МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет
Кафедра высшей математики ФФ

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФ, д.ф.-м.н
В.Е.Блинов
«____» ________ 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

направление подготовки: 03.03.02 Физика
Направленность (профиль): Физическая информатика

Форма обучения
Очная

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	180	32	64		60	18	4			2
Всего 180 часов / 5 зачётных единиц, из них: - контактная работа 102 часа										
Компетенции ОПК-1										

Ответственный за образовательную программу
д.ф.-м.н., проф. С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2022

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Цель учебной дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения» – дать студентам базовые знания по некоторым разделам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимым для освоения теоретических основ физических дисциплины «Основы вычислительной физики», «Физика конденсированного состояния вещества» и «Физические основы микроэлектроники», читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета (профиль подготовки «Физическая информатика»). Дисциплина нацелена на формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	**ОПК-1.1.** Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК -1.2**. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК-1.4** Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин.	**Знать** классические теоремы о существовании, единственности и устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, постановку краевых задач для них и теоремы об их разрешимости. **Уметь** решать краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. **Знать** основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, линейных уравнений и систем для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.

В результате изучения дисциплины студенты физического факультета НГУ должны освоить методы интегрирования основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений, а также постановку и теоремы о разрешимость начальных и краевых задач для них. Кроме того, у обучающихся должно сформироваться умение применять методы теории дифференциальных уравнений для решения физических задач; умение использовать базовые знания о дифференциальных уравнениях в познавательной и профессиональной деятельности; умение приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.

Для успешного освоения дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения» студенты должны обладать предварительными знаниями основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, основ функционального анализа и теории функций. В свою очередь, учебная дисциплина «Обыкновенные дифференциальные уравнения» предоставляет обучающимся теоретические знания и практические навыки, необходимые для изучения дисциплин «Основы вычислительной физики», «Физика конденсированного состояния вещества» и «Физические основы микроэлектроники».

3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.

Семестр	**Общий объем**	**Виды учебных занятий (в часах)**				**Промежуточная аттестация (в часах)**				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	180	32	64		60	18	4			2
Всего 180 часов / 5 зачётных единиц, из них: - контактная работа 102 часа										
Компетенции ОПК-1										

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, консультации, экзамен.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

- текущий контроль успеваемости: контрольные работы, задания для самостоятельного решения;

- промежуточная аттестация: экзамен.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет 5 зачетных единиц.

- занятия лекционного типа – 32 часа;
- практические занятия – 64 часа;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 60 часов;
- промежуточная аттестация (подготовка к сдаче экзамена, консультации и экзамен) – 24 часа.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, консультации, экзамен) составляет 102 часа.

4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачётных единиц, 180 академических часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)					Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы		Сам. работа во время занятий (не включая период сессии)	Сам. работа во время промежуточной аттестации		
				Лекции	Практические занятия				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	Элементы общей теории. Методы решения уравнений первого порядка. Задача Коши. Теорема Пикара.	1-3	36	6	18	12			
2	Системы линейных уравнений первого порядка. Формула Лиувилля. Матричная экспонента.	4-5	20	4	8	8			
3	Линейные уравнения n -го порядка. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.	6-7	20	4	8	8			.
4	Автономные системы. Элементы теории устойчивости. Исследование устойчивости по первому приближению.	8-10	30	6	12	12			
5.	Элементы аналитической теории линейных уравнений второго порядка.	11-12	18	4	6	8			
6.	Краевые задачи для линейных уравнений. Функция Грина. Задача Штурма – Лиувилля. Теорема Стеклова.	13-16	32	8	12	12			
8.	Промежуточная аттестация (Экзамен)		24				18	4	2
Всего			**180**	**32**	**64**	**60**	**18**	**4**	**2**

Программа и основное содержание лекций (32 часа)

Раздел 1. Элементы общей теории (6 часов)

Задача Коши для уравнений и систем первого порядка, представленных в нормальной форме. Теорема Пеано. Теорема Пикара о локальном существовании и единственности решения задачи Коши. Понятие общего решения. Теорема о существовании единственного непродолжаемого решения. Теорема о покидании компакта. Гладкость решения, зависимость решения от начальных данных и параметров.

Раздел 2. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка (4 часа)

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейных однородных систем. Линейная зависимость вектор – функций. Линейное пространство решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений и его базис. Фундаментальная матрица решений. Формула Лиувилля. Принцип суперпозиции. Метод вариации постоянных для решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных. Решение линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента и ее свойства.

Раздел 3. Линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка (4 часа)

Сведение линейного уравнения n–го порядка к системе n линейных уравнений первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Определитель Вронского. Формула Лиувилля для уравнения n–го порядка. Линейная независимость функций на интервале. Пространство решений однородного уравнения и его базис. Построение фундаментальной системы решений для уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Функции $\psi_k(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ и их свойства. Выражение матричной экспоненты через функции $\psi_k(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$. Неравенство Гельфанда — Шилова.

Раздел 4. Автономные системы. Элементы теории устойчивости (6 часов)

Фазовые траектории автономной системы и их свойства. Классификация траекторий. Классификация точек покоя автономных систем. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Критерий устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения произвольной однородной линейной системы и линейной системы с постоянными коэффициентами. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения. Теорема Четаева. Исследование устойчивости по первому приближению, матричное уравнение Ляпунова.

Раздел 5. Элементы аналитической теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка (4 часа)

Теорема существования и единственности аналитического решения задачи Коши. Решение уравнений с помощью степенных рядов. Регулярные особые точки. Построение фундаментальной системы решений в окрестности регулярной особой точки. Уравнение Лежандра и функции Лежандра. Уравнение Бесселя и функции Бесселя. Нули решений однородных линейных уравнений второго порядка. Теорема Штурма и ее следствия.

Раздел 6. Краевые задачи для линейных уравнений. Задача Штурма — Лиувилля (8 часов)

Краевые задачи для линейных дифференциальных операторов. Функция Грина краевой задачи для линейного дифференциального оператора. Теорема о существовании функции Грина в случае невырожденного оператора. Оператор Штурма — Лиувилля: симметричность, построение функции Грина в невырожденном случае. Размерность ядра оператора Штурма — Лиувилля. Структура решения и необходимое условие однозначной разрешимости в вырожденном случае. Задача Штурма – Лиувилля. Теорема о спектре оператора Штурма —

Лиувилля: вещественность, простота, полуограниченность собственных значений, ортогональность собственных функций. Теорема Стеклова. Задача Штурма — Лиувилля для линейного дифференциального уравнения второго порядка общего вида. Краевые задачи и специальные функции математической физики. Разложения в ряды Фурье — Бесселя и Фурье — Лежандра.

Программа практических занятий (64 часа)

1. Уравнения с разделяющимися переменными. Понятие решения дифференциального уравнения. Задача Коши. Общее решение.
2. Однородные уравнения.
3. Линейные уравнения первого порядка. Метод вариации постоянных. Уравнение Бернулли.
4. Физические и геометрические задачи. Составление дифференциальных уравнений.
5. Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.
6. Задачи Коши для уравнения первого порядка, нормальной системы уравнений первого порядка и уравнения высокого порядка. Теорема Пикара. Метод последовательных приближений.
7. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Введение параметра.
8. Уравнения, допускающие понижение порядка.
9. *Контрольная работа.*
10. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений.
11. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод комплексных амплитуд.
12. Уравнение Эйлера. Линейное уравнение Эйлера.
13, 14. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Фундаментальная матрица. Метод вариации постоянных. Определитель Вронского.
15. Матричная экспонента. Функции $\psi_k(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$.
16. Метод малого параметра.
17. *Контрольная работа.*
18. Траектории системы уравнений второго порядка.
19. Нелинейные системы. Первые интегралы.
20. Автономные системы и их траектории.
21. Устойчивость по Ляпунову. Исследование устойчивости положения равновесия автономной системы по первому приближению.
22. Исследование устойчивости положения равновесия автономной системы с помощью первых интегралов и функции Ляпунова.
23. *Контрольная работа.*
24. Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Формула Лиувилля.
25. Решение уравнений с помощью степенных рядов. Построение фундаментальной системы решений линейных уравнений второго порядка в окрестности регулярной особой точки
26. Теорема сравнения (Штурма). Колеблющиеся решения.
27, 28. Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Условия разрешимости. Интегральное представление решения краевой задачи. Построение функции Грина.
29. Задача Штурма — Лиувилля. Собственные значения, собственные функции и их свойства. Теорема Стеклова о разложении в ряд по собственным функциям.
30, 31. Функции Бесселя и Лежандра, их основные свойства. Разложения в ряды Фурье – Бесселя и Фурье – Лежандра.
32. *Контрольная работа.*

Самостоятельная работа студентов (78 часов)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям	32
Подготовка к контрольным работам	12
Подготовка к сдаче заданий	16
Подготовка к экзамену	18

5. Перечень учебной литературы.

1. С. К. Годунов. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: учебное пособие: [для студентов и аспирантов механико-математических, физических и физико-технических факультетов университетов]: в 2 т. / Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, Т.1: Краевые задачи. – 1994. - 263 с. (306 экз.).
2. Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник для физических и физико-математических факультетов университетов / 5-е изд. - Москва: УРСС, 2002. - 319 с. (94 экз.).
3. И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебник для студентов механико-математических специальностей университетов / под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейник. - 7-е изд., испр. - Москва: Изд-во МГУ, 1984. - 295 с. (331 экз.).
4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

5. Е. П. Волокитин, В. М. Чересиз. Интегрирующие множители и интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: учебное пособие: [для студентов вузов] /; М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. высш. математики. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2016. - 76 с. (70 экз.).
6. М. В. Коробков. Функции Ляпунова: учебное пособие: [для студентов 2 курса Физического факультета НГУ] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2008. - 46 с. (103 экз.).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

7.1 Ресурсы сети Интернет

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:
- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.2 Современные профессиональные базы данных

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

8.1 Перечень программного обеспечения

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

8.2 Информационные справочные системы

Не используются.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для реализации дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения» используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.
2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.1 Порядок проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине

Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости студента предусматривает наличие следующих форм контроля, в ходе которых обучающиеся набирают баллы, учитываемые затем при проведении промежуточной аттестации:

1) сдача преподавателю задач из четырех месячных заданий (заданий для самостоятельного решения) с 1 по 16 недели семестра (термин «сдать задачу» означает объяснение хода её решения и при необходимости ответы на дополнительные вопросы преподавателя);
2) выполнение четырех контрольных работ;
3) максимальное количество баллов за месячное задание, сданное в срок, равно 50 баллам, за контрольную работу – 50 баллов. Таким образом, обучающийся может получить до 100 баллов по каждой теме, что в сумме составляет до 400 баллов за семестр.

Примеры заданий и контрольных работ приведены в п. 10.3.

Промежуточная аттестация

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня. Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем.

Промежуточная аттестация по итогам семестра проводится в форме устного экзамена. При промежуточной аттестации учитываются итоги текущего контроля успеваемости: баллы, набранные на экзамене, суммируются с баллами, полученными за работу в семестре.

Билет содержит два теоретических вопроса. На подготовку ответа по билету отводится 60 минут. При подготовке ответа не разрешается использовать литературу и другие вспомогательные средства, а также общаться с другими студентами.

Ответ на каждый из теоретических вопросов оценивается по следующим критериям:

– если обучающийся правильно сформулировал все определения и теоремы из вопроса билета, привёл доказательство теоремы из вопроса билета, обосновал преобразования, ссылаясь на соответствующие теоремы, и в процессе беседы с преподавателем свободно отвечает на сопутствующие дополнительные вопросы по теме билета, ему начисляется 100 баллов за один вопрос;

– если обучающийся правильно сформулировал все определения и теоремы из вопроса билета, привёл доказательство теоремы, но в доказательстве имеются недочеты (пропущены преобразования, не даны ссылки на теоремы и свойства) или студент затрудняется при ответе на дополнительные вопросы по обсуждаемой теме, ему начисляется 50 баллов за вопрос;

– если обучающийся правильно сформулировал все определения и теоремы из вопроса билета и сопутствующих дополнительных вопросов, но не привёл доказательство теоремы из вопроса билета, ему начисляется 10 баллов;

– если обучающийся не сформулировал определение или теорему из билета или дополнительного вопроса, ему ставится оценка «неудовлетворительно» (компетенция ОПК-1 не сформирована).

При успешном прохождении промежуточной аттестации обучающийся может набрать до 600 баллов, которые конвертируются в оценку следующим образом:

оценка «удовлетворительно» (пороговый уровень освоения компетенции ОПК-1)– от 300 до 399 баллов

оценка «хорошо» (базовый уровень освоения компетенции ОПК-1) – от 400 до 499 баллов

оценка «отлично» (продвинутый уровень освоения компетенции ОПК-1) – от 500 до 600 баллов

Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

Индикатор	**Результат обучения по дисциплине**	**Оценочные средства**
ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	Знать классические теоремы о существовании, единственности и устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, постановку краевых задач для них и теоремы об их разрешимости.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен в устной форме.
ОПК -1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	Уметь решать краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен в устной форме.
ОПК-1.4 Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин.	Знать основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, линейных уравнений и систем для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен в устной форме.

10.2. Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Таблица 10.2

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК 1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/раздел	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины.

		грубые ошибки.	ам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Допускается несколько негрубых/ несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК 1.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.
Наличие знаний и умений	ОПК 1.4	Уровень знаний ниже минимальных требований. Не умеет решать стандартные задачи х требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Решены типовые задачи. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.

10.3. Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Задания для самостоятельного решения

Задание 1

1. Решите указанные ниже уравнения первого порядка. Получите формулу общего решения. Для каждого уравнения укажите области, в которых выполнены условия теоремы существования и единственности.

$(а)$ $xy'(\ln y - \ln x) = y$; $(б)$ $yy' + y^2x = \cos x$;

$(в)$ $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}$; $(г)$ $2x^2y' = y^2(2xy' - y)$.

Для уравнений *(б)* и *(г)* нарисуйте семейства интегральных кривых.

2. Решите уравнение $y' = \frac{-\beta x + \alpha y}{\alpha x + \beta y}$, переходя к полярным координатам (ϱ, φ).

Нарисуйте семейство интегральных линий. Выясните, имеет ли уравнение особые решения.

3. Докажите, что уравнение $y' = ky + f(x)$, где $k \in \mathbb{R}$, а $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, имеет одно частное периодическое решение с тем же периодом. Найдите это решение.

4. Решите уравнение $(2x^3+4x^2y+2xy^2+y^2)dx+(2x^2y+4xy^2+2y^3+x^2)dy=0$, найдя для него интегрирующий множитель вида $\mu(x+y)$.

5. Вводя подходящий параметр, решите уравнения, не разрешенные относительно производной:

$(a)\ x+yy'=y^2(1+y'^2)$; $(б)\ 2xy'-y=y'\ln(yy')$.

6. Используя параметрическое представление функции, найдите решение задачи Коши

$(y''')^2-x^2=1, \qquad y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

7. Найдите решение $x=x(t)$ уравнения $m\ddot{x}=f(\dot{x})$, удовлетворяющее условиям $x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=v_0$. Рассмотрите отдельно случай, когда $f(v_0)=0$.

Задание 2

1. Найдите общие решения неоднородных линейных уравнений и систем, используя метод вариации постоянных или метод комплексных амплитуд:

$(a)\ \dddot{x}-3\dot{x}+2x=e^t+\sin 2t$;

$$(б)\ \begin{cases}\dot{x}=-4x-2y+\frac{2}{e^t-1},\\ \dot{y}=6x+3y-\frac{3}{e^t-1}.\end{cases}$$

2. A означает квадратную матрицу порядка n, E означает единичную матрицу того же размера.

(а) Найдите «конечную» формулу для e^{At}, если $A^3=A$.

(б) Найдите решение $Y=Y(t)$ матричной задачи Коши:

$\ddot{Y}=A^2Y, \qquad Y(0)=0, \quad \dot{Y}(0)=E.$

3. Рассмотрим в трехмерном пространстве линейный оператор A, вектор Y_0 и вектор-функцию $F(t)$, заданные матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\2&2&1\end{pmatrix}, \qquad Y_0=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad F(t)=\begin{pmatrix}1\\0\\e^t\end{pmatrix}.$$

Найдите фундаментальную матрицу системы $\dot{Y}=AY$. Напишите общее решение системы. Решите задачу Коши с начальным условием $Y(0)=Y_0$ для неоднородной системы $\dot{Y}=AY+F(t)$.

4. Постройте фазовый портрет динамической системы:

$$\begin{cases}\dot{x}=2(x-1)(y-2),\\ \dot{y}=y^2-x^2.\end{cases}$$

5. Найдите первые интегралы и решите системы уравнений:

$$(a)\ \frac{dx}{x(y^2-z^2)}=-\frac{dy}{y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}; \qquad (б)\ \begin{cases}\dot{x}=-x^2,\\ \dot{y}=xy-2z^2,\\ \dot{z}=xz.\end{cases}$$

6. Пусть функции $x=x(t,x_0,y_0)$ и $y=y(t,x_0,y_0)$ удовлетворяют уравнениям

$\begin{cases}\dot{x}=xy+t^2,\\ 2\dot{y}=-y^2\end{cases}$ и условиям $x(1)=x_0,\ y(1)=y_0$. Найдите производную $\frac{\partial x}{\partial y_0}$ при $x_0=3,\ y_0=2$.

Задание 3

1. Исследуйте на устойчивость:

(а) решение задачи Коши $2t\dot{x}=t-x,\ x(1)=1$;

(б) решение задачи Коши для системы

$$\begin{cases}\dot{x}=-3x+2y+2z+1, & x(0)=0,\\ \dot{y}=-3x-y+z+\sin t, & y(0)=1\\ \dot{z}=-x+2y, & z(0)=-1;\end{cases}$$

(в) периодическое решение уравнения $\dddot{x} - x = \cos t$

2. Исследуйте на устойчивость нулевые решения систем:

$$(a)\ \begin{cases} \dot{x} = -x + e^{2t}y, \\ \dot{y} = -2y; \end{cases} \qquad (б)\ \begin{cases} \dot{x} = ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}. \end{cases}$$

$$(в)\ \begin{cases} \dot{x} = y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3; \end{cases}$$

3. Решите линейные уравнения с переменными коэффициентами:
$(а)$ $(x^2 - 1)y'' + (x - 3)y' - y = 0;$
$(б)$ $x^2(1 - x^2)y'' + 2(x - x^3)y' - 2y = 0;$
$(в)$ $x^2y'' - 2y = x\,sin\,x.$

4. Дифференциальный оператор действует по правилу $L[y] = y'' + \lambda^2 y$ на дважды гладкую функцию $y = y(x)$ на отрезке $0 \le x \le \pi$. Ограничивая область определения оператора L краевыми условиями $y(0) = y'(\pi) = 0$, выясните, при каких значениях параметра λ для него существует функция Грина, и найдите ее.

5. (а) Выясните, при каких значениях α краевая задача
$xy'' - y' = f(x), \quad \alpha y(1) + y'(1) = 0, \quad y(2) = 0$ разрешима не для любой непрерывной функции $f(x)$, и в каждом таком случае укажите условие разрешимости.
(б) Найдите все значения параметра λ, при которых задача
$y'' + \lambda^2 y = 1, \quad y(0) = y'(\pi) = 0$ не имеет решения (сравните с задачей 4).

6. Пусть $L[y] = y''$. Найдите полную систему собственных функций задачи Штурма — Лиувилля $L[y] = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$ Сформулируйте теорему Стеклова для данного случая. Как связано разложение по собственным функциям этой задачи с рядами Фурье?

7. Найдите собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для дифференциального оператора: $x^2y'' = \lambda y, \quad y(1) = y(a) = 0 \quad (a > 1).$
Сформулируйте условие ортогональности собственных функций. Напишите коэффициенты разложения функции в ряд по собственным функциям.

Задание 4

1. Укажите особые точки уравнения в комплексной плоскости
$$(z^2+1)\frac{d^2w}{dz^2} + 5z\frac{dw}{dz} + 3w = 0.$$
Найдите фундаментальную систему решений этого уравнения, состоящую из функций, аналитических в области $|z| < 1$. Покажите, что уравнение имеет решение вида
$$w = \frac{1}{z^3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z^5} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{z^7} + \cdots$$
Продолжите этот ряд и выясните, при каких z он сходится.

2. Укажите особые точки уравнения в комплексной плоскости z
$$9z^2\frac{d^2w}{dz^2} - (z^2 - 2)w = 0.$$
Найдите решения этого уравнения, выражающиеся обобщенными степенными рядами.

3. Цилиндрические функции Бесселя $J_n(x)$ с целым значком n можно определить как коэффициенты в разложении производящей функции:

$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} t^n J_n(x).$

Опираясь на это определение, докажите формулы:

$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x);\quad \frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^{n-1} J_{n-1}(x);\quad \frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n-1} J_{n+1}(x).$

Замечание. Последние два соотношения распространяются на функции Бесселя $J_\nu(x)$ с произвольным значком ν.

4. Опираясь на теорему Стеклова, сформулируйте теорему о разложении функции в ряд Фурье — Бесселя. Получите формулы для вычисления коэффициентов ряда

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\lambda_k x),$

где λ_k означают корни уравнения $J_0(x) = 0$. Получите аналогичные формулы в случае, когда в качестве λ_k берутся корни уравнения $J'_0(x) = 0$.

5. Сравнивая ненулевое решение z уравнения $z'' + \left(1 - \frac{4n^2-1}{4x^2}\right) z = 0$ с решением уравнения $y'' + y = 0$ или $y'' + (1+\varepsilon)y = 0$, покажите, что при $0 \le 2n \le 1$ расстояние между соседними нулями функции z, оставаясь меньшим π, становится как угодно близким к π, если корни достаточно большие. Исследуйте расположение нулей функции z при $2n > 1$.

6. Покажите, что при неограниченном возрастании x последовательные нули всякого нетривиального решения уравнения $y'' + xy = 0$ неограниченно сближаются.

Образцы контрольных работ.

Контрольная работа №1

Решить уравнения:

1. $y' = y^3 \sin x + y\, tg\, x$
2. $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x\, dy = 0$
3. $(xy' - y)^2 = x^2 y^2 - x^4$

Решить задачи:

4. Найти время за которое вода вытечет из цилиндрического бака через отверстие в дне, если треть воды из полного бака вытекает за 7 минут.
5. В баке находится 50 л раствора, содержащего 5 кг соли. В бак втекает 1 л воды в минуту. Смесь перетекает с такой же скоростью в второй 50 л бак, заполненный вначале чистой водой. Избыток жидкости выливается. Когда количество соли во втором баке будет наибольшим?

Контрольная работа №2

Решить уравнения:

1. $y'' y' + y y'^2 = y'^2$
2. $y'' - 5y' + 2y = x^2 + \cos x$
3. $x^2 y'' + x y' = \ln x$

Решить системы:

4. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2x + \ln t \\ \dot{y} = 7x + 5y + \cos t \end{cases}$

5. $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Список вопросов для проведения промежуточной аттестации по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Общая схема доказательства. Построение последовательных приближений. Единственность решения.
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Общая схема доказательства. Равномерная сходимость последовательных приближений к решению задачи.
3. Фундаментальные матрицы и их свойства. Формула Лиувилля. Критерий линейной независимости решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
4. Структура общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Неоднородные системы, метод вариации, принцип суперпозиции.
5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента и ее свойства.
6. Теорема существования и единственности задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Матрица Вронского и ее свойства.
7. Структура общего решения однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Решение неоднородного уравнения: метод вариации, принцип суперпозиции.
8. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение ФСР. Построение специальной фундаментальной системы решений, функции ψ_kи их свойства.
9. Выражение матричной экспоненты через функции ψ_k. Неравенство Гельфанда-Шилова.
10. Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения первого порядка от параметров.
11. Автономные системы. Траектории и их свойства.
12. Классификация траекторий автономных систем. Классификация точек покоя автономных систем на плоскости в случае линейных однородных систем с постоянными коэффициентами.
13. Понятие устойчивости и асимптотической устойчивости. Сведение вопроса об устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения.
14. Критерии устойчивости и асимптотической нулевого решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений.
15. Критерий устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
16. Теорема Ляпунова об устойчивости нулевого решения.
17. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевого решения.
18. Теорема об устойчивости по первому приближению. Случай асимптотической устойчивости.

19. Теорема об устойчивости по первому приближению. Случай неустойчивости.
20. Функция Грина линейного дифференциального оператора n-го порядка. Теоремы о существовании функции Грина и решении краевых задач в случае невырожденного оператора.
21. Оператор Штурма-Лиувилля: симметричность, построение функции Грина в невырожденном случае.
22. Размерность ядра оператора Штурма-Лиувилля. Необходимое условие разрешимости краевой задачи. Структура решений краевой задачи.
23. Задача Штурма-Лиувилля. Теорема о спектре оператора Штурма-Лиувилля (вещественность, простота, полуограниченность собственных значений). Теорема Гильберта-Шмидта.
24. Задача Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова.
25. Задача Штурма-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения второго порядка общего вида.
26. Линейные однородные уравнения второго порядка с аналитическими коэффициентами. Понятие обыкновенной и особой точки. Представление решения в виде степенного ряда в окрестности обыкновенной точки.
27. Понятие регулярной особой точки линейного однородного уравнения второго порядка. Определяющее уравнение. Построение ФСР уравнения в окрестности регулярной особой точки в случае, когда разность корней определяющего уравнения – целое число.

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

Лист актуализации фонда оценочных средств
по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения»
направление подготовки: 03.03.02 Физика
Направленность (профиль): Физическая информатика

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного