МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет
Кафедра высшей математики ФФ

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФ, д.ф.-м.н
В.Е.Блинов
«16» 08 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Направление: 03.03.02 Физика
Направленность (профиль): все профили

Форма обучения
Очная

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)					Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем				Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	180	32	32		16	76	18	4			2
2	180	32	32		16	76	18	4			2
Итого	**360**	**64**	**64**		32	**152**	**36**	**8**			**4**
Всего 360 часов / 10 зачётных единиц, из них: - контактная работа 172 часа											
Компетенции ОПК-1											

Ответственный за образовательную программу
д.ф.-м.н., проф. С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2022

Содержание

1. **Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.**

Курс «Линейная алгебра и геометрия» имеет своей целью дать знания в этой области, методах, применяемых в других математических дисциплинах, физике, научить применять полученные знания для освоения теоретических основ физических курсов, читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета. Дисциплина нацелена на формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.	**ОПК-1.1.** Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК -1.2.** Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК -1.3** Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необходимых в профессиональной деятельности. **ОПК-1.4** Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин.	**Знать** определения и понятия, относящиеся к основным темам геометрии и линейной алгебры, формулировки и доказательства основных теорем; основные методы и подходы геометрии и линейной алгебры. **Уметь** решать типовые задачи, применять понятия и факты геометрии и линейной алгебры для решения теоретических и практических задач, самостоятельно работать над нестандартными математическими задачами. **Знать** основы линейной алгебры и аналитической геометрии для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.

2. **Место дисциплины в структуре образовательной программы.**

Векторная алгебра трёхмерного физического пространства, с которой начинается изучение данного курса, не требует специальных знаний и базируется на школьных знаниях слушателей. Дальнейшее изучение курса приводит к понятиям линейного (векторного) пространства и линейного отображения, которые являются основой практически всех традиционно сложившихся математических дисциплин, теоретической физики, вычислительной математики. С более широкой точки зрения предметом изучения курса является идея линейности, проработка её математического языка. Одним из наиболее ярких примеров применения этого принципа есть линейность малых приращений, которая нашла широкое применение в математическом анализе. Большую роль в современном анализе играют пространства, в частности функциональном анализе, изучающем бесконечномерные векторные пространства. Изучение конечномерных векторных пространств является необходимой предпосылкой для изучения бесконечномерных. Первое знакомство с комплексными числами происходит именно в курсе линейной алгебры и аналитической геометрии, дальнейшее их изучение продолжается в курсе комплексного анализа.

Практически все конструкции линейного пространства над полем комплексных чисел составляют математический аппарат квантовой механики. Тензоры, являющиеся объектом изучения тензорного анализа и математическим аппаратом для многих разделов физики (теоретическая механика, электродинамика), являются обобщением основных понятий линейной алгебры: вектор, линейный функционал, линейный оператор, квадратичная форма. Собственные числа и собственные векторы используются при решении систем дифференциальных уравнений.

3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)					Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем				Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	180	32	32		16	76	18	4			2
2	180	32	32		16	76	18	4			2
Итого	**360**	**64**	**64**		**32**	**152**	**36**	**8**			**4**
Всего 360 часов / 10 зачётных единиц, из них: - контактная работа 172 часа											
Компетенции ОПК-1											

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, контрольные работы, консультации, экзамен.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

- текущий контроль успеваемости: контрольные работы, задания для самостоятельного решения;
- промежуточная аттестация: экзамен.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет 10 зачетных единиц.

- занятия лекционного типа – 64 часа;
- практические занятия – 64 часа;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 152 часа;
- промежуточная аттестация (подготовка к сдаче экзамена, консультации и экзамен) – 48 часов.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, консультации, экзамен) составляет 172 часа.

4. **Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий.**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 зачётных единиц, 360 академических часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)						Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы			Сам. работа во время занятий (не включая период сессии)	Сам. работа во время промежуточной аттестации		
				Лекции	Практические занятия	Прием заданий				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Первый семестр										
1	Векторная алгебра и геометрия	1-3	30	6	6	2	16			
2	Матрицы, комплексные числа, многочлены	4-6	30	6	6	2	16			
3	Фигуры второго порядка	7-8	18	4	4	2	8			.
4	Начала линейной алгебры	9-12	34	8	8	2	16			
5	Определители	13-14	18	4	4	2	8			
6	Квадратичные формы	15-16	18	4	4	2	8			
7	Контрольные работы	10, 16	8			4	4			
9	Промежуточная аттестация (Экзамен)		24					18	4	2
Всего за 1 семестр			**180**	**32**	**32**	**16**	**76**	**18**	**4**	**2**
Второй семестр										
1	Линейные операторы	1-4	40	8	8	2	22			
2	Эвклидовы и эрмитовы пространства	5-8	38	6	8	2	22			
3	Основы обработки данных	8-10	20	4	4	2	10			
4	Начала дифференциальной геометрии	10-13	28	6	6	2	14			
5	Группы и алгебры	13-16	26	8	6	2	10			
6	Контрольные работы	10, 16	10			6	4			
8	Промежуточная аттестация (Экзамен)		24					18	4	2
Всего за 2 семестр			**180**	**32**	**32**	**16**	**76**	**18**	**4**	**2**
Итого			**360**	**64**	**64**	**32**	**152**	**36**	**8**	**4**

Программа и основное содержание лекций (64 часа)

Первый семестр (32 часа)

Раздел 1. Векторная алгебра и геометрия (6 часов)

Векторы в пространстве. Определение вектора. Операции с векторами. Базис и координаты. Коллинеарность, компланарность и линейная зависимость. Ориентация базиса и пространства.
Скалярное, смешанное и векторное произведения. Скалярное произведение, длины, углы. Смешанное произведение, ориентированные объёмы. Векторное произведение. Двойное векторное произведение, тождества Лагранжа и Якоби. Проекции вектора на ось и на плоскость.
Определители второго и третьего порядков. Мотивирующие вычисления в координатах. Полное раскрытие. Раскрытие по столбцу или строке. Вычищение определителя.
Задание прямой и плоскости. Фигуры и уравнения. Параметрическое задание. Нормальные уравнения. Общие уравнения. Уравнения в отрезках. Уравнения по точкам. Смена способа задания прямой или плоскости.
Взаимное расположение прямых и плоскостей. Варианты расположения пары фигур. Расстояния. Проекции и перпендикуляры. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым.

Раздел 2. Матрицы, комплексные числа, многочлены (6 часов)

Введение в системы линейных уравнений на примерах. Единственное решение. Решение с одним параметром. Решение с двумя параметрами. Избыточная система. Несовместная система. Три плоскости в общем положении. Приёмы эффективного ведения решения.
Смена координат и матричный язык. Преобразования декартовых координат на плоскости: переносы, растяжения, повороты, отражения. Композиция преобразований. Матрицы и операции над ними. Транспонирование. Произвольные линейные и аффинные преобразования. Активные и пассивные преобразования.
Комплексные числа. Алгебраическая форма и операции. Геометрическое представление на комплексной плоскости. Тригонометрическая и показательная формы. Сопряжение и свойства модуля. Умножение и поворот. Матричная форма. Комплексная экспонента.
Основная теорема алгебры многочленов. Многочлены и операции над ними. Корни многочлена и их кратности. Основная теорема. Разложение многочлена на неприводимые множители.

Раздел 3. Фигуры второго порядка (4 часа)

Эллипсы, параболы и гиперболы. Фигуры и уравнения. Уравнение в полярных координатах. Канонические уравнения. Фокальные свойства. Ортогональность софокусных семейств. Оптические свойства. Конические сечения.
Общее уравнение линии второго порядка. Компактная запись общего уравнения. Задача классификации. Метрическая классификация. Канонический вид и приведение к нему поворотом и переносом. Уравнение касательной.
Обзор поверхностей второго порядка. Эллипсоиды и гиперболоиды. Конусы. Параболоиды. Цилиндры.

Раздел 4. Начала линейной алгебры (8 часов)

Системы линейных уравнений 1. Начальная терминология. Элементарные преобразования. Метод исключения неизвестных на примере. Ступенчатые матрицы. Общий алгоритм приведения к ступенчатому виду.

Линейные пространства строк и столбцов. Линейные пространства. Комбинации и (не)зависимость. Линейная оболочка. Лемма о появлении и исчезновении зависимости. Существование базиса подпространства. Размерность линейного пространства.
Системы линейных уравнений 2. Ранг матрицы, теорема о совпадении рангов по строкам и по столбцам. Критерий совместности системы линейных уравнений. Однородные линейные системы, пространство решений, фундаментальная система решений. Неоднородные линейные системы, многообразие решений. Альтернатива Фредгольма.
Действия с подпространствами. Пересечение и сумма. Формула размерностей Грассмана. Сумма нескольких подпространств. Прямые суммы. Размерность прямой суммы. Дополнение к подпространству. Прямая сумма как конструкция.
Примеры линейных пространств. Различные типы матриц. Дальнейшие примеры:
решения линейного дифференциального уравнения, многочлены, функции.

Раздел 5. Определители (4 часа)

Комбинаторное строение определителей. Подходы к понятию определителя. Комбинаторный подход и формула полного раскрытия определителя. Инверсии и чётность перестановки, свойства числа инверсий. Миноры и раскрытие по строке либо столбцу.
Свойства определителей. Треугольные и блочно-треугольные матрицы. Определитель как функция строк. Определитель произведения матриц.
Невырожденные матрицы. Критерий невырожденности. Формула для обратной матрицы. Правило Крамера. Ранг матрицы по минорам.
Полиномиальная интерполяция. Уравнение прямой. Интерполяционный полином в форме Лагранжа. Полином Тейлора. Интерполяция Эрмита.

Раздел 6. Квадратичные формы (4 часа)

Введение и мотивация. Векторы, координаты и однородные функции. Векторное произведение как линейный оператор. Тензор моментов инерции.
Билинейные и квадратичные формы. От матрицы к форме. От формы к матрице. Симметричные формы. Инвариантные определения. Поведение при смене базиса. Канонический вид симметричной формы, метод Лагранжа.
Вещественные квадратичные формы. Закон инерции, сигнатура. Невырожденные формы, (полу)определённые формы. Сужение на подпространство. Главные миноры, определение сигнатуры методом Якоби. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.

Второй семестр (32 часа)

Раздел 7. Линейные операторы (8 часов)

Линейные отображения. Отображения пространств столбцов и матрицы. Выбор базиса. Изоморфизм. Матрица отображения в базисах. Смена базиса и матрица перехода. Закон изменения матрицы отображения.
Структура линейного отображения. Элементарные матрицы. Простейший вид матрицы отображения. Образ, прообраз, ядро. Отложенная структурная лемма.
Линейные операторы. Пространство линейных отображений. Ранг и дефект оператора. Примеры линейных операторов. Проекторы. Инвариантные подпространства. Диагонализуемость.
Диагонализация матрицы оператора. Собственные числа и векторы. Характеристический многочлен. Характеристические корни. Экстремумы квадратичной формы на сфере. Собственные и корневые подпространства. Сумма собственных подпространств. Кратности корня. Критерий диагонализуемости. Формулировка корневого разложения.

Функции матриц. Мотивация. Полиномы и суммы рядов. Теорема Гамильтона -- Кэли. Диагонализация и жорданова форма. Матрицы второго порядка. Формула Сильвестра. Формула Бухгейма. Вычищение определителя Вандермонда. Обращение матрицы Вандермонда.

Раздел 8. Эвклидовы и эрмитовы пространства (6 часов)

Стандартное эвклидово пространство. Стратегия: от линейной алгебры к линейной геометрии. Ортонормированные базисы R^n и ортогональные матрицы. Строение маломерных ортогональных матриц. Диагонализация симметричных матриц. Метод ортогонализации Грама -- Шмидта. Разложение вектора по ортонормированной системе. Ортогональное дополнение к подпространству.
Унитарная триангуляция. Стандартное эрмитово пространство. Ортонормированные базисы C^n и унитарные матрицы. Унитарная триангуляция Шура. Эрмитовы матрицы и спектральная теорема. Другие версии спектральной теоремы. Разложение Холецкого.
Общие эвклидовы и эрмитовы пространства. Стандартное скалярное произведение. Свойства стандартного вырастают в аксиомы общего. Матрица Грама. Неравенство Коши и углы. Объёмы и расстояния.
Нормальные операторы. Сопряжённый оператор. Спектральная теорема. Спектральные портреты. Канонические виды. Коммутирующие самосопряжённые операторы.
Разложения операторов и матриц. Эрмитово разложение оператора. Алгебраические структуры на операторах. Полярное разложение оператора. Спектральное разложение нормального оператора. Функциональное исчисление.

Раздел 9. Основы обработки данных (4 часа)

Линейная регрессия. Центрирование данных. Линейная регрессия на плоскости. Линейная регрессия в любой размерности. Зародыш метода наименьших квадратов. Матричное представление линейной регрессии.
Дисперсия, ковариация, корреляция. Разброс данных и дисперсия. Дисперсия вдоль направления. Ковариация и корреляция. Матрица ковариаций.
Сингулярное разложение. Предварительный эллипс. Сингулярные числа. Формулировка сингулярного разложения. Структура линейного отображения. Доказательство сингулярного разложения. Сокращённое сингулярное разложение. Псевдообратная матрица.
Ранговое приближение. Ранговое разложение и разложение Шмидта. Ранговое приближение Шмидта. Метод главных компонент. Восстановление параметров модели. Итерационный алгоритм.

Раздел 10. Начала дифференциальной геометрии (6 часов)

Линии в пространстве. Способы задания. Естественный параметр. Сопровождающий трёхгранник, его движение. Вычисление кривизны и кручения. Особые случаи. Проекции линии на плоскости трёхгранника. Соприкасающаяся окружность. Соприкасающаяся сфера.
Геометрия на поверхности. Способы задания. Нормаль и касательная плоскость. Ориентируемость. Первая квадратичная форма. Длины, углы, площади. Смена параметризации.
Кривизна поверхности. Геодезическая и нормальная кривизны линии. Геодезические на поверхности. Вторая квадратичная форма. Оператор Родрига. Главные направления и главные кривизны. Средняя и полная кривизна поверхности. Отыскание главных направлений. Типы точек и соприкасающийся параболоид.
Внутренняя геометрия поверхности. Изометричность и изгибание. Индексные обозначения. Деривационные формулы. Выражение геодезической кривизны. Теорема Гаусса о полной кривизне. Оформление поверхности в пространстве. Эйлерова характеристика поверхности, глобальная теорема Гаусса -- Бонне.

Раздел 11. Группы и алгебры (8 часов)

Примеры разных типов групп. Определение группы. Группы поворотов плоскости. Группа симметрий прямоугольника. Группа симметрий равностороннего треугольника. Группа перестановок. Конечные группы отражений и поворотов. Плоские решётки и орнаменты. Классические группы матриц. Обобщение ортогональных групп.
Морфизмы, действия, представления. Морфизмы групп. Действия групп. Орбиты и стабилизаторы. Действия группы на себе. Матричные представления группы. Группы кос.
Алгебра кватернионов. Сфера в четырёх измерениях. Правила Гамильтона. Сопряжение и норма. Чисто мнимые кватернионы. Трёхмерное представление. Вращения трёхмерного пространства. Спинорное накрытие.
Примеры алгебр математической физики. Поля и кольца. Алгебры и подалгебры. Классические матричные алгебры Ли. Простая трёхмерная алгебра Ли. Связь групп Ли и алгебр Ли. Группа Гейзенберга. Алгебры Вейля.
Алгебры Грассмана. Внешние формы. Внешняя алгебра трёхмерного пространства. Внешнее умножение.

Программа практических занятий (64 часа)

Первый семестр (32 часа)

1. Векторная алгебра. Вычисление скалярного, смешанного и векторного произведений в координатах (2 часа).
2. Задание прямых и плоскостей различными способами (2 часа).
3. Определение взаимного расположения прямых и плоскостей, вычисление расстояний и проекций (2 часа).
4. Преобразования декартовых систем координат, матричная запись (2 часа).
5. Операции с комплексными числами в алгебраической и показательной форме (2 часа).
6. Операции с многочленами, отыскание корней и разложение на множители (2 часа).
7. Линии второго порядка, их свойства и канонические уравнения (2 часа).
8. Поверхности второго порядка, их свойства и канонические уравнения (2 часа).
9. Системы линейных уравнений. Решение методом исключения неизвестных (2 часа).
10. Освоение основных понятий линейной алгебры и связей между ними: линейная оболочка, базис и размерность, ранг матрицы (2 часа).
11. Пространство решений, фундаментальные решения. Многообразие решений (2 часа).
12. Действия с подпространствами (2 часа).
13. Нахождение обратной матрицы. Решение матричного уравнения $AX = B$ (2 часа).
14. Определители, методы их вычисления, их приложения (2 часа).
15. Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду по методу Лагранжа (2 часа).
16. Вещественные квадратичные формы, применение критерия Сильвестра (2 часа).

Второй семестр (32 часа)

1. Абстрактное векторное пространство. Линейные отображения. Ядро и образ (2 часа).
2. Задание линейного оператора матрицей. Инвариантные подпространства (2 часа).
3. Собственные числа и собственные векторы. Диагонализация линейного оператора (2 часа).
4. Функции от матриц, способы нахождения матричной экспоненты (2 часа).
5. Геометрия евклидовых пространств, метод ортогонализации Грама -- Шмидта (2 часа).
6. Ортогональное дополнение, проекция на подпространство (2 часа).

7. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор. Ортогональный и унитарный операторы. Канонические виды матриц операторов (2 часа).
8. Приведение формы к главным осям. Приведение пары форм к каноническому виду (2 часа).
9. Сингулярное разложение. Полярное разложение (2 часа).
10. Ранговое приближение. Метод главных компонент (2 часа).
11. Задание линии в пространстве. Вычисление кривизны и кручения (2 часа).
12. Задание поверхности в пространстве. Вычисление первой квадратичной формы. Геометрия на поверхности (2 часа).
13. Кривизна поверхности. Отыскание главных направлений и главных кривизн, полной и средней кривизны (2 часа).
14. Знакомство с основными понятиями теории групп на примерах. Группы движений. Действия групп (2 часа).
15. Вычисления в алгебре кватернионов. Связь с вращениями трёхмерного пространства (2 часа).
16. Повторение наиболее трудных тем (2 часа).

Самостоятельная работа студентов (188 часов)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям.	36
Изучение теоретического материала, не освещаемого на лекциях	20
Подготовка к контрольным работам	36
Подготовка к сдаче заданий	56
Подготовка к экзамену	36

5. Перечень учебной литературы.

1. Н. И. Александрова, Семинары по высшей алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие: [для студентов 1 курса Физического факультета НГУ] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2007. - 87 с. (78 экз.).
2. И. А. Долгунцева, Векторная и тензорная алгебра для физиков-первокурсников: учебно-методическое пособие / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. высшей математики. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2012. - 66 с. (80 экз.).
3. А. П. Ульянов, Конспект лекций по алгебре и геометрии: учебное пособие по курсу высшей алгебры и аналитической геометрии: [для студентов 1 курса Физ. фак. НГУ: в 3 ч.] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2007-2008. - Ч.1: [Главы 1-3], 2007. - 35 с. (78 экз.).
4. А. П. Ульянов, Конспект лекций по алгебре и геометрии: учебное пособие по курсу высшей алгебры и аналитической геометрии: [для студентов 1 курса Физ. фак. НГУ: в 3 ч.] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2007-2008. - Ч.2: [Главы 4-9], 2007. - 54 с. (48 экз.).
5. А. П. Ульянов, Конспект лекций по алгебре и геометрии: учебное пособие по курсу высшей алгебры и аналитической геометрии: [для студентов 1 курса Физ. фак. НГУ: в 3 ч.] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2007-2008. - Ч.3: [Главы 11-13], 2008. - 31 с. (45 экз.).

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

6. Н. И. Александрова, Семинары по высшей алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие: [для студентов 1 курса Физического факультета НГУ] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2007. - 87 с. (78 экз.).
7. А. П. Ульянов, Конспект лекций по алгебре и геометрии: учебное пособие по курсу высшей алгебры и аналитической геометрии: [для студентов 1 курса Физ. фак. НГУ: в 3 ч.] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2007-2008. - Ч.2: [Главы 4-9], 2007. - 54 с. (48 экз.).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

7.1 Ресурсы сети Интернет

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:
- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.2 Современные профессиональные базы данных

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

8.1 Перечень программного обеспечения

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

8.2 Информационные справочные системы

Не используются.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.

2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.1 Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Текущий контроль успеваемости

В течение семестра проводится прием выполненных обучающимся заданий/задач в отведенное время. Примеры заданий/задач приведены в п.10.3. Термин «сдать задание/задачу» означает объяснение хода ее решения и при необходимости ответы на дополнительные вопросы преподавателей.

Для оценки освоения дисциплины применяется балльно-рейтинговая система, и результаты текущего контроля успеваемости также учитываются при промежуточной аттестации.

(1) В течение каждого семестра студенту необходимо сдать преподавателю в устной форме (объяснить ход решения задачи и при необходимости ответить на дополнительные вопросы по ней) не менее 90% задач из заданий, типовые примеры которых приведены в п.10.3.

(2) За каждую задачу, полностью сданную в срок, студент получает 10 баллов. За задачу, сданную (полностью или частично) после установленного срока, студент получает ноль баллов.

(3) В каждом семестре проводится две потоковых контрольных работы. Каждая такая работа оценивается, максимум, в 150 баллов.

(4) В конце семестра преподаватель оценивает работу каждого студента из своей группы и добавляет ему от 0 до 100 баллов в зависимости от активности и результативности студента.

Промежуточная аттестация

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня. Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем.

Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на экзамене. Он проводится в конце семестра.

(5) Сумма баллов, начисленных студенту в соответствии с пунктами (2)-(4), называется «баллами за работу в семестре». Она сообщается всем студентам до проведения консультации, предшествующей экзамену. Возможный максимум составляет 700 баллов.

(6) Лектор ранжирует всех студентов потока по сумме баллов за работу в семестре и на этой основе делает предварительные выводы об уровне сформированности компетенций. Уточнение оценки осуществляется на экзамене также при помощи балльной системы.

(7) Если в семестре студент не сдал необходимое количество задач из заданий, то экзамен он начинает со сдачи оставшегося (до достижения порога 90%) количества задач в течение не более 30 минут. Если студент не справляется с этим за отведенное время, то он получает оценку «неудовлетворительно».

(8) Если студент уже сдал задачи из заданий, то он вытягивает билет с тремя теоретическими вопросами и получает один час на подготовку. Билеты разделены на группы для проверки порогового, базового и продвинутого уровня усвоения компетенций. Положение студента в рейтинге из пункта (6) ограничивает выбор уровня билета.
(9) Ответы на вопросы билета оцениваются по балльной системе: 100 баллов ставится за полный и правильный ответ как на вопрос билета, так и на сопутствующие вопросы преподавателя. Всего за экзамен можно набрать не более 300 баллов, которые прибавляются к баллам за работу в семестре. Если общая сумма близка к пороговой, то преподаватель может задать дополнительные вопросы и за правильные ответы на них прибавить не более 50 баллов, притом идущая в зачёт сумма за экзамен не может превысить 300 баллов.
(10) Итоговая оценка по дисциплине «Высшая алгебра и аналитическая геометрия» выставляется на основе суммы баллов за работу в семестре и баллов, набранных на экзамене: «отлично» (уровень усвоения компетенции продвинутый) — если сумма баллов не меньше 820; «хорошо» (уровень усвоения компетенции базовый) — если сумма баллов от 670 до 820, «удовлетворительно» (уровень усвоения компетенции пороговый) - если сумма баллов от 520 до 670, «неудовлетворительно» (компетенция не сформирована) – если сумма баллов ниже 520.

Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

Индикатор	**Результат обучения по дисциплине**	**Оценочные средства**
ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	Знать определения и понятия, относящиеся к основным темам геометрии и линейной алгебры, формулировки и доказательства основных теорем; основные методы и подходы геометрии и линейной алгебры.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен в устной форме.
ОПК -1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК -1.3** Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необ-	Уметь решать типовые задачи, применять понятия и факты геометрии и линейной алгебры для решения теоретических и практических задач, самостоятельно работать над нестандартными математическими задачами.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен в устной форме.

ходимых в профессиональной деятельности.		
ОПК-1.4 Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин.	Знать основы линейной алгебры и аналитической геометрии для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен в устной форме.

10.2. Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Линейная алгебра и геометрия».

Таблица 10.2

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК 1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/ несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК 1.2 ОПК 1.3	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме

		место грубые ошибки.	Допущены негрубые ошибки.		без недочетов и ошибок.
Наличие знаний и умений	ОПК 1.4	Уровень знаний ниже минимальных требований. Не умеет решать стандартные задачи х требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Решены типовые задачи. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.

10.3. Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 15

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [2;3;5]^\top$, $\mathbf{v} = [1;1;4]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1;1;1]^\top$.

5. Точки $A(2;4;3)$, $B(1;3;2)$, $C(1;3;1)$ и $D(3;2;3)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [-1;3;2]^\top + t[2;2;1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1;1;1]^\top + u[2;3;-1]^\top + v[1;2;1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 2 (сдать к 12 ноября)
Вариант 15

1. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

2. Эллипс, гипербола или парабола задана своим каноническим уравнением. Из точки (x_0, y_0) вне этой линии к ней проведены две касательные. Найти уравнение прямой, проходящей через обе точки касания.

3. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

4. Найти формулы преобразования прямоугольных координат в пространстве, если начала двух систем различны, а концы единичных базисных векторов совпадают.

5. Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $4x^2 + 6xy - 4y^2 + x + 7y - 2 = 0$;

(b) $4x^2 + 6xy - 4y^2 + x + 7y - \frac{3}{2} = 0$.

6. Найти тригонометрическую форму записи чисел, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{29}; \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{3} + i}{-4 + 4i}}.$$

7. Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^6 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных x.

8. Применяя комплексные числа, доказать при $x \neq 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$ равенство

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

9. Доказать, что многочлен $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на многочлен x^2+x+1 при всех $m, n, p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

10*. Комплексные переменные z и w связаны соотношением $z+z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает w, когда z пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 15

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7, \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [-6;\ 1;\ -3;\ -3]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [-4;\ 1;\ -1;\ -2]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [8;\ -1;\ 5;\ 4]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [-2;\ -1;\ -2;\ -2]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [0;\ -1;\ 0;\ -1]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[-1;\ 0;\ 2;\ 1]^\top + \alpha[1;\ 2;\ 1;\ 0]^\top + \beta[-2;\ -2;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -3 & -4 & 6 \\ -7 & -2 & 14 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{23}a_{54}a_{1k}a_{71}a_{4m}a_{66}a_{32}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 4 (сдать к 30 декабря)
Вариант 15

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

4. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$ отрицательно определена?

5. Найти число классов эквивалентности над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$ квадратичных форм от n переменных.

6. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

Задание 5 (сдать до 8 марта)
Вариант 15

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2, 1, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3, 2, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1, 2, -2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1, 1, 2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [0, 2, 1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1, -1, 0]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{t - t^2, t^3, 1 + 5t + t^3, (1 + t)^3\},$$
$$\{(1 + t)^3, (1 - t)^3, t - t^2 + t^3, 1 + t + t^2 + t^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1, 1, 2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [0, 2, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2, -1, 2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1, 3, 5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2, 1, 0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [4, -1, 2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства всех симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех квадратных вещественных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ трехмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ и плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Преобразование P есть проектирование на L параллельно вектору $\mathbf{a}$. Записать формулой преобразование P, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

7*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен, и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

8*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 6 (сдать до 5 апреля)
Вариант 15

1. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -6 & 5 & -6 \\ -6 & 6 & -7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

2. Найти матричную экспоненту $\exp(At)$ для матриц

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,2,1,1]^\top, [3,1,-2,-2]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[3,8,1,5]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,-1,1,1]^\top, [1,2,3,1]^\top, [1,-4,-1,1]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах $1,\ x,\ x^2$; (b) расстояние от x^3+x^2-1 до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

9*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(At) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

10*. (1) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 13

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -2+i & 1-2i \\ -2-i & 1+2i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 8 (сдать до 7 июня)

1. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор эвклидова пространства в ему ортогональный.

2. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

3. Найти кривизну, кручение и вектор Дарбу (угловую скорость поворота сопровождающего трёхгранника) винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \text{ где } a > 0.$$

4. Центральной называют силу $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, коллинеарную радиус-вектору $\mathbf{r}$ и по абсолютной величине зависящую только от $|\mathbf{r}|$. Доказать, что под действием центральной силы точка всегда описывает плоскую траекторию.

5. Найти главные направления и главные кривизны в вершинах поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

6. Для поверхности $z = x^3 - y^3$:
(a) найти полную кривизну во всех точках и определить типы точек;
(b) найти среднюю кривизну и главные кривизны в точках линии $x = y$;
(c) найти главные направления в точке $(x, y) = (1, -1)$.

7. Параболические координаты на плоскости связаны с эвклидовыми соотношениями $x = u^2 - v^2$ и $y = 2uv$, где $-\infty < u < +\infty$ и $0 \leqslant v < +\infty$.
(a) нарисовать координатные линии;
(b) найти компоненты g_{ij} и g^{ij} ковариантного и контравариантного метрического тензора;
(c) найти символы Кристоффеля Γ^k_{ij}.

8. Описать геодезические линии на поверхности $x^2 + y^2 = z^2$.

9. (a) В каждой вершине выпуклого многогранника P сходятся n граней, и все они являются произвольными m-угольниками (не обязательно правильными). Найти количество рёбер P.
(b) Найти все правильные многогранники.

10. Фигура является сечением единичного куба плоскостью.

(a) Описать все возможные группы симметрий такой фигуры.

(b) Дать пример секущей плоскости на каждый тип симметрии.

(c) Указать типы сечений, различных по форме, но обладающих изоморфными группами симметрии.

11. Найти порядок группы вращений:

(a) правильного тетраэдра;

(b) куба;

(c) правильного додекаэдра.

12. Доказать, что множество $\mathbf{O}_n(\mathbb{Z})$ всех целочисленных ортогональных $n \times n$ матриц образует группу относительно умножения. Найти её порядок.

13. Дано множество функций

$$z \mapsto f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

где z, a, b, c, d это комплексные числа и $ad - bc \neq 0$.

(a) Доказать, что это множество образует группу относительно операции композиции функций.

(b) Каждой матрице $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ сопоставим такую функцию $f(z)$. Будет ли это отображение морфизмом групп? Найти его ядро.

14. Для многочлена f от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 положим

$$\mathrm{Sym}(f) = \left\{\sigma \in \mathbf{S}_4 \;\middle|\; f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)\right\}.$$

Доказать, что $\mathrm{Sym}(f)$ — подгруппа в $\mathbf{S}_4$. Найти $\mathrm{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4)$.

15. Во всех точках винтовой линии из задачи 3 с целочисленным значением параметра t приложены векторы (магнитные моменты молекул):

(a) $\mathbf{v}(t) = (0, 0, 1)$;

(b) $\mathbf{v}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$.

Описать группы симметрии этих систем.

16. Найти все решения уравнения $X^2 + 1 = 0$ в алгебре кватернионов.

Фамилия и имя: ______________________ Группа: __________

Аудитория: ______________ Ряд: ________ Место: __________

Потоковая контрольная работа №1

1. Точка A движется в пространстве по закону $\vec{r}(t) = (t-1, 1, t)$. Найдите в такой же форме закон движения проекции точки A на прямую, проходящую через точки $B = (1, 2, 1)$ и $C = (2, 1, -1)$.

2. Найдите в любой из упомянутых в курсе форм уравнение прямой, каждая точка которой равноудалена от трёх данных точек:

$$A = (1, -1, 2),\ B = (3, 5, 0),\ C = (-1, 3, 4).$$

3. Найдите объём призмы, основанием которой является выпуклый пятиугольник $ABCDE$, а боковым ребром отрезок AA_1, если

$$A = (3, 0, 2),\ B = (1, 2, -1),\ C = (-1, 2, 0),$$
$$D = (1, 0, 3),\ E = (3, -1, 4),\ A_1 = (5, 1, 3).$$

4. Даны точки

$$A = (2, -1, 2),\ B = (5, 0, 3),\ C = (3, -2, 3),\ D = (5, 1, 1)$$

и плоскость $x - 3y - 4z + 5 = 0$. Составьте уравнение этой плоскости в новой системе координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

5. Прямая $x + 2y + 4 = 0$ касается эллипса, фокусы которого расположены в точках $F_1 = (-1, 0),\ F_2 = (1, 0)$. Составьте каноническое уравнение этого эллипса.

Сдайте этот лист вместе с решениями. В таблице ничего не пишите.

1	2	3	4	5	Σ

Фамилия и имя: ______________________________ Группа: __________

Аудитория: ____________________ Ряд: __________ Место: __________

Потоковая контрольная работа №2

1. Найдите и нарисуйте множество значений комплексного числа z, при которых число $w = \frac{z-1}{z+1}$ является чисто мнимым.

2. Найдите базис пространства решений системы линейных уравнений $Ax = 0$ с матрицей коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Представьте вектор $\mathbf{b} = (1, 0, 0, 1)$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 3, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 0, 1)$ или покажите, что это невозможно.

4. Вычислите обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

или покажите, что это невозможно.

5. Найдите все возможные значения ранга матрицы $A + B$, если

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а ранг B равен 1. Ответ обоснуйте.

6. В определителе порядка 8 стоят нули на пересечении некоторых трёх строк и некоторых шести столбцов. Докажите, что такой определитель равен нулю.

Сдайте этот лист вместе с решениями. В таблице ничего не пишите.

1	2	3	4	5	6	Σ

Вопросы к устному экзамену
по линейной алгебре и геометрии

ФФ НГУ, январь 2020

Лектор — Ульянов Александр Петрович

Список вопросов составлен по оглавлению конспекта лекций. Некоторые вопросы в билетах сформулированы иначе; некоторые сочетают части разных вопросов из этого списка, особенно в билетах на 3. На 3 требуются только вопросы и их части, не выделенные никаким цветом (чёрные), причём только формулировки без доказательств. Выделение номера вопроса означает, что выделен весь вопрос. В билеты на 4 и на 5 входят, помимо чёрных, синие вопросы с доказательствами. Билеты на 5 также могут включать красные вопросы, но их изложение предполагается с пропусками наиболее сложных мест.

глава 1

1. **Векторы в пространстве.** Операции с векторами. Коллинеарность и компланарность. Базис и координаты. Реперы. Ориентация пространства.
2. **Скалярное произведение векторов.** Билинейность. Ортогональная проекция вектора на ось. Вычисление скалярного произведения в координатах.
3. **Смешанное произведение векторов.** Объём параллелепипеда. Ориентация репера. Выражение смешанного произведения через векторное и скалярное. Вычисление смешанного произведения в координатах.
4. **Векторное произведение векторов.** Билинейность, антисимметричность. Вычисление векторного произведения в координатах. Двойное векторное произведение, «бац минус цаб». Тождество Якоби.
5. **Определители второго и третьего порядков.** Полное раскрытие. Раскрытие по столбцу или строке. Вычищение определителя.
6. **Отложенные геометрические доказательства.** Леммы о разложении вектора. Доказательства дистрибутивностей. Доказательство формулы «бац минус цаб».
7. **Задание прямых и плоскостей общими уравнениями.** Общее уравнение прямой на плоскости. Общее уравнение плоскости в пространстве. Общее уравнение прямой в пространстве. Уравнения в отрезках.
8. **Задание прямых и плоскостей параметрическими уравнениями.** Начальные точки и направляющие векторы. Параметрическое задание прямой. Параметрическое задание плоскости.
9. **Задание прямых и плоскостей нормальными уравнениями.** Нормаль к прямой на плоскости. Нормаль к плоскости в пространстве. Нормали к прямой в пространстве.
10. **Задание прямых и плоскостей по содержащимся в них точкам.** Уравнение прямой по двум её точкам. Уравнение плоскости по трём её точкам. Уравнения по точкам через определители и ранги.
11. **Переход от одного способа задания прямой или плоскости к другому.**
12. **Взаимное расположение прямых и плоскостей.** Выяснение расположения с применением скалярного, векторного и смешанного произведений в трёх случаях: пара прямых; прямая и плоскость; пара плоскостей.
13. **Расстояние от точки до прямой и до плоскости.** Проекции и перпендикуляры. Нахождение расстояний с применением скалярного, векторного и смешанного произведений.
14. **Расстояние между прямыми и плоскостями.** Расстояние между скрещивающимися прямыми. Уравнение общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым.

глава 2

15. **Преобразования декартовых координат на плоскости.** Сдвиги, растяжения, повороты, отражения. Матричная запись преобразований. Композиция преобразований и умножение матриц.
16. **Комплексные числа.** Алгебраическая форма и арифметические операции. Геометрическое представление на комплексной плоскости. Тригонометрическая форма. Экспонента. Умножение и деление в экспоненциальной форме.
17. **Запись движений плоскости при помощи комплексных чисел.**

18. **Степени и корни.** Возведение комплексного числа в степень. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы.

19. **Многочлены от одной буквы.** Делители и корни, теорема Безу. Кратность корня. Основная теорема алгебры многочленов (без доказательства). Неприводимые многочлены. Разложение на неприводимые множители: комплексная версия; вещественная версия.

глава 3

---

20. **Эллипсы, параболы и гиперболы.** Полярные и канонические уравнения. Форма линий. Фокальные и оптические свойства.

21. **Линии второго порядка.** Общее уравнение линии второго порядка. Матричная запись общего уравнения. Канонический вид и приведение к нему. Метрическая и аффинная классификации. Уравнение касательной.

22. **Поверхности второго порядка.** Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы, цилиндры. Распадающиеся случаи. Мнимые случаи.

глава 4

---

23. **Системы линейных уравнений и их решения.** Матричная запись и терминология. Классификация по количеству решений. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования строк.

24. **Метод исключения неизвестных.** Системы ступенчатого вида. Приведение к ступенчатому виду. Общее решение системы. Ранг матрицы. Критерий совместности.

25. **Линейные пространства строк и столбцов.** Линейные комбинации. Линейная зависимость и линейная независимость. Линейная оболочка. Линейные подпространства.

26. **Базис и размерность.** Координаты вектора относительно выбранного базиса. Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Существование базиса подпространства. Размерность линейного пространства. Ранг системы векторов.

27. **Ранг матрицы.** Ранг матрицы по строкам и по столбцам. Теорема о совпадении рангов. Критерий совместности системы линейных уравнений.

28. **Общее решение системы линейных уравнений.** Однородные линейные системы, пространство решений, фундаментальная система решений. Неоднородные линейные системы, многообразие решений.

глава 5

---

29. **Различные подходы к понятию определителя.** Перестановки. Инверсии и чётность перестановки. Комбинаторная формула полного раскрытия определителя. Поведение числа инверсий (лемма).

30. **Миноры и раскрытие.** Минор и алгебраическое дополнение. Раскрытие определителя по строке или столбцу. Определитель (блочной) треугольной матрицы.

31. **Свойства определителей.** Элементарные преобразования определителей. Полилинейность и кососимметричность. Характеризация определителя этими свойствами (без доказательства). Определитель произведения матриц.

32. **Невырожденные матрицы.** Критерий невырожденности. Обратная матрица. Формулы Крамера. Ранг матрицы по минорам, эквивалентность с прежними определениями.

глава 6

---

33. **Билинейные и квадратичные формы: введение и мотивация.** Примеры однородных функций векторов. Разные виды записи. Векторное произведение как линейный оператор. Тензор моментов инерции.

34. **Билинейные формы и квадратичные формы.** Задание билинейной формы матрицей. Симметричные и кососимметричные билинейные формы. Квадратичные формы. Задание квадратичной формы симметричной матрицей.

35. **Канонический вид квадратичной формы.** Изменение матрицы формы при смене базиса. Конгруэнтность матриц и эквивалентность форм. Ранг формы. Метод Лагранжа приведения формы к каноническому виду.

36. **Вещественные квадратичные формы.** Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Индексы инерции, сигнатура. Невырожденные формы, (полу)определённые формы. Сужение на подпространство.

37. **Критерий знакоопределённости.** Главные миноры. Определение сигнатуры методом Якоби. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.

Вопросы к устному экзамену
по линейной алгебре и геометрии

ФФ НГУ, июнь 2020

Лектор — Ульянов Александр Петрович

Список вопросов составлен по оглавлению конспекта лекций. Некоторые вопросы в билетах сформулированы иначе; некоторые сочетают части разных вопросов из этого списка, особенно в билетах на 3. На 3 требуются только вопросы и их части, не выделенные никаким цветом (чёрные), причём только формулировки без доказательств. Выделение номера вопроса означает, что выделен весь вопрос. В билеты на 4 и на 5 входят, помимо чёрных, синие вопросы с доказательствами. Билеты на 5 также могут включать красные вопросы, но их изложение предполагается с пропусками наиболее сложных мест.

глава 4

1. **Системы линейных уравнений и их решения.** Матричная запись и терминология. Классификация по количеству решений. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования строк.
2. **Метод исключения неизвестных.** Системы ступенчатого вида. Приведение к ступенчатому виду. Общее решение системы. Ранг матрицы. Критерий совместности.
3. **Линейные пространства строк и столбцов.** Линейные комбинации. Линейная зависимость и линейная независимость. Линейная оболочка. Линейные подпространства.
4. **Базис и размерность.** Координаты вектора относительно выбранного базиса. Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Существование базиса подпространства. Размерность линейного пространства. Ранг системы векторов.
5. **Ранг матрицы.** Ранг матрицы по строкам и по столбцам. Теорема о совпадении рангов. Критерий совместности системы линейных уравнений.
6. **Общее решение системы линейных уравнений.** Однородные линейные системы, пространство решений, фундаментальная система решений. Неоднородные линейные системы, многообразие решений.
7. **Действия с подпространствами.** Пересечение и сумма. Формула размерностей Грассмана. Доказательство. Сумма нескольких подпространств. Прямые суммы. Размерность прямой суммы. Дополнение к подпространству. Прямая сумма как конструкция.

глава 5

8. **Различные подходы к понятию определителя.** Перестановки. Инверсии и чётность перестановки. Комбинаторная формула полного раскрытия определителя. Поведение числа инверсий (лемма без доказательства).
9. **Миноры и раскрытие.** Минор и алгебраическое дополнение. Раскрытие определителя по строке или столбцу. Определитель (блочной) треугольной матрицы.
10. **Свойства определителей.** Элементарные преобразования определителей. Полилинейность и кососимметричность. Характеризация определителя этими свойствами (без доказательства). Определитель произведения матриц.
11. **Невырожденные матрицы.** Критерий невырожденности. Формула для обратной матрицы. Правило Крамера. Ранг матрицы по минорам, эквивалентность с прежними определениями. Метод окаймляющих миноров.
12. **Полиномиальная интерполяция.** Уравнение прямой. Интерполяционный полином в форме Лагранжа. Полином Тейлора. Интерполяция Эрмита.

глава 6

13. **Билинейные и квадратичные формы: введение и мотивация.** Примеры однородных функций векторов. Разные виды записи. Векторное произведение как линейный оператор. Тензор моментов инерции.
14. **Билинейные формы и квадратичные формы.** Задание билинейной формы матрицей. Симметричные и кососимметричные билинейные формы. Квадратичные формы. Задание квадратичной формы симметричной матрицей.

15. **Канонический вид квадратичной формы.** Изменение матрицы формы при смене базиса. Конгруэнтность матриц и эквивалентность форм. Ранг формы. Метод Лагранжа приведения формы к каноническому виду.

16. **Вещественные квадратичные формы.** Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Индексы инерции, сигнатура. Невырожденные формы, (полу)определённые формы. Сужение на подпространство.

17. **Критерий знакоопределённости.** Главные миноры. Определение сигнатуры методом Якоби. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.

глава 7

---

18. **Линейные отображения.** Отображения пространств столбцов и матрицы. Выбор базиса. Изоморфизм. Матрица отображения в базисах. Смена базиса и матрица перехода. Закон изменения матрицы отображения.

19. **Структура линейного отображения.** Элементарные матрицы. Простейший вид матрицы отображения. Образ, прообраз, ядро. Отложенная структурная лемма.

20. **Линейные операторы.** Пространство линейных отображений. Ранг и дефект оператора. Примеры линейных операторов. Проекторы. Инвариантные подпространства. Диагонализуемость.

21. **Диагонализация матрицы оператора.** Собственные числа и векторы. Характеристический многочлен. Характеристические корни. Экстремумы квадратичной формы на сфере. Примеры вычислений.

22. **Диагонализация матрицы оператора.** Собственные и корневые подпространства. Сумма собственных подпространств. Кратности корня. Критерий диагонализуемости. Формулировка корневого разложения.

23. **Функции матриц.** Мотивация. Полиномы и суммы рядов. Доказательство теоремы Гамильтона — Кэли. Диагонализация и жорданова форма. Матрицы второго порядка. Формула Сильвестра. Формула Бухгейма. Вычищение определителя Вандермонда. Обращение матрицы Вандермонда.

глава 8

---

24. **Стандартное эвклидово пространство.** Ортонормированные базисы $\mathbb{R}^n$ и ортогональные матрицы. Строение маломерных ортогональных матриц. Диагонализация симметричных матриц. Метод ортогонализации Грама — Шмидта. Разложение вектора по ортонормированной системе. Ортогональное дополнение к подпространству.

25. **Унитарная триангуляция.** Стандартное эрмитово пространство. Ортонормированные базисы $\mathbb{C}^n$ и унитарные матрицы. Унитарная триангуляция Шура. Эрмитовы матрицы и спектральная теорема. Другие версии спектральной теоремы. Разложение Холецкого.

26. **Общие эвклидовы и эрмитовы пространства.** Стандартное скалярное произведение. Свойства стандартного вырастают в аксиомы общего. Матрица Грама. Неравенство Коши и углы. Объёмы и расстояния.

27. **Нормальные операторы.** Сопряжённый оператор. Спектральная теорема. Спектральные портреты. Канонические виды. Коммутирующие самосопряжённые операторы.

28. **Разложения операторов и матриц.** Эрмитово разложение оператора. Алгебраические структуры на операторах. Полярное разложение оператора. Спектральное разложение нормального оператора. Функциональное исчисление.

глава 9

---

29. **Линейная регрессия.** Центрирование данных. Линейная регрессия на плоскости. Линейная регрессия в любой размерности. Зародыш метода наименьших квадратов. Матричное представление линейной регрессии.

30. **Дисперсия, ковариация, корреляция.** Разброс данных и дисперсия. Дисперсия вдоль направления. Ковариация и корреляция. Матрица ковариаций.

31. **Сингулярное разложение.** Предварительный эллипс. Сингулярные числа. Формулировка сингулярного разложения. Структура линейного отображения. Доказательство сингулярного разложения. Сокращённое сингулярное разложение.

32. **Ранговое приближение.** Ранговое разложение и разложение Шмидта. Ранговое приближение Шмидта. Метод главных компонент. Восстановление параметров модели. Итерационный алгоритм.

33. Псевдообратная матрица. Геометрическое построение псевдообратной. Первое условие псевдообращения. Четыре условия Пенроуза. Метод наименьших квадратов. Минимизация нормы приближённого решения.

глава 10

34. Линии в пространстве. Способы задания. Естественный параметр. Сопровождающий трёхгранник. Движение сопровождающего трёхгранника. Вычисление кривизны и кручения. Особые случаи. Проекции линии на плоскости трёхгранника. Соприкасающаяся окружность. Соприкасающаяся сфера.

35. Геометрия на поверхности. Способы задания. Нормаль и касательная плоскость. Ориентируемость. Первая квадратичная форма. Длины, углы, площади. Смена параметризации.

36. Кривизна поверхности. Геодезическая и нормальная кривизны линии. Геодезические на поверхности. Вторая квадратичная форма. Оператор Родрига. Главные направления и главные кривизны. Средняя и полная кривизна поверхности. Отыскание главных направлений. Типы точек и соприкасающийся параболоид.

37. Внутренняя геометрия поверхности. Изометричность и изгибание. Индексные обозначения. Деривационные формулы. Выражение геодезической кривизны. Теорема Гаусса о полной кривизне. Оформление поверхности в пространстве.

38. Абсолютная производная и параллельный перенос. Векторные поля на поверхности. Абсолютная производная векторного поля. Дифференцирование одного векторного поля вдоль другого. Параллельный перенос на поверхности. Обнесение по контуру и кривизна. Локальная теорема Гаусса — Бонне. Минимизация площади поверхности при заданном крае. Эйлерова характеристика поверхности. Глобальная теорема Гаусса — Бонне.

глава 11

39. Примеры разных типов групп. Определение группы. Группы поворотов плоскости. Группа симметрий прямоугольника. Группа симметрий равностороннего треугольника. Группа перестановок. Конечные группы отражений и поворотов. Плоские решётки и орнаменты. Классические группы матриц. Обобщение ортогональных групп.

40. Морфизмы, действия, представления. Морфизмы групп. Действия групп. Орбиты и стабилизаторы. Действия группы на себе. Матричные представления группы. Группы кос.

41. Алгебра кватернионов. Сфера в четырёх измерениях. Правила Гамильтона. Сопряжение и норма. Чисто мнимые кватернионы. Трёхмерное представление. Вращения трёхмерного пространства. Спинорное накрытие.

42. Примеры алгебр математической физики. Поля и кольца. Алгебры и подалгебры. Классические матричные алгебры Ли. Простая трёхмерная алгебра Ли. Связь групп Ли и алгебр Ли. Группа Гейзенберга. Алгебры Вейля.

43. Алгебры Грассмана. Внешние формы. Внешняя алгебра трёхмерного пространства. Внешнее умножение. Больше миноров.

Пример экзаменационного билета:

1. **Расстояние от точки до прямой и до плоскости**. Проекции и перпендикуляры. Нахождение расстояний с применением скалярного, векторного и смешанного произведений.
2. **Метод исключения неизвестных для систем линейных уравнений**. Системы ступенчатого вида. Приведение к ступенчатому виду. Общее решение системы. Ранг матрицы. Критерий совместности системы.
3. **Вещественные квадратичные формы.** Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Индексы инерции, сигнатура. Невырожденные формы, (полу)определённые формы.

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

Лист актуализации рабочей программы
по дисциплине «Линейная алгебра и геометрия»
Направление: 03.03.02 Физика
Направленность (профиль): все профили

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного