без получения баллов). Если задачи не сданы, то студент получает оценку «неудовлетворительно».
- (2) Билеты разделены по сложности: на 3, на 4 и на 5. Выбрав сложность билета, студент не может получить итоговую оценку выше указанной в этом билете. Выбор сложности осуществляется однократно и не может быть изменён. На подготовку ответа по билету даётся не более одного часа. При подготовке и ответе запрещено пользоваться справочной литературой, телефоном и другими электронными устройствами, а также помощью товарищей.
- (3) Билет на 3 состоит из определений и формулировок теорем (без доказательств).
- (4) Билет на 4 состоит из основных определений и формулировок теорем, а также доказательств тех пунктов билета, которые выделены жирным шрифтом.

Оценивание при устной сдаче заданий

Критерии оценивания результатов обучения	Шкала оценивания
<ul style="list-style-type: none"> ☒ задание решено правильно; ☒ работа оформлена аккуратно, рисунки чёткие; ☒ материал изложен осмысленно, логично и аргументированно; ☒ понятия и термины применены корректно и точно; ☒ обучающийся свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы, хотя допустимы не принципиальные неточности. 	5 баллов
<ul style="list-style-type: none"> ☒ задание решено правильно; ☒ работа оформлена аккуратно, рисунки чёткие; ☒ материал изложен осмысленно, логично и аргументированно при наличии затруднений в формулировке собственных суждений; ☒ понятия и термины применены корректно при наличии незначительных ошибок; ☒ обучающийся отвечает на дополнительные вопросы, допуская не принципиальные неточности. 	4 балла
<ul style="list-style-type: none"> ☒ задание решено правильно; ☒ работа оформлена неаккуратно; ☒ материал изложен неосмысленно, имеются ошибки в логике и аргументации; ☒ понятия и термины применены корректно при наличии незначительных ошибок; ☒ обучающийся отвечает на дополнительные вопросы, допуская ошибки. 	3 балла
<ul style="list-style-type: none"> ☒ задание решено неправильно; ☒ материал изложен компилятивно и неосмысленно, имеются ошибки в логике и аргументации; ☒ понятия и термины применены с грубыми ошибками; ☒ обучающийся не отвечает на дополнительные вопросы. 	2 балла

Оценивание ответов на устном экзамене

Критерии оценивания результатов обучения	Шкала оценивания
<ul style="list-style-type: none"> ☒ теоретический материал изложен самостоятельно, осмысленно, структурированно, логично и аргументированно, отсутствуют затруднения при объяснении хода рассуждений; ☒ понятия и термины применены корректно и точно; ☒ даны исчерпывающие ответы на дополнительные вопросы, хотя допустимы не принципиальные неточности. 	80-100% полного балла за вопрос
<ul style="list-style-type: none"> ☒ теоретический материал изложен самостоятельно, осмысленно, логично и аргументированно, имеются отдельные затруднения при объяснении хода рассуждений; ☒ понятия и термины применены корректно при наличии незначительных ошибок; ☒ даны полные ответы на дополнительные вопросы с возможным присутствием ошибок. 	50-80% полного балла за вопрос
<ul style="list-style-type: none"> ☒ теоретический материал изложен самостоятельно, но неосмысленно, имеются ошибки в логике и аргументации, отсутствуют объяснения хода рассуждений; ☒ причинно-следственные связи понятий частично и изложены фрагментарно; ☒ понятия и термины применены корректно при наличии незначительных ошибок; ☒ ответы на дополнительные вопросы неполны и/или содержат существенные ошибки. 	20-50% полного балла за вопрос
<ul style="list-style-type: none"> ☒ теоретический материал представлен фрагментарно, отсутствуют осмысленность, логичность и аргументированность; ☒ причинно-следственные связи не поняты; ☒ понятия и термины применены с грубыми ошибками; ☒ ответы на дополнительные вопросы отсутствуют. 	0-20% полного балла за вопрос

- (5) Билет на 5 состоит из основных определений и формулировок теорем, а также доказательств тех пунктов билета, которые выделены жирным шрифтом.
- (6) Передача проводится по тем же правилам и тем же билетам, что и основной экзамен.

10.3. Типовые контрольные задания и иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Семестр 1: Вариант потоковой контрольной работы № 1

1. Найти все стационарные точки функции $f(x) = \sin(2\pi x/4 + \pi/6)$ на отрезке $[-2, 2]$.
2. Найдите частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ функции $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y^2}{x^3}\right)$.
3. Определите точки перегиба и промежутки выпуклости/вогнутости для функции $f(x) = xe^{-6x^2}$.
4. Посчитайте интеграл $\int e^x \sin e^x dx$.
5. Посчитайте интеграл $\int x \cos(2x + 3) dx$.

Семестр 1: Вариант потоковой контрольной работы № 2

1. Найти матрицы $A^T B$, BA^T и их обратные (если возможно), если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. В трапеции $ABCD$, с основаниями AD , BC , известны координаты вершин $A(-1, 1, -2)$, $B(1, -1, 0)$, $C(0, 0, 0)$ и $BC : AD = 1 : 3$.

(a) Найти координаты вершин трапеции, отраженной относительно прямой AD ;

(b) Вычислить площадь треугольника ABD .

3. Найти такие параметры s и t , чтобы объем параллелепипеда, построенный на векторах $a = (0, -1, 1)^T$, $b = (-1, 1, s)^T$, $c = (1, t, 2)^T$, был равен 2, а векторы b и c — ортогональны.

4. Найти уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = 2$ (это уравнение гиперболы $xy = 1$, повернутой на 45°) в полярной системе координат, если полярный полюс находится в начале прямоугольной декартовой системы координат, а полярная ось идет по оси OX . Найти полярные координаты точки гиперболы, лежащей на луче, проходящем под углом π .

5. Найти все решения уравнения $iz^3 + 1 + i\sqrt{3} = 0$ и указать ближайшее решение к точке $w = -i$.

Семестр 1: Вариант потоковой контрольной работы № 3

1. Решите уравнение $x^2 y' = y^3$.
2. Решите однородное уравнение $5x^6 y' = y(5x^5 - y^5)$.
3. Решите уравнение первого порядка $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}$.
4. Решите уравнение $y'' - 8y' + 25y = 0$.
5. Решите уравнение $y'' - 5y' + 6y = 108x^2$.

Семестр 1: Вариант письменного экзамена

1. Найти полином Тейлора третьего порядка в окрестности точки $x_0 = 0$ функции $f(x) = \cos(2x + x^2)$
2. Вычислить $\int_0^1 \frac{x+4}{x^2+3x+2} dx$
3. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

4. В прямоугольной декартовой системе координат задан прямоугольный треугольник ABC , где $A(1, -2)$, $B(-3, 1)$, $C(0, 5)$. Найти связь "старой" и "новой" систем координат, если начало новой системы координат находится в вершине прямого угла треугольника ABC , а положительные направления осей новой системы координат идут по катетам треугольника ABC . Выписать в новой системе координат уравнения прямых, идущих по осям старой системы координат.
5. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении $3 : 8$. Найти координаты вектора \vec{CD} в базисе (C, \vec{CB}, \vec{AC}) .

Семестр 2: Задание № 1

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [1, 2, 3]^T, & \mathbf{a}_2 &= [1, 1, 2]^T, & \mathbf{a}_3 &= [1, 1, 1]^T; \\ \mathbf{b}_1 &= [1, 0, 2]^T, & \mathbf{b}_2 &= [3, -1, 0]^T, & \mathbf{b}_3 &= [1, 1, -2]^T. \end{aligned}$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\begin{aligned} \{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\}, \\ \{t-t^2, t^3, 1+5t+t^3, (1+t)^3\} \end{aligned}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [2, 1, 1]^T, & \mathbf{a}_2 &= [3, 2, 1]^T, & \mathbf{a}_3 &= [1, 2, -2]^T; \\ \mathbf{b}_1 &= [1, 3, 8]^T, & \mathbf{b}_2 &= [-3, 2, -2]^T, & \mathbf{b}_3 &= [2, 2, 8]^T. \end{aligned}$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего \mathbf{a}_k в соответствующие \mathbf{b}_k , в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть \mathcal{S}, \mathcal{A} и \mathcal{L} — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n .
- (а) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.
- (б) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

на \mathcal{L} параллельно \mathcal{A} и на \mathcal{A} параллельно \mathcal{S} .

5. Даны векторы \mathbf{a} и \mathbf{n} трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ и плоскость L с нормалью \mathbf{n} . Отображение P есть проектирование на L параллельно вектору \mathbf{a} . Записать формулой отображение P , проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & -3 \\ -6 & -4 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ — это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$. (а) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на \mathcal{V} , что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе. (б) Найти собственные числа и векторы оператора $x \frac{d}{dx}$ на V .

9*. Доказать линейную независимость над \mathbb{R} систем функций (а) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$; (б) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Семестр 2: Вариант потоковой контрольной работы № 5

1. Найти уравнения касательных к эллипсу, заданному уравнением

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

ортогональных касательной в точке $(2, 1)$ к этому эллипсу.

2. Найдите все значения, которые принимает ранг следующей матрицы, когда параметр λ пробегает \mathbb{R} ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 2 & \lambda + 1 & \lambda + 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3. Дана матрица A , зависящая от вещественных параметров x_1, x_2, x_3, x_4 ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ x_1 & x_2 - x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Найти базис подпространства решений $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4$ системы, состоящей из уравнения $|A| = 0$.

4. Вычислить определитель $n \times n$ -матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

вычислить матрицы AB, BA и найти обратные к тем из них, которые обратимы.

6. Изобразите на плоскости sOt множество всех точек (s, t) , для которых вещественная квадратичная форма от переменных x, y, z

$$x^2 + sy^2 + z^2 + 2txy + 2tyz$$

положительно определена. Определите границу множества и заштрихуйте само множество. Ответ обосновать!

Семестр 2: Вопросы к устному экзамену

1. Способы задания прямой на плоскости: общее уравнение, нормальное уравнение, уравнение в отрезках, параметрическое задание. Переход от одного способа задания прямой к другому.
2. Способы задания плоскости в пространстве: общее уравнение, нормальное уравнение, уравнение в отрезках, параметрическое задание. Переход от одного способа задания плоскости к другому.
3. Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве. Расстояние между прямыми. Проекция точки на прямую.
4. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Расстояние между параллельными плоскостями. Проекция точки на плоскость.
5. Эллипс: каноническое уравнение и уравнение в полярных координатах, фокальное и оптическое свойства.
6. Парабола: каноническое уравнение и уравнение в полярных координатах, фокальное и оптическое свойства.
7. Гипербола: каноническое уравнение и уравнение в полярных координатах, фокальное и оптическое свойства.
8. Общее уравнение линии второго порядка: компактная матричная запись и задача классификации. Канонический вид и приведение к нему поворотом и переносом. Уравнение касательной.
9. Билинейные и квадратичные формы. Переходы от матрицы к форме и от формы к матрице. Симметричные формы. Поведение матрицы формы при смене базиса.
10. Канонический вид симметричной формы, метод Лагранжа.
11. Системы линейных уравнений и метод исключения неизвестных: элементарные преобразования, ступенчатые матрицы, общий алгоритм приведения к ступенчатому виду.
12. Линейные пространства строк и столбцов: линейные пространства, комбинации и (не)зависимость, линейная оболочка.
13. Подпространство: базис, существование базиса, размерность линейного пространства и подпространства.
14. Ранг матрицы, теорема о совпадении рангов по строкам и по столбцам. Критерий совместности системы линейных уравнений.
15. Однородные линейные системы, пространство решений, фундаментальная система решений. Неоднородные линейные системы, многообразие решений.
16. Действия с подпространствами: пересечение и сумма, формула размерностей Грасмана, прямая сумма и её размерность, дополнение к подпространству.
17. Комбинаторные свойства определителей: миноры и раскрытие по строке или столбцу. Определитель как функция строк.
18. Критерий невырожденности матрицы. Формула для обратной матрицы. Правило Крамера. Ранг матрицы по минорам.
19. Вещественные квадратичные формы: закон инерции, сигнатура, невырожденные формы, (полу)определённые формы.
20. Вещественные квадратичные формы: сужение на подпространство. главные миноры, определение сигнатуры методом Якоби. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.
21. Полиномиальная интерполяция: интерполяционный полином в форме Лагранжа, полином Тейлора, интерполяция Эрмита.
22. Линейные отображения пространств столбцов и матрицы. Выбор базиса. Изоморфизм. Матрица отображения в базисах. Смена базиса и матрица перехода. Закон изменения матрицы отображения.

23. Элементарные матрицы. Простейший вид матрицы отображения. Образ, прообраз, ядро. Структура линейного отображения.
 24. Пространство линейных отображений. Ранг и дефект оператора. Примеры линейных операторов. Проектор. Инвариантные подпространства. Диагонализуемость.
 25. Собственные числа и векторы матрицы. Характеристический многочлен. Характеристические корни. Собственные и корневые подпространства. Кратности корня. Критерий диагонализуемости. Формулировка корневого разложения.
 26. Функции матриц: Теорема Гамильтона — Кэли. Диагонализация матрицы и жорданова форма. . 27. Вычисление определителя Вандермонда. Обращение матрицы Вандермонда.
 28. Стандартное евклидово пространство: ортонормированные базисы \mathbb{R}^n и ортогональные матрицы, метод ортогонализации Грама — Шмидта.
 29. Стандартное евклидово пространство: разложение вектора по ортонормированной системе, ортогональное дополнение к подпространству.
 30. Стандартное эрмитово пространство: ортонормированные базисы \mathbb{C}^n и унитарные матрицы. Унитарная триангуляция Шура.
 31. Эрмитовы матрицы и спектральная теорема. Другие версии спектральной теоремы.
 32. Общие евклидовы и эрмитовы пространства: стандартное скалярное произведение, матрица Грама, неравенство Коши и углы, объёмы и расстояния.
 33. Нормальный и сопряжённый операторы. Спектральная теорема. Спектральный портрет. Коммутирующие самосопряжённые операторы.
 34. Эрмитово разложение оператора. Алгебраические структуры на операторах.
 35. Полярное разложение невырожденного оператора. Спектральное разложение нормального оператора. Функциональное исчисление.
-

Семестр 2: Примеры билетов на устный экзамен

Билет № 3.1 (на оценку «удовлетворительно»)

1. Прямая сумма подпространств. Параллельное проектирование. Подпространство — дополнение до прямой суммы. Теорема о прямой сумме нескольких подпространств.
2. Полярное разложение невырожденного оператора.

Билет № 4.1 (на оценку «хорошо»)

1. Сопряженное линейное отображение. Существование и единственность. Свойства. **Матрица сопряженного линейного отображения.**
2. Диагонализация квадратичной формы ортогональным преобразованием. **Одновременная диагонализация пары квадратичных форм.**

Билет № 5.1 (на оценку «отлично»)

1. Нормальные операторы. **Канонический вид матрицы самосопряженного оператора.**
 2. Матрица линейного отображения в паре базисов. Закон изменения при смене базисов. Ядро и образ линейного отображения. **Теорема о ранге и дефекте.** Примеры.
-

**Лист актуализации рабочей программы дисциплины
«Линейная алгебра и геометрия»**

№	Характеристика внесённых изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета	Подпись ответственного