МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет

Согласовано, декан ФФ

________ Блинов В.Е.
подпись

« » ________ 2025 г.

Рабочая программа дисциплины

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Направление подготовки: 03.03.02 Физика
Направленность (профиль): все профили
Форма обучения: очная

Семестр	Общий объём	Виды учебных занятий (в часах)					Промежуточная аттестация (в часах)				
		Аудиторная работа		Иная контактная работа				Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Контрольные работы	Приём заданий и консультации	Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Консультации	Зачёт	Дифференцированный зачёт	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	198	32	48	4	32	58	18	4			2
2	234	64	64	6	32	44	18	4			2
Итого	**432**	**96**	**112**	**10**	**64**	**102**	**36**	**8**			**4**
Всего 432 академических часа / 12 зачётных единиц, из них: – контактная работа 294 академических часа											
Компетенции ОПК-1											

Ответственный за образовательную программу,
д. ф.-м. н., проф. С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2025

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Учебная дисциплина «Основы математического анализа» имеет своей целью дать знания в этой области и методах, применяемых в других математических дисциплинах, физике, научить применять полученные знания для освоения теоретических основ физических курсов, читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета. Дисциплина нацелена на формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.	**ОПК-1.1.** Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК-1.2.** Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК-1.3.** Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необходимых в профессиональной деятельности. **ОПК-1.4.** Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин.	**Знать** определения и понятия, относящиеся к основным темам математического анализа, формулировки и доказательства основных теорем; основные методы и подходы математического анализа. **Уметь** решать типовые задачи, применять понятия и факты математического анализа для решения теоретических и практических задач, самостоятельно работать над нестандартными математическими задачами. **Знать** основы математического анализа для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Математический анализ является фундаментальной дисциплиной в любой программе математического и естественнонаучного профиля и служит мостиком между школьным и профессиональным образованием. Курс математического анализа является необходимой для изучения дисциплиной при подготовке квалифицированного специалиста-физика. Результаты освоения дисциплины используются практически во всех разделах математики и физики.

Целью первого семестра является быстрое и в меру строгое построение классического дифференциального и интегрального исчисления функций одной вещественной переменной и отработка широкого спектра базовых навыков математического анализа с акцентом на наиболее востребованные в физике. Попутно студенты обучаются начальных навыкам математических рассуждений.

Классическое дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких вещественных переменных развивается во втором семестре. Значительную его часть занимают понятия и методы, применяемые уже на ближайших физических дисциплинах: молекулярной физике, электричестве и магнетизме. Изучение общих свойств функциональных рядов необходимо для последующих математических дисциплин, особенно гармонического анализа и теории функций комплексного переменного.

3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу

Трудоёмкость дисциплины — 12 з.е. (432 академических часа).
Форма промежуточной аттестации: семестр 1 — экзамен; семестр 2 — экзамен.

№	Вид деятельности	Семестр	
		1	2
1	Лекции, ч	32	64
2	Практические занятия, ч	48	64
3	Контрольные работы, ч	4	6
4	Занятия в контактной форме, ч из них:	122	172
5	аудиторных занятий, ч	116	166
6	консультаций, ч	4	4
7	промежуточная аттестация, ч	2	2
8	Самостоятельная работа, ч	76	62
9	Всего, ч	198	234

4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий

Семестр 1

Лекции (32 ч)

Наименование темы и её содержание	Объём, часов
Введение	
Множества и логическая символика. Операции над множествами. Отображения и функции. Высказывания и доказательства. Кванторы. Принцип математической индукции.	2
Предел и непрерывность функций одной переменной	
Вещественные числа. Аксиома полноты. Минимум и максимум множества. Существование точных границ. Расширенная числовая прямая. Критерий для точных границ.	2
Предел функции. Определение предела функции. Предельный переход в неравенстве. Бесконечномалые и бесконечнобольшие. Предел и алгебраические операции. Предел композиции. Критерий Коши. Предел последовательности. Теорема Больцано — Вейерштрасса. Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности. Фундаментальные последовательности.	2
Асимптотические сравнения. Сравнения o-малое и O-большое. Преобразование выражений с o-малыми и O-большими. Главная часть функции. Работа с неопределенностями вида $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$. Правило Бернулли — Лопиталя.	2
Элементарные функции и замечательные пределы. Существование предела последовательности $(1+x/n)^n$. Показательная функция и её свойства. Число e. Натуральный логарифм и его свойства. Степенная функция и её свойства. Тригонометрические функции. Замечательные пределы. Сравнение степенной, показательной и логарифмической функций.	2

Непрерывность. Непрерывность суммы, разности, произведения, отношения, композиции. Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях. Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях.	2
Дифференциальное исчисление функций одной переменной	
Дифференцируемые функции. Физический и геометрический смысл производной. Определение дифференциала. Геометрическая интерпретация дифференциала. Связь производной и дифференциала. Доказательства правил отыскания производных.	2
Приращения дифференцируемых функций. Теорема Ферма о необходимых условиях экстремума. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши о приращении.	2
Формула Тейлора. Определение старших производных. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа и Пеано. Разложения Тейлора основных элементарных функций.	2
Монотонность и выпуклость функций. Критерии монотонности функции. Достаточное условие локального экстремума. Критерии выпуклости функции. Доказательство правила Бернулли — Лопиталя. Метод Ньютона.	2
Первообразная. Доказательство основных правил поиска первообразных и интегрирования рациональных функций.	2
Интеграл Римана	
Определение интеграла Римана и его свойства. Необходимое условие интегрируемости. Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывной и монотонной функции. Линейность, аддитивность и монотонность интеграла. Первая теорема о среднем.	2
Интеграл и первообразная. Связь интеграла и первообразной. Формула Ньютона — Лейбница. Формула дифференцирования интеграла с переменными пределами. Формула Тейлора с интегральным остаточным членом.	2
Несобственный интеграл. Определение несобственного интеграла для бесконечной и конечной точки. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла. Интегрирование степенных особенностей. Теорема сравнения.	2
Эйлеровы интегралы. Определения Г-функции и B-функции и их основные свойства. Интеграл Эйлера — Пуассона.	2
Приложения интеграла. Площадь криволинейной трапеции. Объём тела вращения. Длина кривой. Площадь поверхности вращения. Масса и центр масс однородного стержня. Независимость длины пути от параметризации.	2

Практические занятия (48 ч)

Содержание практического занятия	Объём, часов
Решение задач на математическую индукцию, супремум и инфимум множеств и функций.	4
Решение задач на определение предела функции и непрерывности.	4
Решение задач на o-малое и O-большое, технику асимптотических разложений, замечательные пределы.	6
Решение задач на вычисление пределов функций и последовательностей, правило Бернулли — Лопиталя.	4
Решение задач на нахождение производных и дифференциала, дифференцирование обратной, неявной и параметрически заданной функции.	4

Решение задач на теорему Лагранжа, монотонность и выпуклость, неравенство Йенсена.	4
Решение задач на производные высших порядков, формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Коши и Лагранжа, приближенные вычисления значений функций.	4
Решение задач на нахождение неопределенных интегралов (линейность, замена переменных, интегрирование по частям, интегрирование рациональных функций, простейших иррациональностей и тригонометрических функций).	6
Решение задач на вычисление определенных интегралов, дифференцирование интеграла с параметром.	6
Решение задач на несобственный интеграл Римана, интегралы Эйлера.	6

Самостоятельная работа студентов (76 ч)

Перечень занятий на СРС	Объём, часов
Подготовка к практическим занятиям	25
Выполнение домашних заданий	25
Подготовка к контрольным работам	8
Подготовка к экзамену	18

Семестр 2

Лекции (64 ч)

Наименование темы и её содержание	Объём, часов
Дифференциальное исчисление функций многих переменных 1	
Евклидово арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и евклидово расстояние в нем. Неравенства Коши — Буняковского и Минковского. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые шары. Внутренность, внешность, граница и замыкание множества. Открытые и замкнутые множества. Компакты. Связные множества и области. Предел последовательности в $\mathbb{R}^n$. Предел в точке и непрерывность отображений арифметических конечномерных пространств.	4
Линейные отображения. Определение линейного отображения. Матрица линейного отображения.	2
Дифференцирование функций многих переменных. Определение дифференциала. Определение частной производной и матрицы Якоби. Связь дифференциала с частными производными. Дифференцирование и алгебраические операции. Дифференцировании композиции, цепное правило. Производная по направлению. Градиент функции и его вид в декартовых координатах. Геометрический смысл градиента.	4
Старшие производные и формула Тейлора. Определение старших частных производных. Перестановочность частных производных. Формула Тейлора. Определение второго дифференциала и матрицы Гессе.	2
Локальный экстремум. Определение локального экстремума и критической точки. Необходимое условие локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума.	4

Дифференциальное исчисление функций многих переменных 2	
Теорема об обратной функции. Разрешимость системы линейных уравнений. Теорема об обратной функции. Теорема о неявной функции.	4
Замена переменных. Диффеоморфизмы. Криволинейные системы координат. Замена переменных в дифференциальных выражениях.	4
Кривые и поверхности. Параметрическое, явное и неявное задание гладкой кривой на плоскости и в пространстве. Касательные векторы и касательная прямая к кривой. Нормаль к плоской кривой. Параметрическое, явное и неявное задание гладкой двумерной поверхности в пространстве. Касательные векторы, касательная плоскость и нормаль к поверхности. Касательное пространство к множеству точек, удовлетворяющих системе условий (касательное пространство неявно заданного многообразия).	4
Условный экстремум. Определение условного экстремума. Необходимые условия условного экстремума (принцип множителей Лагранжа). Достаточные условия условного экстремума.	4
Многомерные интегралы	
Определение многомерного интеграла Римана. Геометрическая интерпретация многомерного интеграла. Определение многомерного интеграла Римана через суммы Дарбу. Определение меры Жордана и множеств, измеримых по Жордану. Свойства интеграла Римана (аддитивность, монотонность, интегрируемость непрерывных функций).	4
Вычисление многомерных интегралов. Определение кратного и повторного интегралов. Расстановка пределов интегрирования. Формула замены переменной. Геометрический смысл якобиана. Якобианы классических систем координат. Элементы площади и объема в криволинейных координатах. Интегрирование степенных особенностей.	6
Криволинейные и поверхностные интегралы 1-го рода. Определение криволинейного интеграла 1-го рода. Длина кривой и элемент длины в различных системах координат. Определение поверхностного интеграла 1-го рода. Площадь поверхности и элемент площади в различных системах координат. Независимость определения криволинейного и поверхностного интегралов 1-го рода от параметризации.	4
Элементы векторного анализа	
Криволинейные и поверхностные интегралы 2-го рода. Ориентация кривых и поверхностей. Определение внешней нормали к краю поверхности. Индуцированная ориентация края поверхности. Ориентация поверхности при помощи нормали. Выражение внешней нормали через параметризацию. Работа поля вдоль кривой и циркуляция поля. Определение криволинейного интеграла 2-го рода. Поток векторного поля через поверхность. Определение поверхностного интеграла 2-го рода.	6
Классические интегральные формулы. Формулы Грина, Гаусса — Остроградского, Стокса.	4
Дифференциальные операторы векторного анализа. Градиент, ротор, дивергенция и лапласиан в декартовых координатах. Оператора Гамильтона (набла). Формула Гаусса — Остроградского в терминах дивергенции и потока. Формула Стокса в терминах ротора, потока и циркуляции. Физический смысл ротора и дивергенции. Потенциальное и безвихревое векторное поле. Условие потенциальности поля. Соленоидальное и бездивергентное векторное поле. Условие соленоидальности поля.	4

Числовые ряды	
Определение ряда, частичных сумм, сходящегося ряда. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости ряда. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема сравнения для рядов. Интегральный признак сходимости. Сходимость эталонных рядов. Гармонический ряд. Признаки Коши и Даламбера. Признак Лейбница.	4

Практические занятия (64 ч)

Содержание практического занятия	Объём, часов
Решение задач на линии уровня, двойной и повторный пределы, непрерывность функций двух переменных.	2
Решение задач на частные производные и дифференциал.	2
Решение задач на цепное правило, дифференцирование сложных функций, формулу Тейлора.	2
Решение задач на градиент, производную по направлению, локальные экстремумы.	2
Решение задач на дифференцирование неявных функций.	2
Решение задач на замену переменных в дифференциальных выражениях.	4
Решение задач на условный экстремум, метод множителей Лагранжа, метод исключения дифференциалов.	4
Решение задач на двойные и повторные интегралы.	2
Решение задач на замену переменных в двойных интегралах, полярную замену.	2
Решение задач на тройные и повторные интегралы.	2
Решение задач на замену переменных в тройных интегралах, цилиндрическую и сферическую замену.	4
Решение задач на несобственные двойные и тройные интегралы.	2
Решение задач на интегралы, зависящие от параметра.	4
Решение задач на криволинейные и поверхностные интегралы 1-го рода.	4
Решение задач на операции векторного анализа.	2
Решение задач на работу и циркуляцию векторного поля, формулы Грина и Стокс, вычисление площади через формулу Грина.	4
Решение задач на поток векторного поля, формулу Гаусса–Остроградского, вычисление объема через формулу Гаусса–Остроградского.	4
Решение задач на потенциальные векторные поля и соленоидальные векторные поля.	4
Решение задач на ортогональные криволинейные координаты.	4
Решение задач на градиент, производную по направлению, локальные экстремумы.	4
Решение задач на сходимость числовых рядов.	4

Самостоятельная работа студентов (62 ч)

Перечень занятий на СРС	Объём, часов
Подготовка к практическим занятиям	16
Выполнение домашних заданий	16
Подготовка к контрольным работам	12
Подготовка к экзамену	18

5. Перечень учебной литературы

❶ Электронные версии пособий, подготовленные на кафедре высшей математики ФФ НГУ, см. п. 7.1.

❷ Б. П. Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу: [учеб. пособие для мат. и физ. спец. вузов] / 14-е изд., испр. М.: Изд-во МГУ, 1998. – 624 с. (42 экз.).

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

❸ Т. В. Бугуева. Основы математического анализа. Теоретический и практический тренинг: учебное пособие / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. высшей математики. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2012. - 284 с. (74 экз.).

❹ О. Д. Максимова. Неравенства и оценки в курсе математического анализа: учебное пособие: [для студентов 1-го курса Физ. фак. НГУ] / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. высшей математики. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2014. - 179 с. (87 экз.).

❺ О. Д. Максимова. Числовые ряды: учебное пособие: [для студентов 1-го курса Физ. фак. НГУ] / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. высшей математики. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2014. – 91 с. (96 экз.).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

7.1. Ресурсы сети Интернет

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:

- сайт кафедры высшей математики ФФ НГУ:
`http://www.phys.nsu.ru/ok03/Manuals.html`,
`https://www.nsu.ru/n/physics-department/departments/kafedra-vysshey-matematiki/`;
- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.2. Современные профессиональные базы данных

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

8.1. Перечень программного обеспечения

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office, а также свободное ПО Linux. Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

8.2. Информационные справочные системы

Не используются.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации. Аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.
2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся. Помещения оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно *«Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете»*.

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

10.1. Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня. Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем. Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на экзамене, проводимом в экзаменационную сессию.

Индикатор	Результат обучения по дисциплине	Оценочные средства
ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	**Знать** определения и понятия, относящиеся к основным темам математического анализа, формулировки и доказательства основных теорем; основные методы и подходы математического анализа.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен.
ОПК-1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК-1.3.** Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необходимых в профессиональной деятельности.	**Уметь** решать типовые задачи, применять понятия и факты математического анализа для решения теоретических и практических задач, самостоятельно работать над нестандартными математическими задачами.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен.
ОПК-1.4. Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин.	**Знать** основы математического анализа для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен.

Семестр 1: Текущий контроль успеваемости

Для оценки освоения дисциплины применяется балльно-рейтинговая система. Результаты текущего контроля успеваемости учитываются при промежуточной аттестации.

(1) В течение семестра студент сдаёт преподавателю в устной форме задачи из заданий, типовые примеры которых приведены в п. 10.3. Сдавая задачу, студент объясняет ход её решения и при необходимости отвечает на дополнительные вопросы преподавателя по ней, имеющие принципиальное значение для данной дисциплины.

(2) За каждую сданную в срок задачу студент получает назначенные за эту задачу баллы согласно таблице в п. 10.2. Возможный максимум за сдачу заданий составляет 175 баллов.

(3) В течение семестра проводится две потоковых контрольных работы. Каждая такая работа оценивается пропорционально количеству правильно решённых задач, максимум составляет 150 баллов.

Семестр 1: Промежуточная аттестация

(4) Структура устного экзамена и правила начисления баллов на нём описаны в п. 10.2. Возможный максимум за устный экзамен составляет 600 баллов.

(5) Общая сумма баллов студента определяется как сумма баллов за сдачу заданий, потоковые контрольные работы и устный экзамен. Итоговая оценка по дисциплине «Основы математического анализа» выставляется согласно следующей таблице.

Общая сумма баллов за семестр	Итоговая оценка по дисциплине
От 725 до 1075 баллов	Отлично
От 525 до 724 баллов	Хорошо
От 325 до 524 баллов	Удовлетворительно
От 0 до 324 баллов	Неудовлетворительно

Семестр 2: Текущий контроль успеваемости

Для оценки освоения дисциплины применяется балльно-рейтинговая система. Результаты текущего контроля успеваемости учитываются при промежуточной аттестации.

(1) В течение семестра студент сдаёт преподавателю в устной форме задачи из заданий, типовые примеры которых приведены в п. 10.3. Сдавая задачу, студент объясняет ход её решения и при необходимости отвечает на дополнительные вопросы преподавателя по ней, имеющие принципиальное значение для данной дисциплины.

(2) За каждую сданную в срок задачу студент получает назначенные за эту задачу баллы согласно таблице в п. 10.2. Возможный максимум за сдачу заданий составляет 225 баллов.

(3) В течение семестра проводится три потоковых контрольных работы. Каждая такая работа оценивается пропорционально количеству правильно решённых задач, максимум составляет 150 баллов.

Семестр 2: Промежуточная аттестация

(4) Структура устного экзамена и правила начисления баллов на нём описаны в п. 10.2. Возможный максимум за устный экзамен составляет 600 баллов.

(5) Общая сумма баллов студента определяется как сумма баллов за сдачу заданий, потоковые контрольные работы и устный экзамен. Итоговая оценка по дисциплине «Основы математического анализа» выставляется согласно следующей таблице.

Общая сумма баллов за семестр	Итоговая оценка по дисциплине
От 900 до 1275 баллов	Отлично
От 650 до 899 баллов	Хорошо
От 400 до 649 баллов	Удовлетворительно
От 0 до 399 баллов	Неудовлетворительно

10.2. Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине

Оценивание при устной сдаче заданий

Критерии оценивания результатов обучения	Шкала оценивания
☞ задание решено правильно; ☞ работа оформлена аккуратно, рисунки чёткие; ☞ материал изложен осмысленно, логично и аргументированно; ☞ понятия и термины применены корректно и точно; ☞ обучающийся свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы, хотя допустимы непринципиальные неточности.	80-100% полного балла за задачу
☞ задание решено правильно; ☞ работа оформлена аккуратно, рисунки чёткие; ☞ материал изложен осмысленно, логично и аргументированно при наличии затруднений в формулировке собственных суждений; ☞ понятия и термины применены корректно при наличии незначительных ошибок; ☞ обучающийся отвечает на дополнительные вопросы, допуская непринципиальные неточности.	50-80% полного балла за задачу
☞ задание решено правильно; ☞ работа оформлена неаккуратно; ☞ материал изложен неосмысленно, имеются ошибки в логике и аргументации; ☞ понятия и термины применены корректно при наличии незначительных ошибок; ☞ обучающийся отвечает на дополнительные вопросы, допуская ошибки.	20-50% полного балла за задачу
☞ задание решено неправильно; ☞ материал изложен компилятивно и неосмысленно, имеются ошибки в логике и аргументации; ☞ понятия и термины применены с грубыми ошибками; ☞ обучающийся не отвечает на дополнительные вопросы.	0-20% полного балла за задачу

Структура устного экзамена

(1) Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и одно практическое задание. Для подготовки к ним студенту даётся один час.

(2) При подготовке и ответе запрещено пользоваться справочной литературой, телефоном и другими электронными устройствами, а также помощью товарищей.

(3) За каждый теоретический вопрос можно получить 250 баллов, а за правильно выполненное практическое задание 100 баллов.

(4) Если студент не ответил, хотя бы на «удовлетворительно», хоть на один вопрос билета (даже на первый), то экзамен прекращается с оценкой «неудовлетворительно».

(5) Пересдача проводится по тем же правилам и тем же билетам, что и основной экзамен.

Оценивание ответов на устном экзамене

Критерии оценивания результатов обучения	Шкала оценивания
☞ теоретический материал изложен самостоятельно, осмысленно, структурированно, логично и аргументированно, отсутствуют затруднения при объяснении хода рассуждений; ☞ понятия и термины применены корректно и точно; ☞ даны исчерпывающие ответы на дополнительные вопросы, хотя допустимы непринципиальные неточности.	80-100% полного балла за вопрос
☞ теоретический материал изложен самостоятельно, осмысленно, логично и аргументированно, имеются отдельные затруднения при объяснении хода рассуждений; ☞ понятия и термины применены корректно при наличии незначительных ошибок; ☞ даны полные ответы на дополнительные вопросы с возможным присутствием ошибок.	50-80% полного балла за вопрос
☞ теоретический материал изложен самостоятельно, но неосмысленно, имеются ошибки в логике и аргументации, отсутствуют объяснения хода рассуждений; ☞ причинно-следственные связи поняты частично и изложены фрагментарно; ☞ понятия и термины применены корректно при наличии незначительных ошибок; ☞ ответы на дополнительные вопросы неполны и/или содержат существенные ошибки.	20-50% полного балла за вопрос
☞ теоретический материал представлен фрагментарно, отсутствуют осмысленность, логичность и аргументированность; ☞ причинно-следственные связи не поняты; ☞ понятия и термины применены с грубыми ошибками; ☞ ответы на дополнительные вопросы отсутствуют.	0-20% полного балла за вопрос

10.3. Типовые контрольные задания и иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Семестр 1: Задание 1

1. [5 баллов] Методом математической индукции доказать неравенство

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. [6 баллов] Найти все a, для которых существует такое b, что при всех c выражение $2b^2 - 3ab + 6ac - 2c^2 + b$ не положительно. Запишите условие задачи в терминах кванторов всеобщности и существования.

3. [6 баллов] Для каждого $a > 0$ и для каждого $b \in \{0, \pm 1\}$ найти точные границы множества

$$M_{a,b} := \{(1 + a/n)(-1)^{n+1} + b(-1)^{n(n-1)/2} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

4. [6 баллов] Для каждой пары натуральных чисел $n, m \in \mathbb{N}$ найти число c так, чтобы функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная правилом

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, & \text{при } x \neq 0; \\ c, & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

была непрерывна в точке $x = 0$.

5. [10 баллов] Используя асимптотические разложения элементарных функций, вычислить предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{2e^x \cos x - 2\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sin x}{\sqrt[3]{1 + 6x} - e^{\sin x} + 2 \ln \cos \sqrt{x}}.$$

6. [5 баллов] Используя замечательный предел, найти предел $(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$ при $x \to \pi/2$.

7. [6 баллов] Верно ли, что существуют такие числа $a, b \in \mathbb{R}$, что

$$\sin 3x = ax\cos 2x + b\sin x + O(x^5) \qquad \text{при } x \to 0.$$

8. [10 баллов] Подобрать функции вида $C(x-a)^\lambda$ или $C(a-x)^\lambda$, которые лучше всего аппроксимируют функции: (а) $\ln\sin x$ при $x \to \pi/2$; (б) $\arccos x$ при $x \to 1-0$.
9. [5 баллов] Используя правило Бернулли — Лопиталя, найти предел

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\pi - 2\arcsin\left(x/\sqrt{x^2+1}\right)\right).$$

10. [6 баллов] Исследовать последовательность на ограниченность и монотонность и найти её предел: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt[3]{6+x_n}$.
11. [10 баллов] Доказать, что последовательность $x_n = (-n)^{\sin(\pi n/2)}$ расходится. Найти все частичные пределы последовательности.

Семестр 1: Вариант потоковой контрольной работы № 1

1. Доказать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ верно равенство
$1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Найти значения a и b, при которых функция f непрерывна на всей числовой прямой
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2\sin(x-1)}{(x-1)\ln(2+2x+x^2)}, & |x| \neq 1, \\ a, & x = 1, \\ b, & x = -1. \end{cases}$$
3. Найдите предел $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{\sqrt{14+x}-3}{2-\sqrt[5]{27-x}}$.
4. Найдите предел $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 3x}$.
5. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-4}{3n^2+4}\right)^{5n^2}$.

Семестр 2: Задание 1

1. [5 баллов] Нарисовать линии уровня функции $f(x,y) = \frac{2}{x} - \frac{3}{y}$ на ее области определения.
2. [5 баллов] Найти частные производные, матрицу Якоби и дифференциал отображения $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, заданного формулой

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y + y\sin(z+x) - ze^y \\ -yx + 2\cos(z-xy) + \frac{y}{1+z} \end{pmatrix}$$

в точке $(0,1,1)$.
3. [5 баллов] Проверить, что функция $u(x,y) = \varphi(x+\psi(y))$, где φ, ψ — дифференцируемые функции, удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

4. [5 баллов] Оператора Лапласа Δ переводит каждую дважды гладкую функцию $u(x,y,z)$ в новую функцию

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Выяснить, как действует оператор Лапласа на сферически симметричные функции, т. е. функции вида $u = f(r)$, где
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$
Найти все сферически симметричные функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

5. [5 баллов] Разложить по формуле Тейлора до второго порядка в окрестности точки $(-1, 0)$ функцию
$$f(x, y) = e^{\frac{1+x}{1+y}}.$$

6. [5 баллов] Найти точки локального экстремума функции
$$z = x^3 + 2xy - y^2 + x - y.$$

7. [5 баллов] Непрерывная функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет условию
$$x^2 - y^2 + 2z^2 + xy - zy = 0$$
и условию $z(0, 1) = 1$. Доказать, что в некоторой окрестности точки $(0, 1)$ она бесконечно дифференцируема, а в самой точке найти dz и d^2z.

8. [5 баллов] Преобразовать к полярным координатам r и φ дифференциальное выражение
$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$
где $u = u(x, y), v = v(x, y)$.

9. [5 баллов] Показать, что уравнение теплопроводности
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$
не изменяет своего вида при замене переменных
$$\tilde{x} = \frac{x}{y},\ \tilde{y} = -\frac{1}{y},\ u = \frac{\tilde{u}}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}},$$
где $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y})$.

10. [5 баллов] Найти и исследовать точки условного экстремума функции $x + 4y - 2z$, если ее переменные связаны соотношениями:
$$x^3 + 64y^3 + 8z^3 + 12x + 48y + 2z = 26, \quad x + 4y = 2.$$

11. [5 баллов] Доказать, что функция $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y$ достигает наибольшего и наименьшего значения на множестве точек плоскости, удовлетворяющих условию $2x^2 + 5y^2 \leq 2xy + 25$, и найти эти значения.

Семестр 2: Вариант потоковой контрольной работы № 1

1. Найдите градиент функции $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{1 + x^2}$ в точке $(1, -1)$.

2. Найдите дифференциал функции $f(x, y, z) = (yz)^{2x}$ в точке $(1, 2, 3)$.

3. Пусть f и g — произвольные дважды дифференцируемые функции. Доказать, что функция $u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$ удовлетворяет уравнению
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

4. Разложите по формуле Тейлора до второго порядка в окрестности точки $(0, 1, 0)$ функцию $f(x, y, z) = \ln(xz + y^2)$.

5. Найти точки локального экстремум функции
$u(x, y, z) = \dfrac{2}{y} + \dfrac{4y^2}{z} + \dfrac{z^2}{x} + 8x^2 + 1.$

Семестр 1: Вопросы к устному экзамену

1. Понятие «множества» в рамках наивной теории множеств. Элемент множества, принадлежность множеству. Подмножество. Равенство множеств. Пустое множество.

2. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Упорядоченная пара. Прямое произведение двух множеств. Упорядоченные наборы (n-ки), прямое произведение n множеств.

3. Отображение. Область определения отображения, значение отображения, множество значений. Образ множества под действием отображения, полный прообраз множества под действием отображения, полный прообраз элемента под действием отображения.

4. Композиция двух отображений. Сюрьективное отображение (отображение на). Инъективное (взаимно однозначное) отображение. Биективное отображение. Обратное отображение.

5. График отображения. Правила преобразования графиков.

6. Высказывание. Операции над высказываниями: конъюкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, равносильность. Высказывание с переменными. Высказывание (все)общности. Высказывание существования. Теорема и доказательство. Критерий. Необходимое условие. Достаточное условие. Метод доказательства от противного. Теорема о методе математической индукции.

7. Факториал. Двойной факториал. Число перестановок. Число размещений. Число сочетаний (биномиальные коэффициенты). Лемма Паскаля. Лемма о формуле бинома Ньютона. Лемма о неравенстве Бернулли.

8. Вещественные числа. Рациональные и иррациональные числа. Аксиома полноты — теорема Дедекинда о полноте вещественных чисел.

9. Отрезок (замкнутый промежуток), интервал (открытый промежуток), полуинтервал (полуоткрытый промежуток), промежуток. Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши — Кантора).

10. Ограниченное снизу множество, нижняя граница. Ограниченное снизу множество, верхняя граница. Ограниченное множество.

11. Минимум и максимум множества. Теорема Дедекинда о существовании наибольшей нижней границы и наименьшей верхней границы. Точная нижняя граница (нижняя грань, инфимум). Точная верхняя граница (верхняя грань, супремум). Расширенная числовая прямая. Теорема о точных границах в $\overline{\mathbb{R}}$.

12. Критерий для точных границ. Принцип Архимеда.

13. Последовательность. Конечный предел последовательности. Бесконечные пределы последовательности. Расходящаяся последовательность.

14. Бесконечно большая последовательность. Бесконечно малая последовательность. Ограниченная последовательность.

15. Теорема о пределе последовательности и неравенстве. Предельный переход в неравенстве. Следствие о единственности предела. Теорема о зажатой последоваетльности.

16. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема о бесконечно малых. Теорема о пределе последовательности и алгебраических операциях.

17. Подпоследовательность. Частичный предел последовательности. Теорема о пределе подпоследовательности последовательности, имеющей предел.

18. Теорема Больцано — Вейерштрасса. Следствие из теоремы Больцано — Вейерштрасса. Непустота множества частичных пределов любой последовательности. Верхний и нижний предел последовательности.

19. Неубывающая последовательность. Невозрастающая последовательность. Возрастающая последовательность. Убывающая последовательность. Монотонная последовательность. Строго монотонная последовательность. Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности.

20. Фундаментальная последовательность (сходящая в себе последовательность, последовательность Коши). Условие Коши. Критерий Коши сходимости последовательности.

21. Конечная предельная точка (точка сгущения). Конечная предельная точка (точка сгущения) слева. Конечная предельная точка (точка сгущения) справа. Предельные точки $\pm\infty$.

22. Конечный предел функции в точке сгущения. Конечный предел слева функции в точке сгущения. Конечный предел справа функции в точке сгущения. Конечный предел функции на бесконечности. Бесконечные пределы $\pm\infty$ и ∞ функции в точке сгущения.

23. Окрестность и проколатая окрестность для конечной точки и для бесконечно удаленных точек $\pm\infty$. Определение предельной точки на языке окрестностей. Определение предела функции на языке окрестностей. Теорема об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне.

24. Теорема о пределе функции и неравенстве. Теорема о зажатой функции. Теорема о пределе функции и алгебраических операциях. Критерий Коши для предела функции. Теорема о пределе композиции.

25. Асимптотические сравнения o-малое и O-большое. Правила работы с o-малыми и O-большими (доказательство пп. 1)–3)). Теорема о сравнении показательной, степенной и логарифмической функций. Главная часть. Эквивалентные функции. Теорема о главных частях элементарных функций.

26. Элементарные функции. Теорема о существовании предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Экспоненциальная (показательная) функция. Число e. Теорема о свойствах показательной функции.

27. Натуральный логарифм. Теорема о свойствах логарифма.

28. Степень с произвольным основанием. Степенная функция. Замечательный предел для степенной функции.

29. Тригонометрические функции. Замечательный предел для $\sin x$.

30. Непрерывность функции в точке. Изолированная точка. Точка разрыва, разрыв первого и второго рода, устранимый разрыв.

31. Теорема о непрерывности в точке и алгебраических операциях и композиции. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность функции на множестве.

32. Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях. Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях.

33. Производная функции в точке. Производная функции (на промежутке). Непрерывность функции, имеющей производную. Физическая интерпретация производной. Геометрическая интерпретация производной. Секущая. Касательная.

34. Дифференцируемость в точке. Дифференциал. Дифференциал как главная линейная часть приращения. Теорема о производной и дифференциале.

35. Теорема о производной и алгебраических операциях. Теорема о производной композиции. Теорема о производной обратной функции. Теорема о производных элементарных функций.

36. Локальный максимум. Локальный минимум. Локальный экстремум. Теорема Ферма о необходимом условии локального экстремума. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа о конечном приращении. Геометрическая интерпритация теоремы Лагранжа. Теорема Коши о конечном приращении. Геометрическая интерпретация теоремы Коши.

37. Старшие производные. Полином Тейлора и остаточный член в формуле Тейлора. Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Общая форма для остаточного члена в формуле Тейлора. Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Теорема о формулах Тейлора для элементарных функций.

38. Теорема о достаточном условии локального экстремума. Критерий монотонности. Выпуклая функция. Строго выпуклая функция. Выпуклая комбинация точек. Вогнутая функция. Строго вогнутая функция. Точка перегиба. Выпуклое множество. Геометрический смысл выпуклости функции с использованием надграфика. Критерий выпуклости функции. Неравенство Юнга. Неравенство Йенсена.

39. Вертикальная асимптота. Наклонная асимптота. Нахождение наклонных асимптот. Правило Бернулли — Лопиталя.

40. Первообразная (неопределенный интеграл). Обобщенная первообразная. Теорема о множестве первообразных. Таблица простейших неопределенных интегралов.

41. Теорема о линейности первообразных. Теорема о формуле интегрирования по частям для первообразной. Теорема о замене и подстановке в неопределенном интеграле.

42. Рациональная функция. Простейшая дробь. Теорема о первообразной рациональной функции.

43. Разбиение отрезка и разбиение с выделенными точками. Функция, интегрируемая по Риману, и ее интеграл. Интегральная сумма Римана. Замечание о геометрической интерпретации определеного интеграла.

44. Верхняя и нижняя суммы Дарбу. Критерий Дарбу. Пример ограниченной неинтегрируемой по Риману функции. Функция Дирихле.

45. Теорема о линейности и аддитивности интеграла. Теорема об интегрируемости непрерывной и монотонной функций. Теорема о монотонности интеграла.

46. Первая теорема о среднем. Геометрический смысл теоремы о среднем для случая $g(x) = 1$.

47. Теорема о связи интеграла и первообразной. Теорема о формуле Ньютона — Лейбница. Теорема о формуле Тейлора с интегральным остаточным членом.

48. Особая точка для подынтегральной функции. Интегрируемость функции в несобственном смысле. Несобственный интеграл. Расходимость интеграла. Абсолютная и условная сходимости несобственного интеграла.

49. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла. Теорема об интегрировании основных особенностей. Мажорантный признак и теорема сравнения.

50. Сходимость несобственного интеграла, имеющего несколько особенностей.. Сходимость несобственного интеграла в смысле главного значения.

51. Эйлеровы интегралы: Γ- и B-функции. Теорема о свойствах Γ- и B-функций. Формула Стирлинга. Примеры о выражении интегралов через эйлеровы интегралы. Интеграл Эйлера — Пуассона (интеграл Гаусса).

52. Формула для вычисления площади подграфика. Формула для вычисления площади фигуры, ограниченной кривой в полярных координатах. Формула для вычисления массы и центра тяжести стержня. Нулевой и первый моменты. Формула для вычисления объём тела вращения. Вычисление объёма трехмерного шара. Парметризованная кривая. Параметризация и ее компоненты. Формула для вычисления длины кривой. Теорема о длине кривой. Формула для вычисления длины графика функции.

Семестр 2: Вопросы к устному экзамену

1. Вещественное n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Евклидова длина (норма) в $\mathbb{R}^n$. Евклидово расстояние (евклидова метрика) в $\mathbb{R}^n$. Лемма о согласованности евклидовой длины (нормы) со стандартным скалярным произведением.

2. Метрика и метрическое пространство. Норма и нормированное пространство. Метрика, согласованная (порожденная) нормой. Основные нормы и метрики в $\mathbb{R}^n$. Теорема о сравнениии основных норм в $\mathbb{R}^n$.

3. Открытый и замкнутый шар в нормированном пространстве. Сфера в нормированном пространстве. Теорема об эквивалентности норм в $\mathbb{R}^n$. Теорема о классических неравенствах Коши — Буняковского и Минковского.

4. Внутренняя, внешняя, граничная и предельная точка множества. Внутренность, внешность, граница и замыкание множества. Открытые и замкнутые множества. Ограниченность множества в $\mathbb{R}^n$. Компактность множества в $\mathbb{R}^n$. (Линейная) связность множества. Область.

5. Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^n$. Лемма об эквивалентности сходимости и покомпонентной сходимости в $\mathbb{R}^n$. Предел отображения. Непрерывность отображения в точке и на множестве.

6. Линейные отображения векторных пространств. Теорема о матрице линейного отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

7. Дифференцируемость отображения в точке. Дифференциал отображения в точке. Частные производные первого порядка отображения f. Матрица Якоби $Df(x)$ отображения f в точке x. Теорема о связи дифференциала и частных производных.

8. Теорема о дифференцировании и алгебраических операциях. Теорема о дифференцировании композиции.

9. Производная $\frac{\partial f}{\partial v}$ функции f по вектору v. Производная по направлению. Связь производной по вектору с дифференциалом. Градиент функции. Замечание о геометрическом смысле градиента.

10. Частные производные порядка k отображения f. Теорема о перестановочности старших производных. C^k-гладкие функции. Теорема о формуле Тейлора. Второй дифференциал и матрица Гессе.

11. Локальный максимум и локальный минимум функции. Локальный экстремум функции. Критическая точка функции. Теорема о необходимом условии локального экстремума. Теорема о достаточном условии локального экстремума. Квадратичные формы. Положительно определенные, отрицательно определенные, знаконеопределенные и полуопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Метод наименьших квадратов.

12. Теорема об обратной функции. Нахождение частных производных обратной функции. Теорема о неявной функции. Дифференцирование неявно заданной функции.

13. Диффеоморфизм. Якобиан. Криволинейные координаты. Полярная система координат. Цилиндрическая система координат. Сферическая система координат (физическая).

14. Замена переменных. Выражения первых и вторых частных производных при замене переменных. Запись опрератора Лапласа в полярных координатах.

15. Параметрическое, явное и неявное задание гладкой кривой на плоскости и в пространстве. Касательные векторы и касательная прямая к кривой. Нормаль к плоской кривой.

16. Параметрическое, явное и неявное задание гладкой двумерной поверхности в пространстве. Касательные векторы, касательная плоскость и нормаль к поверхности. Касательное пространство к множеству точек, удовлетворяющих системе условий (касательное пространство неявно заданного многообразия).

17. Условный максимум и условный минимум функции. Условный экстремум функции. Принцип множителей Лагранжа. Теорема о достаточном условии условного локального экстремума.

18. Определение многомерного интеграла Римана. Геометрическая интерпретация многомерного интеграла. Определение многомерного интеграла Римана через суммы Дарбу. Определение меры Жордана и множеств, измеримых по Жордану. Свойства интеграла Римана (аддитивность, монотонность, интегрируемость непрерывных функций).

19. Определение кратного и повторного интегралов. Расстановка пределов интегрирования.

20. Формула замены переменной в интеграле. Геометрический смысл якобиана. Якобианы классических систем координат. Элементы площади и объема в криволинейных координатах. Интегрирование степенных особенностей.

21. Определение криволинейного интеграла 1-го рода. Длина кривой и элемент длины в различных системах координат.

22. Определение поверхностного интеграла 1-го рода. Площадь поверхности и элемент площади в различных системах координат. Независимость определения криволинейного и поверхностного интегралов 1-го рода от параметризации.

23. Ориентация кривых и поверхностей. Определение внешней нормали к краю поверхности. Индуцированная ориентация края поверхности. Ориентация поверхности при помощи

нормали.

24. Выражение внешней нормали через параметризацию. Работа поля вдоль кривой и циркуляция поля. Определение криволинейного интеграла 2-го рода.

25. Поток векторного поля через поверхность. Определение поверхностного интеграла 2-го рода.

26. Классические интегральные формулы. Формулы Грина, Гаусса — Остроградского, Стокса.

27. Дифференциальные операторы векторного анализа. Градиент, ротор, дивергенция и лапласиан в декартовых координатах. Оператора Гамильтона (набла).

28. Формула Гаусса — Остроградского в терминах дивергенции и потока. Формула Стокса в терминах ротора, потока и циркуляции. Физический смысл ротора и дивергенции.

29. Потенциальное и безвихревое векторное поле. Условие потенциальности поля. Соленоидальное и бездивергентное векторное поле. Условие соленоидальности поля.

30. Определение числового ряда, частичных сумм, сходящегося ряда. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости ряда. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

31. Теорема сравнения для рядов. Интегральный признак сходимости. Сходимость эталонных рядов. Гармонический ряд. Признаки Коши и Даламбера. Признак Лейбница.

Семестр 1: Пример билета на устный экзамен

1. Сформулировать теорему Ролля. Сформулировать и доказать теоремы Лагранжа и Коши о конечных приращениях. Дать геометрическую интерпретацию теоремам Лагранжа и Коши.

2. Первообразная (неопределенный интеграл). Обобщенная первообразная. Рациональная функция. Простейшая дробь. Сформулировать и доказть теорему о первообразной рациональной функции.

3. Найти разложение функции $y = \cos(3x - \ln(1+2x))$ по формуле Тейлора в окрестности нуля до x^2 с остаточным членом в форме Лагранжа.

Семестр 2: Пример билета на устный экзамен

1. Локальный максимум и локальный минимум функции. Локальный экстремум функции. Критическая точка функции. Сформулировать теорему о необходимом условии локального экстремума. Сформулировать и доказать теорему о достаточном условии локального экстремума.

2. Классические интегральные формулы. Формулы Грина, Гаусса — Остроградского, Стокса. Доказать теорему о формуле Гаусса — Остроградского.

3. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le \sqrt{\ln 2},\ x \ge 0\right\}$.

Лист актуализации рабочей программы дисциплины «Основы математического анализа»

№	Характеристика внесённых изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета	Подпись ответственного