МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет
Кафедра высшей математики ФФ

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФ, д.ф.-м.н
________ В.Е.Блинов
«16» 08 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

направление подготовки: **03.03.02 Физика**
направленность (профиль): **Общая и фундаментальная физика**

Форма обучения
Очная

Семестр	**Общий объем**	**Виды учебных занятий (в часах)**				**Промежуточная аттестация (в часах)**				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	126	32	32		38	18	4			2
4	162	32	32		74	18	4			2
Итого	**288**	**64**	**64**		**112**	**36**	**8**			**4**
Всего 288 часов / 8 зачётных единиц, из них: - контактная работа 140 часов										
Компетенции ОПК-1										

Ответственный за образовательную программу,

д.ф.-м.н., проф. С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2022

Содержание

1. **Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.**

Курс «Дифференциальные уравнения» имеет своей целью дать набор необходимых сведений в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационного исчисления и научить владению математическим аппаратом этой теории для освоения теоретических основ и практического использования физических методов, в частности, для решения задач аналитической механики и квантовой теории.

Учебный курс «Дифференциальные уравнения» читается классическим способом: проводятся потоковые лекции, а также практические занятия по группам, в каждой из которых не более 15-и студентов. Все практические занятия проводятся в интерактивной форме. Преподаватели ориентируют студентов на то, что для хорошего усвоения материала они должны еженедельно отводить на самостоятельную работу столько же времени, сколько они проводят в аудиториях на лекциях и практических занятиях.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 -Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности.	**ОПК-1.1**. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК -1.2**. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественно-научных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК -1.3** Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необходимых в профессиональной деятельности.	**Знать** базовые определения и теоремы о дифференциальных уравнениях. **Уметь** решать конкретные обыкновенные дифференциальные уравнения, а также краевые и начальные задачи для них. **Владеть** общими принципами применения обыкновенных дифференциальных уравнений в фундаментальных разделах физики.

2. **Место дисциплины в структуре образовательной программы.**

В результате прохождения курса у студентов второго курса физического факультета должно сформироваться представление о том, что многие физические (а также геометрические, экономические и т. д.) закономерности описываются на языке дифференциальных уравнений, например, колебание маятника, явление атомного распада, закона геометрической оптики, экологические закономерности, связанные с численностью вида, и другие. Таким образом, со времен Ньютона теория дифференциальных уравнений является математическим фундаментом теоретической физики. Необходимыми предпосылками для успешного освоения курса являются следующие в цикле математических дисциплин: знание основ линейной алгебры, геометрии, математического анализа, и, частично, функционального анализа. Необходимость владения указанными математическими дисциплинами обусловлена тем обстоятельством, что они активно используются при изучении дифференциальных уравнений.

3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	126	32	32		38	18	4			2
4	162	32	32		74	18	4			2
Итого	**288**	**64**	**64**		**112**	**36**	**8**			**4**
Всего 288 часов / 8 зачётных единиц, из них: - контактная работа 140 часов										
Компетенции ОПК-1										

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, консультации, экзамен.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

- текущий контроль успеваемости: контрольные работы, задания для самостоятельного решения;
- промежуточная аттестация: экзамен.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет 8 зачетных единиц.

- занятия лекционного типа – 64 часа;
- практические занятия – 64 часа;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 112 часов;
- промежуточная аттестация (подготовка к сдаче экзамена, консультации и экзамен) – 48 часов.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, консультации, экзамен) составляет 140 часов.

4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачётных единиц, 288 академических часов.

Третий семестр

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)					Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы		Сам. работа во время занятий (не включая период сессии	Сам. работа во время промежуточной аттестации		
				Лекции	Практические занятия				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	Уравнения первого порядка	1-7	42	14	14	14			
2	Системы дифференциальных уравнений и уравнения высокого порядка	8	8	2	2	4			
3	Общая теория линейных систем	9	8	2	2	4			.
4	Линейные системы с постоянными коэффициентами	10	8	2	2	4			
5.	Линейные уравнения высокого порядка	11,12	14	4	4	6			
6.	Краевые задачи	13-16	22	8	8	6			
7.	Самостоятельная работа в период подготовки к промежуточной аттестации		18				18		
8.	Экзамен		6					4	2
Всего			**126**	**32**	**32**	**38**	**18**	**4**	**2**

Четвёртый семестр

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)					Консуль-тации перед экзаменом (часов)	Промежу-точная аттеста-ция (в часах)
			Всего	Аудиторные часы		Сам. работа во время занятий (не включая период сессии	Сам. работа во время промежу точной аттестаци и		
				Лек-ции	Прак-тиче-ские заня-тия				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	Вариационное исчисление	1-4	32	8	8	16			
2	Малые колебания и периодические решения	5, 6	18	4	4	10			
3	Зависимость решений от начальных данных и параметров	7	14	2	2	10			.
4	Введение в теорию устойчивости	8-12	36	10	10	16			
5.	Фазовые траектории автономных систем	13	14	2	2	10			
6.	Первые интегралы и линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка	14-16	24	6	6	12			
7.	Самостоятельная работа в период подготовки к промежуточной аттестации		18				18		
8.	Экзамен		6					4	2
Всего			**162**	**32**	**32**	**74**	**18**	**4**	**2**

Программа и основное содержание лекций (64 часа)

Семестр III (32 часа)

1. Уравнения первого порядка (14 часов)

Уравнение $y'=f(x,y)$. Определение решения. Непродолжаемое решение. Задача Коши. Теорема Пеано существования решения. Теорема Пикара существования и единственности решения. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения и его решений. Поле направлений, порождаемое дифференциальным уравнением, изоклины. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородные и обобщённо-однородные уравнения. Линейное уравнение. Принцип суперпозиции. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Уравнение в симметричной форме: поле направлений на плоскости, интегральные линии, связь с решениями дифференциального уравнения. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель и уравнение в частных производных для него. Доказательство теоремы Пикара для уравнения первого порядка. Теорема о покидании компакта. Поведение непродолжаемых решений в «вертикальной полосе». Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

2. Системы дифференциальных уравнений и уравнения высокого порядка (2 часа)

Нормальные системы. Запись системы в векторной форме. Поведение непродолжаемых решений. Теорема Уинтнера. Уравнение $y^{(n)}=f(t,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$, сведение к системе, постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности.

3. Общая теория линейных систем (2 часа)

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы $\dot{X} = AX + B(t)$. Принцип суперпозиции, связь решений неоднородной и однородной системы. Линейность пространства всех непродолжаемых решений однородной системы $\dot{X} = AX$. Определитель Вронского, его связь с линейной зависимостью решений. Формула Лиувилля - Остроградского. Размерность пространства решений однородной системы. Фундаментальные системы решений (ФСР). Фундаментальные матрицы и их свойства. Построение частного решения методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

4. Линейные системы с постоянными коэффициентами (2 часа)

Построение ФСР для системы $\dot{X} = AX$ с постоянными коэффициентами при помощи базиса Жордана матрицы А. Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Комплексные линейные системы, сведение к действительным системам.

5. Линейные уравнения высокого порядка (4 часа)

Линейное уравнение n-го порядка, сведение к линейной системе. Теория линейного уравнения n-го порядка как следствие теории линейных систем. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, построение ФСР. Частное решение в случае квазиполиномиальной неоднородности. Метод вариации для отысканий частных решений.

5. Краевые задачи (8 часов)

Понятие краевой задачи. Теорема об однозначной разрешимости краевой задачи. Структура решений в случае неоднозначной разрешимости. Сведение к задаче с однородными краевыми условиями и ее решение. Функция Грина краевой задачи.
Собственные числа и собственные функции задачи Штурма - Лиувилля: существование вещественных собственных значений; размерность пространства собственных функций; ортогональность (с весом) собственных функций; односторонняя ограниченность спектра. Разложение в ряд по собственным функциям краевой задачи. Эквивалентность краевой задачи интегральному уравнению с непрерывным симметричным ядром.

Семестр IV (32 часа)

7. Вариационное исчисление (8 часов)

Примеры задач классического вариационного исчисления: о брахистохроне, о поверхности вращения наименьшей площади, о геодезических на сфере. Функционал и его вариация. Простейшая задача вариационного исчисления. Экстремали и экстремумы. Необходимое условие локального экстремума. Лемма Лагранжа. Уравнение Эйлера. Вариационные задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера. Решение задач о брахистохроне и о поверхности вращения наименьшей площади. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями. Вариационная задача с высшими производными. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными. Простейшая изопериметрическая задача. Достаточное условие локального экстремума.

8. Малые колебания и периодические решения (4 часа)

Малые колебания систем со многими степенями свободы; векторы нормальных колебаний. Ортогнальность векторов нормальных колебаний. Периодические решения линейных систем и уравнений высокого порядка. Нахождение периодических решений с помощью рядов Фурье, резонансный и нерезонансный случаи, биение.

9. Зависимость решений от начальных данных и параметров (2 часа)

Класс гладкости решения, соответствующий гладкости правой части системы. Непрерывная зависимость решений системы от начальных данных и параметров. Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам. Уравнения в вариациях и постановка задачи Коши для производных решения по начальным данным и по параметрам. Применение теории гладкой зависимости решений - метод малого параметра для отыскания периодических решений нелинейных уравнений. Разложение периодического решения в асимптотический ряд по малому параметру.

10. Введение в теорию устойчивости (10 часов)

Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, неустойчивость. Примеры. Сведение к исследованию на устойчивость нулевого решения. Общие теоремы об устойчивости линейных систем: эквивалентность устойчивости по Ляпунову ограниченности каждого решения, а асимптотической устойчивости - притяжению всех решений к нулевому решению. Устойчивость линейной системы с постоянными коэффициентами в терминах спектра и жордановой структуры матрицы коэффициентов. Идея метода функций Ляпунова. Производная в силу системы; примеры. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости в терминах функций

Ляпунова. Теорема Четаева о неустойчивости. Квадратичная функция Ляпунова для системы $\dot{X} = AX$. Устойчивость по первому приближению положения равновесия автономной системы.

11. Фазовые траектории автономных систем (2 часа)

Основные свойства решений автономных систем. Фазовое пространство, траектории. Три типа траекторий автономных систем. Классификация фазовых портретов линейных систем на плоскости: седло, узел, вырожденный узел, центр, фокус. Линеаризация нелинейных систем в окрестности положения равновесия - сохранение типов грубых особых точек. Устойчивые, неустойчивые, полуустойчивые предельные циклы.

12. Первые интегралы и линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка (6 часов)

Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Связь первого интеграла с решением линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Теорема о числе независимых первых интегралов. Применение первых интегралов для понижения порядка системы уравнений. Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Квазилинейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Программа практических занятий (64 часа)

<u>1 семестр</u>

1 и 2 занятия. — Поле направлений, изоклины, задача Коши.
3 занятие. — Уравнения с разделяющимися переменными.
4-занятие. — Однородное уравнение.
5 и 6 занятия. — Линейное уравнение, уравнение Бернулли, уравнение Риккати.
7 занятие. — Уравнение в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.
8, 9, 10 занятия. — Постановка задачи Коши. Существование и единственность решения. Использование теоремы Пикара. Уравнения, допускающие понижение порядка
11 занятие. — Линейные системы с постоянными коэффициентами, матричная экспонента. *12-й*
12 занятие. — Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, однородные и неоднородные. Уравнение Эйлера.
13 занятие. — Линейные уравнения с переменными коэффициентами, формула Остроградского - Лиувилля.
14 занятие. — Прямое решение краевых задач, регулярных и сингулярных.
15 занятие. — Построение функции Грина и решение с ее помощью краевых задач
16 занятие. — Собственные значения и собственные функции краевых задач.

<u>2 семестр</u>

1 занятие. — Простейшая задача вариационного исчисления. Задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера.
2 занятие. — Общие Вариационные задачи: с несколькими функциями, несколькими независимыми переменными.
3 занятие. — Изопериметрические задачи. Применение принципа Гамильтона - Остроградского
4 занятие. — Малые колебания систем.
5 занятие. — Периодические решения линейного уравнения; ряды Фурье.

6 занятие. — Дифференцируемость по начальным данным и параметрам; уравнения в вариациях.
7 занятие. — Метод малого параметра для периодических решений в теории нелинейных колебаний.
8 занятие. — Понятие устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости, неустойчивости. Исследование устойчивости путем прямого анализа решений уравнений и систем как функций начальных данных.
9 и 10 занятие. — Устойчивость линейных систем и уравнений. Устойчивость в терминах спектра матрицы системы. Исследование устойчивости с помощью теоремы об устойчивости по первому приближению.
11 занятие. — Исследование устойчивости и неустойчивости с помощью функций Ляпунова и Четаева, физические задачи.
12 занятие. — Линейные системы. Линеаризация положения равновесия нелинейных автономных систем. Локальный фазовый портрет в окрестности положения равновесия. Соединение в глобальный фазовый портрет с помощью изоклин.
13 занятие. — Исследование предельных циклов.
14 занятие. — Нахождение первых интегралов и их применение для решения автономных систем
15 занятие. — Решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.
16 занятие. — Решение квазилинейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.

Самостоятельная работа студентов (112 часов)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям.	19
Изучение теоретического материала, не освещаемого на лекциях	19
Подготовка к контрольным работам	19
Подготовка к сдаче заданий	19
Подготовка к экзамену	36

5. Перечень учебной литературы.

5.1. Основная литература

1. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: [учебник для механико-математических специальностей университетов]; под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейник.— 7-е изд., испр. — Москва : Изд-во МГУ, 1984 .— 295 с. : ил. ; 21 см., 14 700 экз.
2. Александров В. А., Егоров А. А. Вариационное исчисление: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2000.

5.2. Дополнительная литература

3. . Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник для физических специальностей университетов. — Изд. 2-е, стер.— Москва : Наука, 1969 .— 424 с.
4. Коробков М. В. Функции Ляпунова: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2008.

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

5. В. А. Александров, А. А. Егоров, Вариационное исчисление, НГУ, 2000.
6. М. В. Коробков, Функции Ляпунова, НГУ, 2008.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:
- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.1 Современные профессиональные базы данных

Не используются.

7.2. Информационные справочные системы

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.

2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.1 Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Текущий контроль

(1) В течение каждого семестра студент обязан сдать своему семинаристу в устной форме все задачи из заданий.

(2) Во время каждого семестра проводится по две контрольные. Те задачи, которые решены на минус/плюс либо меньше, сдаются в устной форме своему семинаристу.

(3) Приём задач в первом семестре прекращается 30 декабря 2020 года, во втором –30-го мая 2021 года.

Промежуточная аттестация

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня. Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем.

Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на экзамене. Он проводится в конце семестра.

(4) Студент может сдавать экзамен только в тот день и только в той аудитории, которые указаны в расписании экзаменов для его группы.

(5) Экзаменационный билет содержат три вопроса. Первый вопрос одинаков во всех билетах и выглядит так: «Сдача задач из заданий». Второй – теоретический вопрос из программы дисциплины, третий – задача. Список вопросов, выносимых на экзамен, выкладывается на сайт кафедры http://www.phys.nsu.ru/ok03/exam.html и/или http://www.phys.nsu.ru/.

(6) Если студент не сдал какие-то задачи из п.1 и п.2, то, вытянув экзаменационный билет, он должен без подготовки начать отвечать на первый вопрос билета «Сдача задач из заданий».

(7) Ответ на первый вопрос не может длиться более 30 минут. При этом студент может пользоваться своей тетрадью, в которой он решил задачи из п.1 и п.2, решения которых он не сумел рассказать во время семестра. Если за это время студент объяснил решения всех своих долгов по заданиям, то он получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам. Если за это время студент не сумел объяснить решения всех своих долгов по заданиям, то экзамен прекращается, студент отправляется на пересдачу, а в экзаменационную ведомость выставляется оценка "неудовлетворительно".

(8) Если студент уже сдал все задачи из заданий, то вытянув билет, он пропускает первый вопрос «Сдача задач из заданий» и получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам билета.

(9) При подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета запрещается пользоваться какой-либо литературой, конспектами, шпаргалками, мобильными телефонами, планшетами, ноутбуками и т.п., а также подсказками товарищей. Нарушающие это правило будут удалены с экзамена.

(10) Выходить из аудитории до начала ответа на билет нельзя.

(11) Для получения оценки «удовлетворительно» необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе.
Для получения оценки «хорошо» необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Предъявить доказательства теорем, возможно с некоторыми недочётами.
Для получения оценки «отлично» необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Предъявить полное со всеми выкладками доказательство теорем.
(12) По усмотрению экзаменатора могут быть заданы дополнительные вопросы и задачи.
(13) Также имеется список вопросов (выкладывается на сайт кафедры http://www.phys.nsu.ru/ok03/exam.html и/или http://www.phys.nsu.ru/balakina в начале семестра), знать ответы, на которые необходимо для получения положительной оценки. Это ключевые вопросы дисциплины, не знание ответа на которые сразу предполагает «неудовлетворительно», вне зависимости от того, насколько хорошо даны ответы на вопросы из билета.
(14) Студенты, написавшие обе контрольные на пятёрки, получают «плюс балл» на экзамене (исключением является повышение на повторной промежуточной аттестации и с «неудовлетворительно»).

Проведение повторной промежуточной аттестации
(15) Повторная промежуточная аттестация проводится по тем же правилам и тем же вопросам, что и основной экзамен.

Особые ситуации
(16) При необходимости и наличии уважительной причины семинарист может продлить срок приёма заданий как всей группе, так и отдельному студенту.
(17) Конфликтные и спорные ситуации, возникающие между студентом и семинаристом, урегулирует лектор. Это касается и работы в семестре, и сдачи задач, и сдачи экзамена.

Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

Индикатор	**Результат обучения по дисциплине**	**Оценочные средства**
ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	**Знать** базовые определения и теоремы о дифференциальных уравнениях.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме, экзамен.
ОПК -1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	**Уметь** решать конкретные обыкновенные дифференциальные уравнения, а также краевые и начальные задачи для них.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме, экзамен.

ОПК -1.3 Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необходимых в профессиональной деятельности.	**Владеть** общими принципами применения обыкновенных дифференциальных уравнений в фундаментальных разделах физики..	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме, экзамен.

10.2 Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Дифференциальные уравнения».

Таблица 10.2

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК 1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/ несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК 1.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.
Наличие навыков (владение опытом)	ОПК 1.3	Отсутствие владения материалом по темам/разделам дисциплины. Нет навыков в решении стандартных задач. Наличие грубых ошибок.	Имеется минимальный набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.	Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.	Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач без ошибок и недочетов. Продемонстрированы знания по решению нестандартных задач.

10.3 Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Задачи для сдачи в первом семестре

1. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{3y^2}{x}.$$

С помощью изоклин построить картину решений, найти области возрастания и убывания. Исследовать выпуклость решений, найти линию перегиба.

2. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{y^2 - xy}{x^2}.$$

С помощью изоклин построить картину решений. Указать, какой тип симметрии имеет картина решений. Найти области возрастания и убывания. Изобразить прямолинейные интегральные кривые. Исследовать выпуклость решений, найти линии перегиба. Сколько интегральных кривых проходит через точку (x_0, y_0), если $x_0 \neq 0$?

3. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{4x + y + 7}{x - y + 3}.$$

4. Для уравнения

$$y' = 4y\sin^2 x - \sin 2x$$

доказать утверждения:

а) существует решение $y^*(x)$, $-\infty < x < +\infty$, ограниченное на $\mathbb{R}$, и такое решение только одно; дать его формулу; оценить верхнюю границу его модуля;

б) показать, что $y^*(x)$ — π-периодическая функция.

5. Найти все решения уравнения

$$xy' = y - e^x y^2.$$

6. Найти все решения уравнения

$$y\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)dx - x\left(y^2 + \frac{3}{x^2}\right)dy = 0.$$

7. Используя теорему Пикара, найти интервал, на котором определено решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = \cos x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Найти интервал, на котором определено непродолжаемое решение. Является ли непродолжаемое решение ограниченным?

8. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} 2yy'' - 2(y')^2 + y + 6 = 0, \\ y(5) = -2, \\ y'(5) = 1. \end{cases}$$

9. Решить уравнение

$$x\left(yy'' - (y')^2\right) = yy' + 3y^2.$$

10. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x^4 y'' - x^2 y (y')^2 + 2xy'y^2 = y^3, \\ y(2) = 3, \\ y'(2) = 1. \end{cases}$$

11. Найти общее решение системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x + 2y + 4z, \\ \dot{z} = -2x - y - z. \end{cases}$$
Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

12. Найти общее решение системы
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases}$$
Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

13. Найти общее решение системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - z, \\ \dot{y} = -4x + 2y - z, \\ \dot{z} = 16x + 4y + 6z. \end{cases}$$
Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

14. Найти все вещественнозначные решения системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -12x - 8y, \\ \dot{y} = 20x + 12y. \end{cases}$$
Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

15. Найти общее решение системы
$$\begin{cases} \dot{x} = y + \cos(2t) - 2\sin(2t) \\ \\ \dot{y} = -x + 2y + 2\sin(2t) + 3\cos(2t). \end{cases}$$

16. Найти общее решение уравнения
$$y'' - 6y' + 9y = -\frac{e^{3x}}{x^2}.$$

17. Найти общее решение уравнения
$$y'' + y' - 30y = xe^{5x}.$$

18. Найти общее решение уравнения
$$y'' - 6y' + 10y = \sin x + e^{3x}.$$

19. Найти общее решение уравнения
$$y^{(4)} + 4y'' + 4y = x^2 + e^{-2x} + \cos x.$$

20. Найти общее решение уравнения
$$x^2y'' - xy' + y = \frac{x}{\ln x} + \ln x.$$

21. Найти общее решение уравнения
$$x^2 \ln x\; y'' - (\ln x + 1)xy' + (\ln x + 1)y = 2x.$$

22. При каких $a \in \mathbb{R}$ и $f(x) \in C([0, \pi])$ краевая задача
$$\begin{cases} y'' + y = f(x), \\ y(0) + ay'(0) = 0, \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$
а) имеет единственное решение, б) не имеет решений, в) имеет бесконечно много решений?

23. Найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' + y = f(x), \\ y(1) = 0, \\ y(e) = 0. \end{cases}$$

Построить функцию Грина.

24. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' = \lambda y, \\ y'(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

Задачи для сдачи во втором семестре

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \left((y')^2 - y^2 + \frac{2y}{1+\sin^2 x}\right) dx, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

2. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(\cos^2 y \; (y')^2 + 4\sin y\right) dx, \quad y(0) = 3\pi, \quad y(1) = \frac{5\pi}{2}.$$

3. Найти экстремали функционала

$$I[y,z] = \int\limits_0^1 \left(8yz + 8y^2 + (y')^2 - (z')^2\right) dx,$$

$$y(0) = -1, \quad z(0) = 0, \quad y(1) = -2e^2, \quad z(1) = e^2.$$

4. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^{\pi/4} \left((y'')^2 - 8(y')^2 + 16y^2 - 18y\sin x\right) dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0, \\ M\ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1 - x_3) = 0, \\ m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0, \end{cases}$$

описывающей продольные колебания молекулы CO_2.

6. Решить систему малых колебаний с возмущающей силой

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0, \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = a\cos(\gamma t), \quad \gamma^2 = \dfrac{k}{m}. \end{cases}$$

7. Найти общее решение уравнений

$$\text{а) } \ddot{x} + 9x = \cos^3 t, \qquad \text{б) } \ddot{x} + 9x = \sin^2 t.$$

Существуют ли периодические решения?

8. Найти все периодические решения уравнения

$$\ddot{x} - 9x = f(t),$$

где $f(t) = 1 - |t|$ при $|t| \le 1$, $f(t+2) \equiv f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

9. Дано уравнение $y'' + y = \cos(\omega t)$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

10. Найти производную по начальным данным $\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{y} = 2ty + \sin^2 y, \\ y\Big|_{t=0} = y_0. \end{cases}$$

11. Найти производные по параметру $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 4te^{7t}y^2 + \mu^2 e^y, & x\Big|_{t=0} = 3\mu, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x e^{-7t} + \mu^2 e^x, & y\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

12. Разложить в ряд по степеням малого параметра μ (до μ^1 включительно) 2π-периодическое решение уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A \sin t + \mu x^3,$$

где ω — нецелое число.

13. Дано уравнение

$$\dot{x} = \begin{cases} x^3 \sin(1/x), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

Построив картину решений, выяснить, является ли решение $x(t) \equiv 0$ устойчивым по Ляпунову, асимптотически устойчивым.

14. Решив систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x/t - t^2 x y^2, \\ \dot{y} = -y/t, \end{cases}$$

исследовать на устойчивость ее нулевое решение.

15. Исследовать на устойчивость решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y + 2t^2, & x(10) = 5, \\ \dot{y} = x + y + z + \ln(4 + t^2), & y(10) = 6, \\ \dot{z} = 2x - 2y - z + 2e^{-3t}, & z(10) = 7. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8e^{7t}y + \cos(4t), & x(0) = 3, \\ \dot{y} = -5y + \ln(3 + t^4). & y(0) = 4. \end{cases}$$

17. Исследовать, устойчиво ли решение $x(t) = t$, $y(t) = t$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - t)^2 + t - y + 1, \\ \dot{y} = (x - y)(1 + x + y - 2t) + 1. \end{cases}$$

18. Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{4 - x - 2y} - 1, \\ \dot{y} = y \ln(1 + x). \end{cases}$$

19. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^5 - x^5 + 7x^9, \\ \dot{y} = 4x - y^7 + 7y^9. \end{cases}$$

Исследовать также на устойчивость нулевое решение линеаризованной системы.

20. Найти общее решение системы и построить фазовый портрет

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$$

21. Найти общее решение системы и построить фазовый портрет

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y - 10, \\ \dot{y} = x + 5y - 2. \end{cases}$$

22. Найти общее решение системы и построить фазовый портрет

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y + 3, \\ \dot{y} = -3x - 8y - 8. \end{cases}$$

23. Найти общее решение системы и построить фазовый портрет

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, \\ \dot{y} = -5x + y. \end{cases}$$

24. С помощью линеаризации выяснить типы положений равновесия нелинейной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x - y)y, \\ \dot{y} = 2 + x - y^2. \end{cases}$$

Для каждого положения равновесия построить локальный фазовый портрет. Найти прямолинейную траекторию исходной системы. Построить изоклины нуля и бесконечности. Используя накопленную информацию, построить глобальный фазовый портрет.

25. Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ \dot{y} = -x + ay\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right). \end{cases}$$

Имеются ли предельные циклы? Устойчивы ли они? Каков тип положения равновесия в начале координат? Построить фазовый портрет.

26. Найти первые интегралы и решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xy, \\ \dot{y} = -y + xy \end{cases}$$

в области $\{y > 0,\ x + y > 1\}$. Сколько существует независимых первых интегралов?

27. Найти первые интегралы и решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 y - x, \\ \dot{y} = -xy^2, \\ \dot{z} = z \end{cases}$$

в области $\{x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. Сколько существует независимых первых интегралов?

28. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (xz + y)\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \\ u = x + y \quad \text{при} \quad z = y. \end{cases}$$

Контрольные работы, проводящиеся в первом семестре

Контрольная работа № 1 (образец)

1. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{y}{x^2}.$$

С помощью изоклин построить картину решений, найти области возрастания и убывания. Исследовать выпуклость решений, найти линию перегиба.

2. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{-x-2}{2x+y+3}.$$

3. Найти все решения уравнения

$$y' + 2y \operatorname{tg} x = 2\frac{\cos x}{1+x^2}\sqrt{y}.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\left(1 + y^2\cos(x) + e^{x+2y}\right)dx + \left(2y\sin(x) + 2e^{x+2y}\right)dy = 0.$$

Контрольная работа № 2 (образец)

1. Найти все решения уравнения $y^3y'' + 2 = 0$.

2. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} 2xyy'' - 2yy' - 3x^2(y')^2 = 0, \\ y(1) = -1, \\ y'(1) = -1. \end{cases}$$

3. Найти все вещественнозначные решения системы при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + (\alpha - 4)y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ все решения ограничены?

4. Найти все решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - y + e^{3t}t^{1/2}, \\ \dot{y} = 4x + y + e^{3t}t^{1/3}. \end{cases}$$

Контрольные работы, проводящиеся о втором семестре

Контрольная работа № 1(образец)

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^{\pi/3} \left((y')^2 - 9y^2 + \frac{18y}{1+\cos^2(3x)}\right)dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + x_2 = 0, \\ 17\ddot{x}_2 + x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0, \\ \ddot{x}_3 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 100y = \cos(7\omega t) + 4$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t+T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 4te^{-16t}y^2 + \mu^2 \ln(1 + x^2 + y^2), & x\big|_{t=0} = \mu, \\ \dot{y} = 8y + e^{8t} + 5\mu x e^{8t}, & y\big|_{t=0} = 5\mu^2. \end{cases}$$

Контрольная работа № 2 (образец)

1.Используя определения, выяснить, является ли решение задачи Коши устойчивым по Ляпунову, симптотически устойчивым:

$$\begin{cases} \dot{y} = t^3(1 - 4t^2)y, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2. Исследовать на устойчивость решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + \sin t, & x(10) = 5, \\ \dot{y} = 2x + 2y + 2z + \ln(1 + t^2), & y(10) = 6, \\ \dot{z} = -x - 5y - 2z + e^{5t}, & z(10) = 7. \end{cases}$$

3. Найти все положения равновесия и исследовать их наустойчивость

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2, \\ \dot{y} = e^{-4x} - 1. \end{cases}$$

4. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y^6 - x^5, \\ \dot{y} = y^5 - x^3 y - y^3. \end{cases}$$

5. Построить фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 4y + 4, \\ \dot{y} = x + 4y + 1. \end{cases}$$

Список экзаменационных вопросов

Зимняя сессия

1. Определение решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, определение непродолжаемого решения. Постановка задачи Коши. Формулировки теорем Пеано и Пикара. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения, определение интегральной кривой. Поле направлений, изоклины.

2. Уравнения с разделяющимися переменными, уравнения вида $y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$, однородные уравнения. Примеры.

3. Линейные уравнения первого порядка. Принцип суперпозиции. Пространство решений однородного уравнения. Связь общего решения однородного уравнения с общим решением неоднородного уравнения. Метод вариации произвольной постоянной.

4. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Примеры.

5. Уравнения в симметричной форме. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Примеры.

6. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство (первая часть): эквивалентность задачи Коши и интегрального уравнения, единственность решения.

7. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство (вторая часть): существование локального решения.

8. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений $G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$: а) G — однородная, б) G не зависит от x (автономное уравнение), в) уравнение Эйлера, г) G — обобщённо-однородная. Доказательство для случая $n = 2$.

9. Нормальные системы $Y' = F(x, Y)$. Определение решения, постановка задачи Коши. Формулировки теорем Пеано и Пикара для систем. Теорема о покидании компакта для систем. Теорема о поведении непродолжаемых решений в полосе. Теорема Уинтнера.

10. Линейные системы. Теорема Пикара для линейных систем (с доказательством). Принцип суперпозиции. Связь общего решения однородной системы с общим решением неоднородной системы.

11. Линейные однородные системы. Размерность пространства решений. Определения ФСР, ФМР. Общее решение линейной однородной системы.

12. Фундаментальные матрицы и их свойства: невырожденность ФМР, дифференциальное уравнение для ФМР, связь между двумя ФМР.

13. Матрица Вронского. Формула Остроградского – Лиувилля для систем (вывод формулы для случая $n = 2$). Эквивалентность линейной независимости в точке и на интервале для решений линейной однородной системы.

14. Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольной постоянной.

15. Решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами $Y' = AY$. Матричная экспонента.

16. Сведение уравнения высокого порядка к системе. Связь решений уравнения и соответствующей системы. Теорема Пикара для уравнений высокого порядка. Теория линейных уравнений высокого порядка как следствие теории линейных систем: пространство решений однородного уравнения, определения ФСР, ФМР, формула Остроградского – Лиувилля, связь общего решения однородного уравнения с общим решением неоднородного уравнения, метод вариации произвольной постоянной.

17. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Формула сдвига.

18. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о виде решений, соответствующих корню характеристического полинома кратности k.

19. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о кратности корня характеристического полинома.

20. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Построение ФСР.

21. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольной постоянной. Частное решение в случае неоднородности в виде квазиполинома. Метод комплексных амплитуд. Примеры.

22. Линейные уравнения Эйлера. Примеры.

23. Постановка краевой задачи. Условие однозначной разрешимости (с доказательством). Условия, при которых краевая задача имеет бесконечно много решений, не имеет решений.

24. Постановка краевой задачи. Решение задачи в случае неоднозначной разрешимости.

25. Постановка краевой задачи. Сведение задачи (α, β, f) к задаче $(0, 0, \widetilde{f})$.

26. Постановка краевой задачи. Решение задачи $(0, 0, f)$ в случае однозначной разрешимости. Функция Грина, четыре ее свойства.

27. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Сведение к краевой задаче для уравнения, не содержащего первую производную.

28. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Размерность пространства собственных функций, соответствующих одному собственному значению. Существование действительной собственной функции, соответствующей действительному собственному значению.

29. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Ортогональность с весом собственных функций. Вещественность собственных значений.

30. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Теорема об односторонней ограниченности множества собственных значений (доказательство для случая $y(a) = y(b) = 0$).

31. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Количество собственных значений, их расположение (без доказательства). Теорема Стеклова: разложение дважды непрерывно дифференцируемых функций по собственным функциям (без доказательства).

Летняя сессия

1. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка задачи, определение локального и глобального экстремума.

2. Необходимое условие локального экстремума в простейшей задаче (уравнение Эйлера, с доказательством).

3. Три случая понижения порядка в уравнении Эйлера.

4. Постановка (физическая и аналитическая) и решение задачи о брахистохроне.

5. Постановка (геометрическая и аналитическая) и решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади.

6. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями, необходимое условие локального экстремума.

7. Вариационная задача с высшими производными, необходимое условие локального экстремума.

8. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными, необходимое условие локального экстремума.

9. Простейшая изопериметрическая задача, необходимое условие локального экстремума; постановка и решение классической изопериметрической задачи (задача Дидоны).

10. Малые колебания систем $MX''+KX=0$: нахождения решения, ортогональность векторов нормальных колебаний (доказательство).

11. Вынужденные колебания: система $MX''+KX=F(t)$. Нахождение решения.

12. Периодические решения системы дифференциальных уравнений (с доказательствами): система n уравнений, линейные системы, линейные системы с постоянными коэффициентами.

13. Периодические решения дифференциального уравнения высокого порядка: разрешённые относительно старшей производной, линейные, линейные с постоянными коэффициентами.

14. Нахождение периодических решений с помощью рядов Фурье: нерезонансный и резонансный случаи (с доказательствами).

15. Гладкость решений дифференциального уравнения в зависимости от гладкости правой части.

16. Теорема о непрерывной зависимости решений системы от начальных данных, теорема о непрерывной зависимости решений системы от параметров.

17. Теорема о дифференцируемости решений по параметрам. Теорема о дифференцируемости решений в целом (по начальным данным и параметрам).

18. Метод малого параметра для отыскания периодических решений. Теорема о существовании периодических решений при малом параметре (с доказательством).

19. Система $\dot{Y}=F(t,Y)$. Определение устойчивости по Ляпунову, неустойчивости, асимптотической устойчивости. Геометрическая интерпретация этих определений.

20. Сведение задачи об устойчивости любого решения к исследованию устойчивости нулевого решения.

21. Устойчивость решений линейных систем $\dot{Y}=A(t)Y+B(t)$: теорема об устойчивости нулевого решения линейной системы (связь с ограниченностью решений, с доказательством), теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы (связь со стремлением решений к нулю, с доказательством).

22. Устойчивость решений линейных систем с постоянными коэффициентами $\dot{Y}=AY$ (зависимость от собственных значений матрицы A).

23. Устойчивость решений автономных систем: идея метода функций Ляпунова, теорема Ляпунова об устойчивости (с доказательством), теорема об асимптотической устойчивости в терминах функции Ляпунова, теорема о неустойчивости, теорема Четаева.

24. Теорема о существовании функции Ляпунова для линейных систем с постоянными коэффициентами (с доказательством).

25. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению (с доказательством).

26. Теорема об устойчивости положений равновесия автономных систем по первому приближению.

27. Основное свойство решений автономных систем. Фазовое пространство, траектории. Теорема о пересечении траекторий автономных систем. Три типа фазовых траекторий автономных систем.

28. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о связи первых интегралов и решений уравнения с частными производными (с доказательством). Теорема о числе функционально независимых первых интегралов. Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.

29. Постановка задачи Коши для уравнения в частных производных. Теорема об однозначной разрешимости задачи Коши на плоскости.

Базовые факты, знание которых необходимо для получения оценки «3»

I семестр

1. Определение решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Определение непродолжаемого решения.

2. Что такое задача Коши (для уравнений 1-го порядка, для нормальных систем первого порядка и для уравнений n-го порядка).

3. Теоремы Пеано и Пикара (для уравнений 1-го порядка, для уравнений n-го порядка, для нормальных систем первого порядка).

4. Определение поля направлений, интегральной линии поля направлений.

5. Сведение уравнения n-го порядка к нормальной системе.

6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы $Y' = A(x)Y + F(x)$.

7. Фундаментальные системы решений. Фундаментальные матрицы и их свойства.

8. Принцип суперпозиции, связь решений неоднородной и однородной системы.

9. Построение частного решения методом вариации произвольных постоянных (для линейных уравнений n-го порядка и для систем).

10. Постановка краевой задачи. Условия однозначной разрешимости.

11. Собственные значения и собственные функции краевой задачи.

12. Задача Штурма-Лиувилля: количество собственных значений, собственных функций, разложение по собственным функциям.

II семестр

1. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка задачи, определение локального и глобального экстремума. Необходимое условие локального экстремума (уравнение Эйлера).

2. Система $\dot{Y} = F(t, Y)$. Определение устойчивости по Ляпунову, неустойчивости, асимптотической устойчивости. Геометрическая интерпретация этих определений.

3. Устойчивость решений линейных систем с постоянными коэффициентами $\dot{Y} = AY$ (зависимость от собственных значений матрицы A).

4. Устойчивость по первому приближению положений равновесия автономных систем.

5. Фазовое пространство, траектории. Теорема о пересечении траекторий автономных систем. Три типа фазовых траекторий автономных систем.

6. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

7. Связь первого интеграла с решением линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.

Образец билета на экзамен

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (Новосибирский государственный университет, НГУ)
Физический факультет
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ

1. Линейные однородные системы. Размерность пространства решений. Определения ФСР, ФМР. Общее решение однородной системы.

2. Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Форма экзаменационного билета представлена на рисунке

МИНОБРНАУКИ РОССИИ ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (Новосибирский государственный университет, НГУ)*** ***Физический факультет***
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № ________ 1 ….. 2 …… 3 …… Составитель ___________________ /Ф.И.О. преподавателя/ (подпись) «____»__________________20 г.

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

Лист актуализации рабочей программы
по дисциплине «Дифференциальные уравнения»
по направлению подготовки 03.03.02 Физика
Профиль «Общая и фундаментальная физика»

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного