МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет
Кафедра высшей математики ФФ

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФ, д.ф.-м.н
В.Е.Блинов
«___» ______ 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

направление подготовки: **03.03.02 Физика**
Направленность (профиль): все профили

Форма обучения
Очная

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	108	32	32	6	36				2	
Итого	**108**	**32**	**32**	**6**	**36**				**2**	
Всего 108 часов / 3 зачётных единицы, из них: - контактная работа 72 часа										
Компетенции ОПК-1										

Ответственный за образовательную программу
д.ф.-м.н., проф. С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2022

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Цель дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» - дать студенту базовые знания по элементарной теории вероятностей (теории случайных событий), теории случайных величин, предельным теоремам для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, теории оценивания параметров и проверки статистических гипотез. Эти знания необходимы для освоения теоретических основ физических курсов, читаемых на физическом отделении физического факультета Новосибирского государственного университета. Дисциплина нацелена на формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 -Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности.	**ОПК-1.1-**Применяет теоретические и методологические основы физико-математических дисциплин, математический аппарат для решения профессиональных задач.	**Знать** основы теории случайных событий и случайных величин, предельные теоремы теории вероятностей, основы теории оценивания параметров и проверки гипотез.
	ОПК-1.2-Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин в своей профессиональной деятельности.	**Уметь** решать конкретные задачи по теории вероятностей и математической статистике, такие как: нахождение математического ожидания и дисперсии случайной величины, а также нахождение доверительного интервала при проверке статистических гипотез.
	ОПК -1.3. Обладает знаниями, необходимыми для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.	**Знать** базовые понятия вероятностного пространства и случайного события, наиболее употребительные вероятностные модели для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.

В результате изучения курса студенты физического отделения физического факультета НГУ должны усвоить понятия вероятностного пространства и случайного события, наиболее употребительные вероятностные модели, основы теории случайных событий и случайных величин, предельные теоремы теории вероятностей, основы теории оценивания параметров и проверки гипотез, а также освоить основные методы решения стандартных задач из этих разделов высшей математики. Кроме того, у обучающихся должны сформироваться способность применять математические методы для решения физических задач; способность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики; способность приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.

Для успешного освоения курса «Теория вероятностей и математическая статистика» студенты должны обладать предварительными знаниями основ математического анализа и линейной алгебры.

3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	108	32	32	6	36				2	
Итого	**108**	**32**	**32**	**6**	**36**				**2**	
Всего 108 часов / 3 зачётные единицы, из них: - контактная работа 72 часа										
Компетенции ОПК-1										

Реализация дисциплины предусматривает практическую подготовку при проведении следующих видов занятий, предусматривающих участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью: лекции, практические занятия, прием заданий, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, дифференцированный зачёт.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

- текущий контроль успеваемости: домашние задания, контрольные работы;
- промежуточная аттестация: дифференцированный зачёт.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

- занятия лекционного типа – 32 часа;
- практические занятия – 32 часа;
- прием заданий – 6 часов;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 36 часа;
- промежуточная аттестация (дифференцированный зачёт) – 2 часа.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, прием заданий, дифференцированный зачёт) составляет 72 часа.

4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачётных единицы, 108 академических часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)						Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы			Сам. работа во время занятий (не включая период сессии)	Сам. работа во время промежуточной аттестации		
				Лекции	Практические занятия	Прием заданий				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	Понятие вероятности. Классическое определение вероятности. Геометрические вероятности. Задача о встрече. События, операции над ними. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности. Элементы комбинаторики. Выборки с возвращением и без возвращения. Размещение частиц по ячейкам. Статистики Максвелла—Больцмана, Бозе—Эйнштейна, Ферми—Дирака. Гипергеометрическое распределение.	1	6	2	2		2			
2	Независимые события. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Время ожидания в схеме Бернулли. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.	2	6	2	2		2			

3	Случайные величины. Функции распределения и их свойства. Типы распределений: дискретный, абсолютно непрерывный, смешанный. Дискретные распределения. Преобразования дискретных случайных величин. Основные семейства дискретных распределений.	3	7	2	2		3			.
4	Абсолютно непрерывные распределения. Преобразования случайных величин с абсолютно непрерывным распределением. Основные семейства абсолютно непрерывных распределений. Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.	4	7	2	2		3			
5.	Независимые случайные величины. Критерии независимости. Функции от независимых случайных величин. Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры. Неравенство Маркова. Неравенство Йенсена.	5	7	2	2		3			
6.	Моменты, вопросы их существования. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины. Их свойства. Примеры. Неравенство Чебышева. Ковариация. Коэффициент корреляции и его свойства.	6	7	2	2		3			
7.	Матрица ковариаций. Многомерное нормальное распределение и его свойства. Характеристические и производящие функции: определения и свойства. Распределение суммы независимых случайных	7	6	2	2		2			

	величин, имеющих гамма-распределение.									
8.	Распределение Максвелла—Больцмана. Распределение скоростей и энергий молекул газа. Распределение модуля скорости. Среднеквадратическая скорость. Сходимость по распределению. Теорема о непрерывном соответствии. Сходимость по распределению к константе. Закон больших чисел Хинчина. Сходимость с вероятностью единица, ее свойства. Закон больших чисел Колмогорова.	8	6	2	2		2			
9.	Центральная предельная теорема. Теорема Муавра—Лапласа. Теорема Пуассона.	9	6	2	2		2			
10.	Моделирование случайных величин и векторов. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко—Кантелли. Гистограмма и полигон частот.	10	6	2	2		2		4	2
11.	Задача оценивания неизвестных параметров. Несмещенность, состоятельность оценок. Выборочные моменты и их свойства. Выборочные асимметрия и эксцесс. Метод моментов. Состоятельность оценок, полученных методом моментов.	11	6	2	2		2			
12.	Метод максимального правдоподобия. Задача линейной регрессии. Оценивание параметров. Модели с полиномиальным и циклическим трендом.	12	6	2	2		2			

13.	Распределения, связанные с нормальным (хи-квадрат, Стьюдента, Фишера). Лемма Фишера. Теорема о свойствах выборочного среднего и выборочной дисперсии для выборок из нормальной совокупности.	13	6	2	2		2			
14.	Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Асимптотические доверительные интервалы.	14	6	2	2		2			
15.	Проверка гипотез, основные понятия. Критерии согласия Колмогорова, хи-квадрат. Построение критерия с помощью доверительного интервала.	15	6	2	2		2			
16.	Повторение пройденного материала	16	12	2	2	6	2			
17.	Промежуточная аттестация (Дифференцированный зачёт)	17	2							2
Всего			**108**	**32**	**32**	**6**	**36**			**2**

Программа и основное содержание лекций (32 часа)

I. Теория вероятностей (18 часов)

1. Понятие вероятности. Классическое определение вероятности. Геометрические вероятности. Задача о встрече. События, операции над ними. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.
2. Элементы комбинаторики. Выборки с возвращением и без возвращения. Размещение частиц по ячейкам. Статистики Максвелла—Больцмана, Бозе—Эйнштейна, Ферми—Дирака. Гипергеометрическое распределение.
3. Независимые события. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Время ожидания в схеме Бернулли.
4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Случайные величины. Функции распределения и их свойства. Типы распределений: дискретный, абсолютно непрерывный, смешанный.
6. Дискретные распределения. Преобразования дискретных случайных величин. Основные семейства дискретных распределений.
7. Абсолютно непрерывные распределения. Преобразования случайных величин с абсолютно непрерывным распределением. Основные семейства абсолютно непрерывных распределений.
8. Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.
9. Независимые случайные величины. Критерии независимости. Функции от независимых случайных величин.

10. Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры. Неравенство Маркова. Неравенство Йенсена.
11. Моменты, вопросы их существования. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины. Их свойства. Примеры. Неравенство Чебышева.
12. Ковариация. Коэффициент корреляции и его свойства.
13. Матрица ковариаций. Многомерное нормальное распределение и его свойства.
14. Характеристические и производящие функции: определения и свойства. Распределение суммы независимых случайных величин, имеющих гамма-распределение.
15. Распределение Максвелла—Больцмана. Распределение скоростей и энергий молекул газа. Распределение модуля скорости. Среднеквадратическая скорость.
16. Сходимость по распределению. Теорема о непрерывном соответствии. Сходимость по распределению к константе. Закон больших чисел Хинчина. Сходимость с вероятностью единица, ее свойства. Закон больших чисел Колмогорова.
17. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра—Лапласа.
18. Теорема Пуассона.
19. Моделирование случайных величин и векторов.

II. Математическая статистика (14 часов)
1. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко—Кантелли. Гистограмма и полигон частот.
2. Задача оценивания неизвестных параметров. Несмещенность, состоятельность оценок. Выборочные моменты и их свойства. Выборочные асимметрия и эксцесс.
3. Метод моментов. Состоятельность оценок, полученных методом моментов.
4. Метод максимального правдоподобия.
5. Задача линейной регрессии. Оценивание параметров. Модели с полиномиальным и циклическим трендом.
6. Распределения, связанные с нормальным (хи-квадрат, Стьюдента, Фишера).
7. Лемма Фишера. Теорема о свойствах выборочного среднего и выборочной дисперсии для выборок из нормальной совокупности.
8. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.
9. Асимптотические доверительные интервалы.
10. Проверка гипотез, основные понятия. Критерии согласия Колмогорова, хи-квадрат.
Построение критерия с помощью доверительного интервала.

Программа практических занятий (32 часа)

1. Классическая вероятностная модель. Комбинаторика. Число размещений и число сочетаний (2 часа).
2. Гипергеометрическое распределение. Геометрическая вероятностная модель (2 часа).
3. Независимые события. Попарная независимость и независимость в совокупности. Схема и формула Бернулли (2 часа).
4. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса (2 часа).
5. Распределения случайных величин. Дискретный и абсолютно непрерывный случай. Смесь распределений (2 часа).
6. Преобразования случайных величин в дискретном и абсолютно непрерывном случае. Формулы свертки (2 часа).
7. Математическое ожидание и дисперсия. Вычисление для стандартных распределений (2 часа).
8. Моменты, ковариация, коэффициент корреляции. Матрица ковариаций. Многомерное нормальное распределение и его свойства (2 часа).
9. Характеристические и производящие функции. Предельные теоремы: закон больших чисел,

центральная предельная теорема, теорема Пуассона (2 часа).
10. Выборка и выборочные характеристики. Оценивание неизвестных параметров методом моментов (2 часа).
11. Оценивание неизвестных параметров методом максимального правдоподобия. Задачи линейной регрессии (2 часа).
12. Интервальное оценивание. Точные и асимптотические доверительные интервалы (2 часа).
13. Статистические гипотезы и критерии. Вероятности ошибок первого и второго рода. Реально достигаемый уровень значимости (2 часа).
14. Статистические критерии Колмогорова, хи-квадрат Пирсона, их состоятельность, алгоритм применения для проверки гипотез (2 часа).
15. Связь статистических критериев и доверительных интервалов (2 часа).
16. Повторение пройденного материала (2 часа).

Самостоятельная работа студентов (36 часов)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям	10
Подготовка к контрольным работам	4
Подготовка к сдаче заданий	22

5. Перечень учебной литературы.

1. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей: [Учеб. для мат. спец. ун-тов] / 6-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1988. - 447 с. (198 экз.).
2. А. А. Быстров, А. П. Ковалевский, В. И. Лотов. Практикум по теории вероятности: учебное пособие: [для студентов 1 курса Физ. фак. НГУ] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. высш. Математики. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2009. - 117 с. (97 экз.).
3. Д. А. Коршунов, Н. И. Чернова. Сборник задач и упражнений по математической статистике: учебное пособие: [для студентов и аспирантов математических, физических, естественных, технических и экономических специальностей вузов] / Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т математики им. С.Л. Соболева. - Новосибирск: Изд-во Института математики, 2001. - 119 с. (250 экз.).
4. В. И. Лотов. Теория вероятностей и математическая статистика: курс лекций / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Фак. информ. Технологий. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2006. - 127 с. (60 экз.).

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

5. А. А. Быстров, А. П. Ковалевский, В. И. Лотов. Практикум по теории вероятности: учебное пособие: [для студентов 1 курса Физ. фак. НГУ] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. высш. Математики. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2009. - 117 с. (97 экз.).
6. В. И. Лотов. Теория вероятностей и математическая статистика: курс лекций / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Фак. информ. Технологий. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2006. - 127 с. (60 экз.).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

7.1 Ресурсы сети Интернет

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:
- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.2 Современные профессиональные базы данных

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

8.1 Перечень программного обеспечения

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

8.2 Информационные справочные системы

Не используются.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.
2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.1 Порядок проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине

Текущий контроль успеваемости

В течение семестра проводится прием выполненных обучающимся заданий/задач в отведенное время. Примеры заданий/задач приведены в п.10.3. Термин «сдать задание/задачу» означает объяснение хода ее решения и при необходимости ответы на дополнительные вопросы преподавателей.
Текущий контроль успеваемости осуществляется путём проверки домашних заданий, которые принимаются устно. Для получения положительной оценки все задачи из домашних заданий должны быть сданы (термин «сдать задачу» означает объяснение хода её решения и при необходимости ответы на дополнительные вопросы преподавателя).

Промежуточная аттестация

1. Оценка на дифференцированном зачёте ставится с учетом результатов текущего контроля успеваемости и оценки за ответы при прохождении промежуточной аттестации. Оценка за зачёт вычисляется как среднее (с округлением до целых) из трех оценок: за сдачу домашних заданий, за контрольную работу по теории вероятностей и за теоретический зачёт. Примеры заданий и контрольной работы приведены в п. 10.3.
2. Для сдачи дифференцированного зачета студент должен получить оценку не менее, чем «удовлетворительно», за домашние задания и оценку не менее, чем «удовлетворительно», за контрольную работу.
3. Домашние задания принимаются устно еженедельно. Для получения положительной оценки все домашние задания должны быть сданы. Оценка «отлично» выставляется, если не более двух домашних заданий сданы не в срок. Оценка «хорошо» выставляется, если более половины домашних заданий сданы в срок.
4.Оценка за контрольную работу равняется числу решенных задач (от 0 до 6 с шагом в 1/3 балла). В случае получения оценки ниже «удовлетворительно» контрольная работа проводится повторно.
5.На теоретическом зачете студенту предлагаются один теоретический вопрос и две задачи по математической статистике. Теоретические вопросы совпадают с параграфами лекционного курса. Задача считается нерешенной, если студент не может сформулировать определения терминов и формулировки теорем, использованных при ее решении. Теоретический зачет должен быть сдан на положительную оценку. Для получения оценки «удовлетворительно» достаточно ответить на один вопрос, для получения оценки «хорошо» - на два вопроса, для получения оценки «отлично» необходимо ответить на все три вопроса билета. Вопросы подбираются таким образом, чтобы проверить уровень сформированности компетенции ОПК-1.

Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем. Положительная оценка ставится, когда компетенция освоена не ниже порогового уровня. Оценки «отлично» (продвинутый уровень сформированности компетенции), «хорошо» (базовый уровень), «удовлетворительно» (пороговый уровень) означают успешное прохождение промежуточной аттестации. Оценка «неудовлетворительно» означает, что заявленная компетенция не сформирована.

Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

Индикатор	**Результат обучения по дисциплине**	**Оценочные средства**
ОПК-1.1. Применяет теоретические и методологические основы физико-математических дисциплин, математический аппарат для решения профессиональных задач.	Знать основы теории случайных событий и случайных величин, предельные теоремы теории вероятностей, основы теории оценивания параметров и проверки гипотез.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме.
ОПК-1.2. Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин в своей профессиональной деятельности.	Уметь решать конкретные задачи по теории вероятностей и математической статистике, такие как: нахождение математического ожидания и дисперсии случайной величины, а также нахождение доверительного интервала при проверке статистических гипотез.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме.
ОПК -1.3. Обладает знаниями, необходимыми для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.	Знать базовые понятия вероятностного пространства и случайного события, наиболее употребительные вероятностные модели для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме.

10.2. Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика».

Таблица 10.2

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК 1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/ несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК 1.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.
Наличие знаний и умений	ОПК 1.3	Уровень знаний ниже минимальных требований. Не умеет решать стандартные задачи х требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Решены типовые задачи. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.

10.3. Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Примеры домашних заданий

(**через № обозначен номер студента по списку группы**)

1.1. Буквы, составляющие Вашу фамилию, написали на карточках, затем карточки перетасовали и стали выкладывать в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что в результате получится Ваша фамилия?

1.2. n книг произвольным образом расставляются на книжной полке. Какова вероятность того, что две фиксированные книги окажутся стоящими рядом?

1.3. У человека в кармане n ключей, из которых только один подходит к его двери. Ключи последовательно извлекаются (без возвращения) до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти вероятность того, что нужный ключ появится при k -м извлечении.

1.4. Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад извлекаются 6 карт. Какова вероятность того, что:

а) среди них окажется туз пик;

б) среди них окажется ровно один туз;

в) среди них окажутся ровно две бубновые карты;

г) среди них окажется хотя бы одна бубновая карта?

1.5. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Некто приобретает k билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один билет окажется выигрышным.

1.6. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже входят 5 человек. Независимо от других каждый может выйти с равными шансами на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность того, что:

а) все выйдут на четвертом этаже;

б) все пятеро выйдут на одном и том же этаже;

в) все пятеро выйдут на разных этажах?

1.7. Числа $1; 2; ...; n$ расставлены случайным образом. Предполагая, что различные расположения чисел равновероятны, найти вероятность того, что числа $1, 2, 3$ расположены в порядке возрастания, но не обязательно рядом.

1.8. Найти вероятность того, что в наугад выбранном трехзначном автомобильном номере: а) все цифры одинаковы;

б) все цифры различны;

в) только две одинаковые цифры.

1.9. Однократно бросается игральная кость. Найти вероятность того, что:

а) выпадет число 3;

б) выпадет число, отличное от трех;

в) выпадет число, не меньшее трех.

1.10. Однократно бросается пара игральных костей. Найти вероятность того, что:

а) сумма выпавших очков окажется равна трем;

б) выпадут одинаковые грани;

в) сумма выпавших очков окажется не меньше шести.

1.11. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово "МАТЕМАТИКА"?

1.12. Найти вероятность того, что в наугад выбранном четырехзначном автомобильном номере:

а) все цифры одинаковы;

б) все цифры различны;

в) ровно три одинаковые цифры;

г) только две одинаковые цифры;

д) две пары одинаковых цифр.

1.13. На шахматную доску из 64 клеток ставятся наудачу две ладьи разного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга?
2.1. Из чисел 1, 2, ..., 49 наугад выбираются и фиксируются 6 чисел, считающиеся выигрышными. Некто, желающий выиграть, наугад называет свои 6 чисел из 49. Какова вероятность, что среди названных им чисел окажется не менее трех выигрышных?
2.2. Группа, состоящая из $3n$ юношей и 3 девушек, делится произвольным образом на три равные по количеству подгруппы. Какова вероятность, что все девушки окажутся в разных подгруппах?
2.3. n студентов произвольным образом расходятся по k аудиториям. Какова вероятность, что в первой аудитории окажется n_1 студентов, во второй — n_2 студентов, ..., в k -й аудитории — n_k студентов, $n_1 + ... + n_k = n$?
2.4. В купейный вагон (9 купе по 4 места) продано +4 билетов. Найти вероятность того, что занятыми оказались ровно пять купе.
2.5. Из отрезка [0,1] наугад выбирается число. Какова вероятность, что в десятичной записи этого числа вторая цифра после запятой будет двойкой?
2.6. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Обозначим $X;Y$ ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.
а) Доказать, что для $0 < u < 1$, $0 < v < 1$ выполнено

$$P\{X < u, Y < v\} = P\{X < u\}P\{Y < v\} = uv;$$

б) найти для $0 < t < 1$ вероятности

$$1)\ P\{|X - Y| < t\};\quad 2)\ P\{XY < t\};$$

$$3)\ P\{\max(X,Y) < t\};\quad 4)\ P\{\min(X,Y) < t\};$$

в) найти $P\{X + Y < t\}$ для $0 < t < 2$.
2.7. На отрезок длины l произвольным образом брошены три точки. Пусть X, Y, Z — расстояния до этих точек от левого конца отрезка. Какова вероятность, что из отрезков с длинами X, Y и Z можно составить треугольник?
2.8. На отрезок единичной длины произвольным образом брошены две точки, которые делят отрезок на три части. Какова вероятность, что из этих частей можно составить треугольник?
2.9. Недобросовестный казначей заменил 3 из 50 золотых монет в казне на фальшивые. Султан взвешивает 3 наугад выбранных монеты. Какова вероятность того, что казначей будет уличен?
2.10. Группа, состоящая из $2n$ девушек и $2n$ юношей, делится произвольным образом на две равные по количеству подгруппы. Найти вероятность того, что в каждой подгруппе окажется поровну юношей и девушек.
2.11 В ящике имеется 4 зеленых, 5 синих и 6 красных шаров. Наугад выбирается два шара. Какова вероятность того, что
а) это будут синий и зеленый шары;
б) шары окажутся одного цвета;
в) шары окажутся различных цветов.
2.12. n различных шаров произвольным образом раскладываются по n ящикам. Какова вероятность, что при этом ровно один ящик окажется пустым?
2.13. Из колоды, насчитывающей 52 карты, наугад извлекают 6 карт. Какова вероятность, что при этом ровно один ящик окажется пустым?
2.14. Отрезок длины l ломается в произвольной точке. Какова вероятность, что длина наибольшего обломка превосходит $2l/3$?
2.15. Точка бросается наудачу в квадрат. Найти вероятность того, что точка попадет в круг, вписанный в этот квадрат.

2.16. Точка бросается наудачу в треугольник с вершинами в точках (0,0),(2,0) и (0,1). Найти вероятность того, что
а) абсцисса точки окажется больше $1/2$;
б) ордината точки окажется больше $1/2$.
3.1. Производят 3 независимых случайных перестановки букв Вашей фамилии. Найти вероятность того, что:
а) хотя бы раз получилась Ваша фамилия;
б) каждый раз получалась Ваша фамилия;
в) в последний раз получилась Ваша фамилия.
Сравнить вероятности, найденные в пунктах (а), (б), (в).
3.2. Пусть событие A не зависит от самого себя. Доказать, что тогда $P(A)$ равна 0 или 1.
3.3. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок B — с вероятностью 0,5, стрелок C — с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени. Какова вероятность, что ровно две пули попали в цель?
3.4. Двое играют в игру, поочередно бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первым получит герб. Найти вероятность того, что игра закончится на k-м бросании. Какова вероятность выигрыша для игрока, начинающего игру?
3.5. 10 любителей подледного лова рыбы независимо друг от друга произвольным образом размещаются на льду озера, имеющего форму круга радиуса 1 км. Какова вероятность того, что не менее 5 рыбаков расположатся на расстоянии более 200 м от берега?
3.6. В шар радиуса R наудачу бросаются n точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, $0 < a < R$.
3.7. Найти вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p появятся $m + l$ успехов, причем l успехов появятся в последних l испытаниях.
3.8. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что из 10 точек, брошенных наудачу в круг, четыре попадут в квадрат, три — в нижний сегмент, и по одной — в оставшиеся три сегмента.
3.9. События $A_1;...;A_n$ независимы, известны вероятности $p_i = P(A_i)$; $i = 1;...;n$. Найти вероятность того, что:
а) произойдет ровно одно из A_i;
б) не произойдет ни одно из A_i;
в) произойдет хотя бы одно из A_i.
3.10. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 партий из 8?
3.11. Шахматисты A и B решили сыграть между собой матч. Известно, что A выигрывает каждую партию у B с вероятностью 2/3, и с вероятностью 1/3 проигрывает. В связи с этим для победы в матче игроку A нужно набрать 4 очка, а игроку B для победы достаточно набрать 2 очка (за выигрыш в партии дается очко, за проигрыш — 0 очков, ничьих нет). Равны ли шансы на успех?
3.12. Найти вероятность того, что k-й по порядку успех в серии последовательных испытаний Бернулли произойдет на l-м испытании.
3.13. На отрезок [0,10] наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки попадут в [0,2], одна — в [2,3] и две — в [3,10].
4.1. Наудачу выбирают число первых букв от 2 до m из Вашей фамилии (здесь m — общее число букв в фамилии) и осуществляют их случайную перестановку. Найти вероятность того, что в результате получится Ваша фамилия. Найти вероятность того, что выбрали две первых буквы, если известно, что Ваша фамилия получилась.
4.2. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок B — с вероятностью 0,5, стрелок C — с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени. Известно, что две пули из трех попали в цель. Какова вероятность того, что промахнулся C?
4.3. Чтобы найти нужную книгу, студент решил обойти 3 библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в фондах эта книга или нет, и если книга есть в фондах, то с

вероятностью 0,5 она не занята другим читателем. Какова вероятность того, что студент найдет книгу, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

4.4. Из n экзаменационных билетов студент знает m, поэтому, если он зайдет первым на экзамен, то с вероятностью m/n он вытащит «хороший» билет. Какова вероятность вытащить «хороший» билет, если студент зайдет на экзамен вторым?

4.5. Допустим, что вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p, а вероятность поражения цели при k попаданиях равна $1-q^k$. Какова вероятность того, что цель поражена, если было произведено n выстрелов?

4.6. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 5% телевизоров со скрытым дефектом, второго — 3%, и третьего — 1%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 20% телевизоров с первого завода, 30% — со второго и 50% — с третьего?

4.7. Известно, что 34% людей имеют первую группу крови, 37% — вторую, 21% — третью и 8% — четвертую. Больному с первой группой можно переливать только кровь первой группы, со второй — кровь первой и второй групп, с третьей — кровь первой и третьей групп, и человеку с четвертой группой можно переливать кровь любой группы. Какова вероятность того, что произвольно взятому больному можно перелить кровь произвольно выбранного донора?

4.8. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, причем делается это с вероятностями 0,3, 0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приема каждой переданной буквы за две другие равны 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.

4.9. Предположим, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин — дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.

4.10. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложены 2 вытянутых наудачу шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Затем из второй урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

4.11. Некоторое насекомое с вероятностью $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ откладывает k яиц, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, а число λ положительно. Вероятность развития потомка из яйца равна p. Какова вероятность того, что у насекомого будет ровно m потомков?

4.12. В условиях предыдущей задачи у насекомого развилось 10 потомков. Какова вероятность того, что при этом было отложено 20 яиц?

5.1. Построить график функции распределения числа испытаний Бернулли, производимых до появления первого успеха включительно.

5.2. Выразить через функцию распределения случайной величины X вероятности следующих событий: $\mathbf{P}\{a < X < b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X < b\}$, $\mathbf{P}\{a < X \le b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X \le b\}$.

5.3. Могут ли функции

(а) $f(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$, (б) $f(y) = e^{-y}$, (в) $f(y) = \cos y$, (г) $f(y) \equiv 1$

быть плотностями распределения?

5.4. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(y) = \begin{cases} Cy^2, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти C и функцию распределения случайной величины X.

5.5. Вычислить функцию гамма-распределения $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ в случае, когда $\lambda = n$ — целое число.

5.6. На отрезок длины l произвольным образом бросают две точки. Найти функцию распределения расстояния между ними.
5.7. Точку бросают наудачу в треугольник с вершинами, координаты которых равны (0; 0), (2 – 15; 0), (0; 15 – 2). Здесь — номер студента по списку группы. Найти функции распределения и плотности декартовых координат точки.
5.8. В круг радиуса R наугад бросают точку. Найти:
(а) функцию распределения и плотность распределения расстояния этой точки до центра круга;
(б) совместную функцию распределения полярных координат точки.
5.9. Игрок выигрывает очко, если при подбрасывании монеты выпадает герб, и проигрывает очко в противном случае. Построить график функции распределения суммарного выигрыша игрока после двух бросаний монеты.
5.10. Дискретное совместное распределение случайного вектора (X,Y) задается таблицей:

x \ Y	-1	0	1
-1	0,2	0,1	0,0
1	0,4	0,0	0,3

Найти (а) одномерные распределения X и Y; (б) закон распределения $X+Y$; (в) закон распределения $Z=Y^2$.
5.11. Какова вероятность того, что значение случайной величины окажется целым, если известно, что она имеет нормальное распределение?
5.12. n точек независимо друг от друга бросаются на отрезок $\left[0;a\right]$. Найти функции распределения и плотности распределения случайных величин (а) Y_1 (крайняя слева точка), (б) Y_n (крайняя справа точка), (в) Y_k (k-я по счету слева точка, $k=1,...,n$).
6.1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[0;\pi]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y=\sin X$.
6.2. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[-\pi/2;\pi/2]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y=X$.
6.3. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(t)=\begin{cases}\theta t^{\theta-1}, & t\in[0,1],\\ 0, & t\notin[0,1].\end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y=-\ln X$.
6.4. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на [0,1]. Найти плотность распределения случайной величины $X-Y$.
6.5. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функции распределения и плотности случайных величин (а) $Y_1=X^2$, (в) $Y_2=\sin X$.
6.6. В условиях предыдущей задачи найти функцию распределения случайной величины $\max(0,X)$. Найти дискретную и абсолютно непрерывную компоненты полученной функции распределения.
6.7. Случайные величины X и Y независимы и имеют одно и то же дискретное распределение $\mathbf{P}\{X=y_k\}=\mathbf{P}\{Y=y_k\}=p_k$, $k\geq 1$. Найти $\mathbf{P}\{X=Y\}$.
6.8. X и Y независимы, причем $\mathbf{P}\{X=0\}=\mathbf{P}\{X=1\}=1/2$, а $\mathbf{P}\{Y<t\}=t$, $0<t<1$. Найти функции распределения случайных величин $X+Y$ и XY.
6.9. Случайная величина X имеет равномерное распределение на [0; 1]. Найти функции распределения и плотности случайных величин (а) $Y_1=2X+1$, (б) $Y_2=X^{-1}$.
6.10. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α. Найти распределения случайных величин (а) $Y_1=[X]$ (целая часть X), (б) $Y_2=X-[X]$, (в) $Y_3=X^2$, (г) $Y_4=\alpha^{-1}\ln X$, (д) $Y_5=\sqrt{X}$.

6.11. Случайная величина X имеет стандартное распределение Коши. Найти функцию и плотность распределения случайной величины $Y = X$.

6.12. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие показательные распределения. Найти $\mathbf{P}\{X = 2Y\}$.

6.13. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на [0,1]. Найти плотность распределения случайной величины $\max(X;2Y)$.

7.1. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин, введенных в задачах (а) 5.1; (б) 5.6; (в) 5.8(а).

7.2. Найти математические ожидания и дисперсии декартовых координат точки в задаче 5.7.

7.3. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин с плотностями распределения, определенными формулами (а) 5.3 (а); (б) 5.4.

7.4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y в задаче 6.1.

7.5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X - Y$ в задаче 6.4.

7.6. Доказать, что $\mathbf{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(X \geq k\right)$, если известно, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(X = k\right) = 1$.

7.7. Случайные величины X и Y независимы, X имеет стандартное нормальное распределение, Y имеет распределение Бернулли с параметром $1/3$. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин (а) $2X + 3Y$; (б) $X - 9Y - 1$.

7.8. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей:

(а) распределение Пуассона;

(б) геометрическое распределение;

(в) равномерное распределение на отрезке $\left[a;b\right]$;

(г) показательное распределение с параметром α ;

(д) гамма-распределение.

7.9. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин Y_1 и Y_n, введенных в задаче 5.12.

8.1. Найти $\mathbf{E}X^{2013}$, если X имеет стандартное нормальное распределение.

8.2. Вычислить момент k -го порядка для случайной величины, имеющей:

(а) равномерное распределение,

(б) гамма-распределение.

8.3. Случайная величина X принимает натуральные значения с вероятностями $\mathbf{P}\left(X = k\right) = Ck^{-10}, \quad k = 1,2,...$. Как найти C? Какого порядка моменты существуют у этой случайной величины X?

8.4. Найти коэффициент корреляции $\rho\left(X, X+Y\right)$, где X и Y независимы, одинаково распределены и имеют конечную ненулевую дисперсию.

8.5. Найти коэффициент корреляции между координатами точки из задачи 5.7.

8.6. Точка произвольным образом бросается в круг единичного радиуса. Найти коэффициент корреляции между ее декартовыми координатами.

8.7. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α . Найти, для каких значений параметра β существует математическое ожидание случайной величины $Y = e^{\beta X}$.

8.8. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(t) = 3t^{-2}$ при $t \geq 1$. Тогда $\mathbf{E}X^{-1} = \int_1^{\infty} 3t^{-3}dt = 3/2$, $\mathbf{E}X^{-2} = \int_1^{\infty} 3t^{-4}dt = 1$, $\mathbf{D}X^{-1} = 1 - (3/2)^2 < 0$. Но известно, что дисперсия отрицательной не бывает. Объяснить противоречие.

8.9. Вычислить коэффициент корреляции $\rho\left(X,Y\right)$ в условиях задачи 5.10.

8.10. Найти коэффициент корреляции $\rho\left(X, X^2\right)$, где X имеет:

(а) стандартное нормальное распределение;

(б) показательное распределение.

8.11. Записать плотность двумерного нормального распределения вектора $\vec{Z}$ и найти преобразование, переводящее случайный вектор $\vec{Z}=(Z_1, Z_2)^T$ с нулевым вектором математического ожидания в случайный вектор $\vec{X}=(X_1, X_2)^T$ с двумерным стандартным нормальным распределением, если ковариационная матрица вектора $\vec{Z}$ равна $\begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 18 & 45 \end{pmatrix}$.

9.1. Найти характеристическую и производящую функции случайной величины, принимающей значения 0, 1 и 2 с равными вероятностями.

9.2. Найти константу C такую, что $X_1^2+X_2^2$ совпадает по распределению со случайной величиной CY, где (X_1, X_2) — вектор с двумерным стандартным нормальным распределением, а Y имеет показательное распределение с параметром (здесь — номер студента по списку группы).

9.3. 120 раз подбрасывается игральная кость. Вычислить приближенно вероятность каждого из двух событий:

Вариант 1. Выпало не менее 10 единиц; выпало не менее 60 четных чисел.
Вариант 2. Выпало не менее 10 шестерок; сумма выпавших чисел меньше 300.
Вариант 3. В сумме выпало не менее 400 очков; сумма выпавших четных чисел не менее 250.
Вариант 4. Выпало менее 20 единиц; выпало не менее 20 двоек.
Вариант 5. Сумма выпавших чисел не меньше 320; тройка выпала не менее 10 раз.
Вариант 6. Пятерка и шестерка выпали всего не менее 20 раз; единица и двойка выпали менее 30 раз.
Вариант 7. Выпало не менее 70 нечетных чисел; выпало не менее 20 пятерок.
Вариант 8. Выпало менее 15 двоек; выпало не менее 60 нечетных чисел.
Вариант 9. Выпало не менее 10 единиц; сумма выпавших чисел не меньше 400.
Вариант 10. В сумме выпало менее 300 очков; сумма выпавших нечетных чисел менее 200.
Вариант 11. Выпало не менее 15 шестерок; выпало менее 20 единиц.
Вариант 12. Сумма выпавших чисел меньше 250; четверка выпала не менее 15 раз.
Вариант 13. Пятерка и шестерка выпали всего менее 20 раз; единица и двойка выпали не менее 25 раз.
Вариант 14. выпало не менее 65 четных чисел; выпало менее 20 шестерок.
Вариант 15. Выпало не менее 15 единиц; выпало не менее 70 четных чисел.

9.4. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены по закону Пуассона с параметром λ. К чему сходится с вероятностью единица последовательность

$$\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n}-\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)^2 \quad ?$$

9.5. Найти характеристическую и производящую функции:
1) бернуллиевского распределения;
2) биномиального распределения;
3) пуассоновского распределения.

9.6. Пусть X — неотрицательная целочисленная случайная величина. Выразить $\mathbf{E}X$ и $\mathbf{D}X$ через производные производящей функции.

9.7. Найти характеристическую функцию:
1) показательного распределения;
2) гамма-распределения;
3) квадрата стандартной нормальной случайной величины;
4) суммы квадратов n независимых стандартных нормальных случайных величин.

9.8. По характеристическим функциям восстановить распределения: $\cos t$, $(1-4it)^{-1}$, $\exp(2it-2t^2)$.

9.9. Игрок в каждой игре (независимо от результатов других игр) выигрывает 80 рублей с вероятностью 0,1, проигрывает 20 рублей с вероятностью 0,9. Найти, к какой величине сходится средний выигрыш за n игр при $n \to \infty$.

9.10. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — случайные числа, то есть независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке от 0 до 1. Найти пределы п. н. следующих выражений при $n \to \infty$:

а) $\dfrac{X_1{}^2+\ldots+X_n{}^2}{n}$; в) $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+X_1}+\ldots+\dfrac{1}{1+X_n}\right)$;

б) $\dfrac{\sqrt{X_1{}^2+\ldots+X_n{}^2}}{n}$; г) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{n}\left(X_1+\ldots+X_n\right)\right)$.

9.11. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0.2, 4 с вероятностью 0.4, 3 с вероятностью 0.3 и 2 с вероятностью 0.1. За время обучения он сдает 100 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0.95 лежит средний балл.

9.12. Урожайность куста картофеля задается следующим распределением:

Урожай в кг	0	1	1.5	2	2.5
Вероятность	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2

На участке высажено 900 кустов. В каких пределах с вероятностью 0.95 будет находиться урожай? Какое наименьшее число кустов нужно посадить, чтобы с вероятностью не менее 0.975 урожай был не менее тонны?

9.13. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний.

9.14. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0.515. Какова вероятность того, что среди 10 тыс. новорожденных окажется мальчиков не больше, чем девочек?

9.15. Для лица, дожившего до двадцатилетнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0.006. Застрахована группа 10000 лиц 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 1200 рублей страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного родственникам выплачивается 100000 рублей. Какова вероятность того, что:

(а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;

(б) его доход превысит 6000000 рублей?

Какой минимальный страховой взнос следует учредить, чтобы в тех же условиях с вероятностью 0.95 доход был не менее 4000000 рублей?

9.16. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0.02. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл? Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.9, в ней было не менее 100 исправных?

9.17. Вероятность угадывания 6 номеров в спортлото (6 из 49) равна $7.2\cdot 10^{-8}$. При подсчете оказались заполненными 5 млн. карточек. Какова вероятность, что никто не угадал все 6 номеров? Какое наименьшее количество карточек нужно заполнить, чтобы с вероятностью не менее 0.9 хотя бы один угадал 6 номеров?

10.1. По данной реализации выборки $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$:

а) построить графики эмпирической функции распределения, гистограммы и полигона частот (число промежутков выбрать в соответствии с формулой Стеджеса);

б) вычислить выборочные среднее, дисперсию, асимметрию и эксцесс.

Вариант 1. (1; 2; 0; 0; 4; 6; 6; 2; 3)
Вариант 2. (0; 7; 1; 0; -1; 6; -1; 2; 3; 4)
Вариант 3. (8; 2; 3; 3; 1; 5; 5; 2)
Вариант 4. (-1; 4; 1; 1; -1; 0; 3; 2; 3)
Вариант 5. (3; -2; -4; 0; -4; 2; 1; 0; 0; 0)
Вариант 6. (1; 2; 0; 0; 4; 6; 6; 2; 3)
Вариант 7. (1; 2; 0; 0; 4; 6; 6; 2; 3)
Вариант 8. (3; -4; 1; 2; 2; -6; 5; 3; -4)
Вариант 9. (-2; 2; 4; -2; 7; -3; 0; 2; 0; -1)
Вариант 10. (-1; 3; 1; 0; -3; 8; -3; 2)
Вариант 11. (0; 0; 0; 0; 1; 5; 4; 2; 1; 3)
Вариант 12. (1; -2; 0; 0; -4; 6; -6; -2; 3)
Вариант 13. (1; 2; 8; 8; 4; 1; 1; 2; 3)
Вариант 14. (5; -2; -3; 0; 4; 0; 5; 2)
Вариант 15. (4; 0; 4; 0; 2; 2; 2)

10.2. Найти оценки параметра по первому и второму моменту.

Вариант 1. Случайные величины принимают значения 0, 1, 2 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X=0\}=(1-p)^2, \mathbf{P}\{X=1\}=2p(1-p), \mathbf{P}\{X=2\}=p^2.$$

Вариант 2. Плотность распределения равна

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta}e^{-x^2/\theta} & \text{при } x>0;\\ 0 & \text{при } x\le 0.\end{cases}$$

Вариант 3. Плотность распределения равна

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta}e^{-x^3/\theta} & \text{при } x>0;\\ 0 & \text{при } x\le 0.\end{cases}$$

Вариант 4. Плотность распределения равна

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x>0;\\ 0 & \text{при } x\le 0.\end{cases}$$

Вариант 5. Случайные величины принимают значения 1, 2, 3 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X=1\}=p^2, \mathbf{P}\{X=2\}=2p(1-p), \mathbf{P}\{X=3\}=(1-p)^2.$$

Вариант 6. Плотность распределения равна

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{x}}{2\theta}e^{-x\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x>0;\\ 0 & \text{при } x\le 0.\end{cases}$$

Вариант 7. Плотность распределения равна

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}x^{-(\theta+1)/\theta} & \text{при } x>1;\\ 0 & \text{при } x\le 1.\end{cases}$$

Вариант 8. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 1)x^{-\theta} & \text{при } x>1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

Вариант 9. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta^2} e^{-x/\theta} & \text{при } x>0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 10. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2\theta^3} e^{-x/\theta} & \text{при } x>0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 11. Случайные величины принимают значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = (1-p)^3, \mathbf{P}\{X = 1\} = 3p(1-p)^2,$$

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = 3p^2(1-p), \mathbf{P}\{X = 3\} = p^3.$$

Вариант 12. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi\theta}} e^{-x^2/\theta} & \text{при } x>0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 13. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{\theta} e^{-x^4/\theta} & \text{при } x>0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 14. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\theta} e^{-2x/\theta} & \text{при } x>0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 15. Случайные величины принимают значения 2, 3, 4 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = p^2, \mathbf{P}\{X = 3\} = 2p(1-p), \mathbf{P}\{X = 4\} = (1-p)^2.$$

10.3. По данной реализации выборки $\vec{x} = (0;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1)$:

а) построить график реализации эмпирической функции распределения;

б) вычислить реализации выборочного среднего и выборочной дисперсии.

10.4. По реализации выборки 1; 0; 1; 1; 0; 1; 0; 0; 0; 1 вычислить реализации выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочного среднеквадратического отклонения, несмещенной выборочной дисперсии, выборочных асимметрии и эксцесса.

10.5. Пусть выборка из нормального распределения с параметрами a, σ^2. Вычислить $\mathbf{E}\overline{X}, \mathbf{D}\overline{X}$. Какое распределение имеет случайная величина $\overline{X}$?

10.6. Пассажир маршрутного такси измерил 8 раз время ожидания такси и получил следующие результаты (в минутах): 8; 4; 5; 4; 2; 15; 1; 6. У него есть две гипотезы относительно графика движения такси: либо график движения соблюдается, и время ожидания имеет равномерное распределение на отрезке $[0;\theta]$, либо график движения не соблюдается, и время ожидания имеет показательное распределение с параметром λ.

а) Вычислить реализации оценок параметров θ и λ, используя оценки $\tilde{\theta}_2 = (n+1)X_{(n)}/n$ и $\tilde{\lambda}_2 = \dfrac{n-1}{n\overline{X}}$.

б) Построить на одном графике реализацию эмпирической функции распределения и теоретические функции распределения равномерного и показательного законов, в которые вместо неизвестных параметров подставлены реализации их оценок.

в) Построить на одном графике реализацию гистограммы и теоретические плотности распределения равномерного и показательного законов, в которые вместо неизвестных параметров подставлены реализации их оценок.

г) На основании проведенного исследования сделать вывод о том, какая из гипотез выглядит более соответствующей экспериментальным данным.

10.7. По выборке $(X_1,...,X_n)$ из бернуллиевского распределения B_p с неизвестным параметром $p \in (0;1)$ построить оценки параметра p:

а) по первому моменту;

б) по второму моменту;

в) по произвольному k-му моменту.

Можно ли отдать предпочтение какой-либо из построенных оценок? Исследовать их состоятельность и несмещенность.

10.8. По выборке $(X_1,...,X_n)$ из биномиального распределения $B_{m,p}$ построить оценки методом моментов:

а) параметра p по первому и по второму моменту при известном $m > 0$;

б) параметров p и m.

Исследовать состоятельность построенных оценок.

10.9. Используя метод моментов, построить бесконечную последовательность различных оценок параметра θ равномерного распределения на отрезке $[0;\theta]$. Будут ли полученные оценки состоятельными?

10.10. С помощью метода моментов построить оценку параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность:

а) $\theta t^{\theta-1}$ при $t \in [0;1]$; б) $2t/\theta^2$ при $t \in [0;\theta]$.

Исследовать полученные оценки на состоятельность.

10.11. Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} 3t^2\theta^{-3}, & t \in [0;\theta]; \\ 0, & t \notin [0;\theta]. \end{cases}$$

Найти оценку параметра $\theta > 0$ методом моментов, исследовать ее на несмещенность и состоятельность.

10.12. Методом моментов найти оценку параметра $\alpha > 0$ по выборке из показательного распределения с плотностью $f_\alpha(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, $t > 0$. Будет ли оценка несмещенной и состоятельной?

10.13. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод моментов, построить оценки:
а) неизвестного математического ожидания α ;
б) неизвестной дисперсии σ^2, если α известно;
в) неизвестной дисперсии σ^2, если α неизвестно.
Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.
11.1. В задаче 10.2 найти оценку максимального правдоподобия и исследовать ее состоятельность.
11.2. Для данной реализации $\vec{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ рассмотреть трендовые трехпараметрические модели:
а) модель с синусоидальным трендом

$$Y_j = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi j}{n} + b_1 \sin\frac{2\pi j}{n} + \varepsilon_j;$$

б) модель с квадратическим трендом

$$Y_j = a + bj + cj^2 + \varepsilon_j.$$

Оценки параметров найти по методу наименьших квадратов.
Для каждой из моделей вычислить долю объясненной дисперсии.
Выбрать ту модель, для которой доля объясненной дисперсии является наибольшей. Построить график выбранной линии регрессии.
Вариант 1. -1,8 -6,4 -13,3 -22,2
Вариант 2. 0,6 3,1 3,6 1,6
Вариант 3. 4,8 3,1 0,1 -4,6
Вариант 4. -2,0 0,0 2,8 2,5
Вариант 5. 1,8 -2,6 -9,7 -19,2
Вариант 6. 5,5 0,5 -0,7 2,6
Вариант 7. -1,5 0,1 4,3 10,1
Вариант 8. -3,1 -0,7 2,7 1,7
Вариант 9. -0,4 -4,8 -11,6 -21,2
Вариант 10. 1,6 4,2 5,4 3,0
Вариант 11. 3,9 3,3 -0,1 -5,1
Вариант 12. -3,0 0,0 2,0 2,2
Вариант 13. 2,4 -2,6 -10,0 -19,0
Вариант 14. 5,3 0,2 -0,9 3,3
Вариант 15. 2,2 0,2 3,7 10,5
11.3. По выборке $(X_1, ..., X_n)$ из бернуллиевского распределения B_p с неизвестным параметром $p \in (0;1)$ построить оценку параметра p методом максимального правдоподобия. (Указание: показать, что вероятность попадания в точку t для элементов выборки равна $f(t, p) = p^t(1-p)^{1-t}$, где t может принимать только два значения — 0 и 1). Исследовать состоятельность и несмещенность полученной оценки.
11.4. По выборке $(X_1, ..., X_n)$ из биномиального распределения $B_{m,p}$ построить оценку максимального правдоподобия параметра p при известном $m > 0$. Исследовать состоятельность и несмещенность оценки.
11.5. По выборке из показательного распределения E_α построить оценку максимального правдоподобия параметра $\alpha > 0$. Исследовать состоятельность оценки.
11.6. Построить оценку максимального правдоподобия по выборке из распределения Парето с плотностью

$$f_\theta(t)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{t^{\theta+1}}, & t\ge 1;\\ 0, & t<1.\end{cases}$$

Доказать состоятельность полученной оценки.

11.7. Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t)=\begin{cases}e^{\theta-t}, & t\ge \theta;\\ 0, & t<\theta.\end{cases}$$

Найти оценку для θ:

а) методом моментов;

б) методом максимального правдоподобия.

Будут ли полученные оценки состоятельными? Вычислить смещения оценок и получить исправленные несмещенные оценки.

11.8. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод максимального правдоподобия, построить оценки:

а) неизвестного математического ожидания α;

б) неизвестной дисперсии σ^2, если α известно;

в) неизвестной дисперсии σ^2, если α неизвестно.

Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

11.9. Пусть $Y_i = x_i + \theta + \varepsilon_i$, $i=1,\dots,n$. Здесь $x_i,\theta\in\mathbf{R}$. Найти оценку для θ по методу наименьших квадратов. Найти оценку дисперсии регрессионных ошибок σ^2.

11.10. Пусть $Y_i=\theta x_i+\varepsilon_i$, $i=1,\dots,n$. Здесь $x_i,\theta\in\mathbf{R}$. Выяснить, для каких значений x_i выполнены предположения теоремы Гаусса—Маркова. Найти оценку для θ по методу наименьших квадратов. Найти оценку дисперсии регрессионных ошибок σ^2.

11.11. Концентрация лекарства $Y>0$ в крови пациента обратно пропорциональна массе тела $x>0$. Найти оценку коэффициента пропорциональности для следующих моделей:

1) $Y_i=\theta/x_i+\varepsilon_i$;

2) $\ln Y_i=\ln(\theta/x_i)+\varepsilon_i$;

$i=1,\dots,n$. Найти оценку параметра θ в каждой модели. Найти дисперсию оценки в первой модели и дисперсию логарифма оценки во второй модели.

11.12. Для регрессионной модели $Y_i=a+bx_i+\varepsilon_i$, $i=1,\dots,n$, найти оценки параметров a, b по методу наименьших квадратов. Найти ковариационную матрицу оценок. Найти оценку дисперсии регрессионных ошибок σ^2.

11.13. По реализации двумерной выборки $x_1=1$, $Y_1=0$, $x_2=2$, $Y_2=2{,}5$, $x_3=3$, $Y_3=0{,}5$, найти реализации оценок параметров модели из предыдущей задачи. Вычислить реализацию коэффициента детерминации.

12.1. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти точечные оценки и доверительные интервалы уровня 0,95 для математического ожидания и дисперсии. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому отклонению, и график оценки плотности распределения.

Вариант 1. 2,3 1,7 2,7 2,0 2,0 1,6

Вариант 2. 1,6 1,9 2,8 2,2 2,2 1,9

Вариант 3. 2,3 2,8 2,7 2,7 2,2 0,8

Вариант 4. 2,0 1,5 2,2 2,1 2,0 2,0

Вариант 5. 2,9 2,3 2,3 1,5 2,1 2,0

Вариант 6. 2,0 1,8 0,9 1,9 1,4 2,0
Вариант 7. 1,9 1,6 2,1 0,7 1,4 2,2
Вариант 8. 3,0 0,4 2,2 0,2 2,6 1,7
Вариант 9. 2,1 1,5 1,8 2,0 1,8 1,4
Вариант 10. 1,5 1,7 2,2 1,7 2,7 2,7
Вариант 11. 1,6 2,1 1,9 1,8 0,5 3,1
Вариант 12. 1,9 2,6 2,1 2,9 1,6 1,0
Вариант 13. 2,4 1,2 2,3 2,9 2,6 1,6
Вариант 14. 2,4 1,5 2,2 2,2 2,0 1,6
Вариант 15. 1,7 2,1 3,2 2,0 3,5 3,1
12.2. Пусть элементы выборки $\vec{X}$ имеют плотность распределения

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+(t-\theta)^2)}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Здесь θ — неизвестный параметр, $\theta \in \mathbf{R}$. Построить точный доверительный интервал для параметра θ по одному наблюдению ($n = 1$).
12.3. По выборке из распределения Бернулли с параметром p, $0 < p < 1$, построить асимптотический доверительный интервал для параметра p.
12.4. Дана выборка из геометрического распределения с параметром p, $0 < p < 1$. Построить асимптотический доверительный интервал для параметра p.
12.5. По выборке из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$ построить асимптотический доверительный интервал для параметра λ.
12.6. Дана выборка из распределения с плотностью $e^{-|t-a|}/2$, $a \in \mathbf{R}$. Построить асимптотический доверительный интервал для параметра a.
12.7. Известно, что измерения величины a независимы, имеют нормальное распределение с математическим ожиданием a (то есть отсутствует систематическая погрешность) и стандартным отклонением 10 мм. Результаты 4 измерений дали среднее значение 512 мм. Найти доверительный интервал для параметра a уровня 0,95; уровня 0,998.
12.8. Известно, что измерения величины a независимы, имеют нормальное распределение с математическим ожиданием a (то есть отсутствует систематическая погрешность) и стандартным отклонением σ. Результаты 100 измерений эталонной длины 1 м дали выборочное среднее 1,01 м и выборочный второй момент 1,04 м^2. Найти доверительный интервал для стандартного отклонения уровня 0,9; уровня 0,99.
12.9. По выборке объема 25 из нормального распределения подсчитаны выборочное среднее 2,1 и выборочный второй момент 4,42. Построить точные доверительные интервалы уровня 0,95 для параметров нормального распределения.
13.1. По критерию Колмогорова и по критерию хи-квадрат Пирсона проверить гипотезу о том, что выборка из равномерного распределения на отрезке $[0;2]$. Оценить достигаемый уровень значимости и сделать вывод о том, принимается ли гипотеза на уровне 0,1; на уровне 0,01; на уровне 0,001.
Вариант 1. 0,2 1,3 0,2 1,9 1,5 1,5 1,1 0,5 0,3 1,8 0,5 1,3 0,9 1,9 1,9 2,0
Вариант 2. 1,3 1,5 1,8 1,1 1,4 1,6 0,7 1,4 1,5 0,4 0,1 1,6 0,1 0,9 0,4 1,5
Вариант 3. 1,7 1,5 0,8 1,4 1,3 0,3 0,7 1,2 0,4 0,6 0,6 1,9 1,8 1,3 0,7 0,2
Вариант 4. 0,6 0,5 0,0 0,5 0,5 0,1 0,4 1,1 1,2 1,0 1,8 0,1 1,2 0,0 0,0 1,4
Вариант 5. 1,9 1,3 1,5 0,7 0,0 0,5 0,4 1,6 1,1 1,7 1,9 0,6 1,9 0,8 1,2 0,7
Вариант 6. 1,0 0,9 1,0 0,6 0,0 1,4 1,4 1,2 0,2 1,4 1,7 1,4 0,2 1,9 1,8 1,4
Вариант 7. 1,6 0,6 1,9 0,6 1,2 1,8 1,2 1,1 1,4 0,3 1,5 0,8 1,1 1,4 1,9 1,2
Вариант 8. 1,2 1,3 0,6 1,8 0,1 1,5 1,0 0,5 0,2 0,8 0,6 0,9 1,3 1,9 1,6 0,5
Вариант 9. 1,7 1,1 0,3 0,2 0,5 0,5 1,6 1,4 1,5 1,3 1,6 0,6 1,8 0,8 0,8 0,3

Вариант 10. 1,4 0,7 0,1 0,6 0,5 1,3 0,3 1,6 0,2 0,8 1,1 0,1 1,3 1,1 0,7 1,8
Вариант 11. 0,3 1,8 0,9 0,3 1,9 1,5 0,9 0,0 0,9 1,2 0,4 0,9 0,5 0,6 1,3 0,1
Вариант 12. 0,9 0,9 0,9 1,0 2,0 0,9 0,3 0,3 1,0 0,1 1,5 0,7 0,4 0,5 0,3 2,0
Вариант 13. 0,8 0,7 1,8 0,3 1,0 1,4 1,4 0,9 0,2 1,9 2,0 1,4 0,6 0,7 1,6 0,9
Вариант 14. 1,1 1,2 0,6 1,7 1,1 0,9 0,4 0,0 0,8 1,7 1,8 0,1 1,2 0,6 1,3 0,6
Вариант 15. 1,9 1,7 1,8 1,8 2,0 1,7 0,1 0,1 1,0 0,7 1,8 2,0 1,4 0,0 0,6 1,2

13.2. Крупная партия товаров может содержать долю дефектных изделий. Поставщик полагает, что эта доля составляет 3%, а покупатель — 10%. Условия поставки: если при проверке 20 случайным образом отобранных товаров обнаружено не более одного дефектного, то партия принимается на условиях поставщика, в противном случае — на условиях покупателя. Требуется определить:

1) каковы статистические гипотезы, статистика критерия, область ее значений, критическая область;

2) какое распределение имеет статистика критерия, в чем состоят ошибки первого и второго рода и каковы их вероятности.

13.3. Имеется выборка объема 1 из нормального распределения $\Phi_{a,1}$. Проверяются простые гипотезы $H_0 : a = 0$, $H_1 : a = 1$. Используется следующий критерий (при заданной постоянной c):

$$H_0 \Leftrightarrow X_1 \le c.$$

Вычислить, в зависимости от c, вероятности ошибок первого и второго рода.

13.4. Используя конструкции доверительного интервала, построить критерий точного уровня ε для проверки гипотезы $\mathrm{H} : \theta = 1$, если:

а) выборка из нормального распределения с параметрами $\theta, 1$;

б) выборка из нормального распределения с параметрами $1, \theta$.

13.5. Построить критерий, обладающий нулевыми вероятностями ошибок, для проверки гипотез H_0 : выборка из нормального распределения; H_1 : выборка из распределения Пуассона.

13.6. Пусть выборка из нормального распределения с параметрами $a, 1$. Для проверки гипотез $\mathrm{H}_0 : a = 0$ против $\mathrm{H}_1 : a = 1$ используется следующий критерий: H_0 принимается, если $X_{(n)} < 3$, и отвергается в противном случае. Найти вероятности ошибок.

13.7. Вычислить значение статистики Колмогорова по реализации выборки (1,1; 0,4; 0,2; 3,2), если основная гипотеза состоит в том, что распределение элементов выборки — равномерное на [0, 4].

13.8. Вычислить достигнутый уровень значимости критерия Колмогорова, если объем выборки равен 100, а $\sup_{-\infty<t<\infty} |F_n^*(t) - F_0(t)| = 0,2$.

13.9. При 4040 бросаниях монеты Бюффон получил $\nu_1 = 2048$ выпадений герба и $\nu_2 = n - \nu_1 = 1992$ выпадений решетки. Согласуется ли это с гипотезой о том, что монета правильная, при уровне значимости 0,1? С каким предельным уровнем значимости может быть принята эта гипотеза?

13.10. При $n = 4000$ независимых испытаний события $A1, A2, A3$, составляющие полную группу, осуществились соответственно 1905, 1015 и 1080 раз. Проверить, согласуются ли эти данные при уровне значимости 0,05 с гипотезой H_0: $p_1 = 1/2, p_2 = p_3 = 1/4$, где $p_j = \mathbf{P}(A_j)$. Найти достигнутый уровень значимости.

13.11. В экспериментах с селекцией гороха Мендель наблюдал частоты различных видов семян, полученных при скрещивании растений с круглыми желтыми семенами и растений с морщинистыми зелеными семенами. Эти данные и значения теоретических вероятностей по теории наследственности приведены в следующей таблице:

Семена	Частота	Вероятность
Круглые и желтые	315	9/16
Морщинистые и желтые	101	3/16
Круглые и зеленые	108	3/16
Морщинистые и зеленые	32	1/16
$\sum$	n=556	1

Следует проверить гипотезу H_0 о согласовании частотных данных с теоретическими вероятностями (на уровне значимости 0,1) и найти достигнутый уровень значимости.

13.12. В таблице приведены числа m_i участков равной площади 0,25 км^2 южной части Лондона, на каждый из которых приходилось по i попаданий самолетов-снарядов во время второй мировой войны. Проверить согласие опытных данных с законом распределения Пуассона, приняв за уровень значимости $\alpha = 0,05$:

i	0	1	2	3	4	7	Итого
m_i	229	211	93	35	7	1	$\sum m_i = 576$

Варианты контрольных работ

Вариант 1

1. Бросают 3 игральные кости. Какова вероятность того, что на них выпадет разное число очков?
2. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:

Вероятность выхода из строя каждого элемента A_k равна 0,02. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.
3. Одинаковые детали поступают на сборку с трех автоматов. Первый автомат дает 20 %, второй 30 %, третий 50 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого автомата составляет 2,5 %, второго — 2 %, третьего — 2,5 %. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали. Найти вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на первом автомате.
4. Распределение Парето приближенно описывает распределение доходов физических лиц. Плотность распределения равна

$$f(t) = \begin{cases} At^{-\alpha} & \text{при } t \geq \theta; \\ 0 & \text{при } t < \theta. \end{cases}$$

Здесь $\alpha > 2$, $\theta > 0$ — параметры распределения, A — нормирующая константа. Найти константу A. Вычислить значение параметра α, при котором математическое ожидание превосходит значение параметра θ в 3 раза.
5. Случайные величины X, Y принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями. Задать их совместное распределение так, чтобы $\mathbf{E}XY = 0$. Найти в этом случае $\rho(X,Y)$.
6. Число опечаток на странице книги имеет распределение Пуассона с параметром 2. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,9 лежит число опечаток в книге из 400 страниц. Напомним, что $\Phi(1,64) \approx 0,95$.

Вариант 2

1. В студенческой группе 15 юношей и 10 девушек. На университетский праздничный бал группа получила только 2 пригласительных билета, которые разыгрываются по жребию. Какова вероятность того, что на бал попадет разнополая пара?
2. Рабочий обслуживает 4 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,6, для второго

— 0,8, для третьего — 0,9, для четвертого — 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы один из станков в течение часа не потребует внимания рабочего.

3. Станок обрабатывает 2 вида деталей A и B, причем время работы распределяется между ними в соотношении 1:4. При обработке детали вида A он работает с максимальной для него нагрузкой в течение 70 % времени, при обработке детали вида B — 50 % времени. В случайный момент времени станок работал с максимальной нагрузкой. Определить вероятность того, что в это время он обрабатывал деталь вида A; вида B.

4. Скорость V молекул газа имеет плотность распределения

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{v^2}{\sigma^3}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-v^2/(2\sigma^2)} & \text{при } v\geq 0;\\ 0 & \text{при } v<0\end{cases}$$

(распределение Максвелла). Определить математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины V.

5. Случайные величины X, Y принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями. Задать их совместное распределение так, чтобы $\rho(X,Y)=-1/2$. Найти в этом случае $\mathbf{E}XY$.

6. Маршрут разбит на 900 участков. Погрешность измерений длины каждого из них распределена по нормальному закону с нулевым средним и стандартным отклонением 5 метров. Найти, в каких пределах лежит суммарная погрешность с вероятностью 0,95. Напомним, что $\Phi(1,96)\approx 0,975$.

Вариант 3

1. В шахматном турнире участвуют 10 человек, которые разбиваются на пары по жребию. Какова вероятность того, что два самых сильных шахматиста попадут в одну пару?

2. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:

Вероятность выхода из строя элемента A_k равна 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь не будет пропускать ток.

3. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат дает 80 %, а второй 20 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого автомата составляет 1 %, а второго — 4 %. Деталь, изготовленная автоматом, оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом автомате?

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(t)=Ae^{-\alpha|t|}$ (распределение Лапласа). Здесь $\alpha>0$. Найти коэффициент A, вычислить математическое ожидание и стандартное отклонение. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, большее $1/\alpha$.

5. Случайные величины X, Y принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями. Задать их совместное распределение так, чтобы $\mathbf{E}XY=0,4$. Найти в этом случае $\rho(X,Y)$.

6. Количество воды, расходуемое жителями одной квартиры в сутки, имеет показательное распределение со средним значением 100 литров. Найти, какого количества воды достаточно с вероятностью 0,975 для удовлетворения потребностей жильцов 25 квартир. Напомним, что $\Phi(1,96)\approx 0,975$.

Вариант 4

1. Шесть книг на полке расставлены случайным образом. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом (в любом порядке).

2. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Найти вероятность того, что будет сделано не более трех выстрелов.

3. Студент выучил к экзамену только 20 вопросов из 30. Для сдачи экзамена достаточно ответить на два из трех разных вопросов. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан? Какова вероятность того, что студент ответил на все три вопроса, если известно, что он сдал экзамен?
4. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(t-a)^2/(2\sigma^2)} & \text{при } t\in[a;\infty);\\ 0 & \text{при } t<a.\end{cases}$$

Найти нормирующую константу A, вычислить математическое ожидание. Построить график плотности распределения при $a=\sigma=1$.
5. Случайные величины X, Y принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями. Задать их совместное распределение так, чтобы $\rho(X,Y)=-1/3$. Найти в этом случае $\mathbf{E}XY$.
6. Количество 10-копеечных монет, необходимое для выдачи каждой сдачи в кассе, принимает значения от 0 до 4 с равными вероятностями. Найти, сколько должно быть 10-копеечных монет в кассе, чтобы с вероятностью 0,95 их хватило на 200 выдач сдачи. Напомним, что $\Phi(1,64)\approx 0,95$.

1. На отрезке AB наудачу выбираются две точки M и N. Какова вероятность того, что точка M окажется ближе к точке N, чем к точке A?
2. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:

Вероятность выхода из строя элемента A_1 равна 0,1, остальных элементов A_k — по 0,04. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.
3. Прибор состоит из двух независимо работающих блоков, вероятности отказа которых за смену равны соответственно 0,05 и 0,08. Вероятность выхода из строя прибора при отказе одного из блоков равна 0,8; при отказе обоих блоков — 1. Определить вероятность выхода прибора из строя за смену. Найти вероятность того, что отказали оба блока, если известно, что прибор вышел из строя.
4. Распределение Парето приближенно описывает распределение доходов физических лиц. Плотность распределения равна

$$f(t)=\begin{cases}At^{-\alpha-1} & \text{при } t\geq\theta;\\ 0 & \text{при } t<\theta.\end{cases}$$

Здесь $\alpha>1$, $\theta>0$ — параметры распределения, A — нормирующая константа. Найти константу A. Вычислить значение параметра α, при котором математическое ожидание превосходит значение параметра θ в 10 раз.
5. Случайные величины X, Y принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями. Задать их совместное распределение так, чтобы $\mathbf{E}XY=0,5$. Найти в этом случае $\rho(X,Y)$.
6. Время ожидания автобуса пассажиром имеет показательное распределение со средним значением 10 минут. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,95 лежит суммарное время, затраченное на ожидание автобуса за 48 поездок. Напомним, что $\Phi(1,96)\approx 0,975$.

Вариант 5
1. Номер лотерейного билета состоит из 3 цифр. Какова вероятность того, что все цифры взятого наудачу билета окажутся различными?
2. По мишени по одному разу стреляют 3 стрелка. Вероятность попадания для первого равна 0,5, для второго — 0,6, для третьего — 0,7. Найти вероятность ровно двух попаданий.

3. В семи урнах содержится по 2 белых и 2 черных шара, а в трех урнах по 7 белых и 3 черных шара. Какова вероятность, что из урны, взятой наудачу, будет извлечен белый шар? Найти вероятность, что шар извлечен из урны с 7 белыми и 3 черными шарами, если он оказался белым.
4. Время достижения стандартным броуновским движением уровня a имеет плотность распределения

$$f(t)=\begin{cases} At^{-3/2}e^{-a^2/(2t)} & \text{при } t\geq 0; \\ 0 & \text{при } t<0. \end{cases}$$

Найти нормирующую константу A. Доказать, что математическое ожидание времени достижения не существует. (Сделать замену $a/\sqrt{t}=y$).
5. Случайные величины X, Y принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями. Задать их совместное распределение так, чтобы $\rho(X,Y)=-1$. Найти в этом случае $\mathbf{E}XY$.
6. Суммарное время работы машины складывается из интервалов времени, каждый из которых измеряется со стандартным отклонением в 1 минуту. Найти число интервалов времени такое, чтобы фактическое время работы отличалось от измеренного по модулю не больше, чем на 2 часа, с вероятностью не менее 0,95. Напомним, что $\Phi(1,96)\approx 0,975$.

Вариант 6
1. В бригаде 3 рабочих. Какова вероятность того, что по крайней мере двое из них родились в один и тот же день недели? Считать, что вероятности родиться в каждый из дней одинаковы.
2. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:

Вероятность выхода из строя элемента A_2 равна 0,01, остальных элементов A_k — по 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.
3. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 3:2. Из-за помех искажается в среднем 25 % сигналов «точка» и 20 % сигналов «тире», причем «точка» искажается в «тире», а «тире» в «точку». Найти вероятность искажения сигнала. Определить вероятность того, что передавали «тире», если известно, что приняли «точку».
4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{A}{1+\left(t/\theta\right)^2} & \text{при } |t|\leq\theta; \\ 0 & \text{при } |t|>\theta \end{cases}$$

(усеченное распределение Коши). Найти коэффициент A, вычислить математическое ожидание и стандартное отклонение. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, большее $\theta/\sqrt{3}$.
5. Случайные величины X, Y принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями. Задать их совместное распределение так, чтобы $\mathbf{E}XY=1/3$. Найти в этом случае $\rho(X,Y)$.
6. Число сериалов, просматриваемых за день выбранным наудачу студентом, имеет распределение Пуассона с параметром 0,8. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,9 лежит число просмотров сериалов за день студентами группы из 20 человек. Напомним, что $\Phi(1,64)\approx 0,95$.

Вариант 7
1. Молодой человек договорился встретиться с девушкой между 9 и 10 часами и обещал ждать её до 10 часов. Девушка обещала ждать его 10 минут, если придет раньше. Найти вероятность

того, что они встретятся. Предполагается, что моменты их прихода равновероятны в течение часа.
2. При передаче текста в среднем 5 % букв искажается и принимается неверно. Передано слово из 6 букв. Какова вероятность того, что все буквы слова будут приняты правильно? Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга.
3. В тире имеется 6 одинаковых на вид ружей. Вероятность попадания в мишень для двух из них по 0,9, для трех по 0,8 и для одного 0,3. Какова вероятность того, что стрелок попадет в мишень, если он выбирает ружье наудачу? Какова вероятность того, что было выбрано ружье, для которого вероятность попадания 0,3, при условии, что стрелок попал в мишень?
4. Максимальный нуль стандартного броуновского движения на $[0;1]$ имеет координату X с непрерывной функцией распределения

$$F(t)=\begin{cases} A\arcsin\sqrt{t} & \text{при } t\in[0;1];\\ 1 & \text{при } t>1. \end{cases}$$

Найти константу A. Построить графики функции распределения и плотности распределения случайной величины X. Вычислить математическое ожидание случайной величины $\sqrt{X}$.
5. Случайные величины X, Y принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями. Задать их совместное распределение так, чтобы $\rho(X,Y)=0{,}1$. Найти в этом случае $\mathbf{E}XY$.
6. Время ожидания автобуса пассажиром имеет показательное распределение со средним значением 8 минут. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,95 лежит суммарное время ожидания автобуса за 100 поездок. Напомним, что $\Phi(1{,}96)\approx 0{,}975$.

Билеты дифференцированного зачета

Билет 1
1. Понятие вероятности. Классическое определение вероятности. Геометрические вероятности. Задача о встрече. События, операции над ними. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.
2. Плотность распределения равна

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x^3}{\theta}e^{-x^4/\theta} & \text{при } x>0;\\ 0 & \text{при } x\le 0. \end{cases}$$

Найти оценку максимального правдоподобия параметра $\theta>0$.
3. По реализациям независимых выборок $\vec{X},\vec{Y}$ объемов 6 и 10 из нормального распределения с известной дисперсией $\sigma^2=1$ вычислены значения статистик $\overline{X}=2$, $\overline{Y}=-2$. Найти (выразить через функцию Лапласа) реально достигнутый уровень значимости гипотезы о равенстве математических ожиданий против двусторонней альтернативы.

Билет 2
1. Элементы комбинаторики. Выборки с возвращением и без возвращения. Размещение частиц по ячейкам. Статистики Максвелла—Больцмана, Бозе—Эйнштейна, Ферми—Дирака. Гипергеометрическое распределение.
2. Случайные величины принимают значения 2, 3, 4 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X=2\}=p^2,\mathbf{P}\{X=3\}=p(1-p),\mathbf{P}\{X=4\}=1-p.$$

Найти оценку максимального правдоподобия параметра $0<p<1$.
3. По реализациям независимых выборок $\vec{X},\vec{Y}$ объема 32 из нормального распределения с известной дисперсией $\sigma^2=4$ вычислены значения статистик $\overline{X}=2$, $\overline{Y}=10$. Найти (выразить

через функцию Лапласа) реально достигнутый уровень значимости гипотезы о равенстве математических ожиданий против двусторонней альтернативы,

Билет 3

1. Независимые события. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Время ожидания в схеме Бернулли.
2. Плотность распределения равна

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}e^{-2x/\theta} & \text{при } x>0;\\ 0 & \text{при } x\le 0.\end{cases}$$

Найти оценку максимального правдоподобия параметра $\theta>0$.
3. В 400 независимых испытаниях событие произошло 220 раз. Согласуется ли это с гипотезой о том, что вероятность события 0,5, при уровне значимости 0,05? С каким предельным уровнем значимости может быть принята эта гипотеза? Выразить его через функцию Лапласа.

Билет 4

1. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
2. Используя метод максимального правдоподобия, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке $[-\theta,\theta]$, $\theta>0$.
3. В 100 независимых испытаниях событие произошло 20 раз. Согласуется ли это с гипотезой о том, что вероятность события 0,1, при уровне значимости 0,05? С каким предельным уровнем значимости может быть принята эта гипотеза? Выразить его через функцию Лапласа.

Билет 5

1. Случайные величины. Функции распределения и их свойства. Типы распределений: дискретный, абсолютно непрерывный, смешанный.
2. Используя метод максимального правдоподобия, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке $[\theta;\theta+1]$.
3. Вычислить достигнутый уровень значимости критерия Колмогорова, если объем выборки равен 100, а $\sup_{-\infty<t<\infty}|F_n^*(t)-F_0(t)|=0,3$.

Билет 6

1. Дискретные распределения. Преобразования дискретных случайных величин. Основные семейства дискретных распределений.
2. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод максимального правдоподобия, построить оценку неизвестного математического ожидания α. Исследовать ее на несмещенность и состоятельность.
3. Используя конструкцию доверительного интервала, построить критерий асимптотического уровня ε для проверки гипотезы $\mathrm{H}:\theta=1$ по выборке из показательного распредеения с параметром θ.

Билет 7

1. Абсолютно непрерывные распределения. Преобразования случайных величин с абсолютно непрерывным распределением. Основные семейства абсолютно непрерывных распределений.
2. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод максимального правдоподобия, построить оценку неизвестной дисперсии σ^2, если α известно. Исследовать ее на несмещенность и состоятельность.
3. Используя конструкцию доверительного интервала, построить критерий асимптотического уровня ε для проверки гипотезы $\mathrm{H}:\theta=1/2$ по выборке из распределения Бернулли с параметром θ.

Билет 8

1. Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.

2. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод максимального правдоподобия, построить оценку неизвестной дисперсии σ^2, если α неизвестно. Исследовать ее на несмещенность и состоятельность.

3. Используя конструкцию доверительного интервала, построить критерий асимптотического уровня ε для проверки гипотезы $\mathrm{H}: \theta = 1$ по выборке из распределения Пуассона с параметром θ.

Билет 9

1. Независимые случайные величины. Критерии независимости. Функции от независимых случайных величин.

2. По выборке $(X_1, ..., X_n)$ из распределения Лапласа с плотностью $f_\lambda(t) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|}$, $t \in \mathbf{R}$, построить оценку параметра $\lambda > 0$ методом максимального правдоподобия.

3. Основная гипотеза состоит в том, что распределение элементов выборки равномерное на отрезке от 0 до 3, а альтернативная — в том, что распределение равномерное на отрезке от 1 до 4. Критерий отвергает основную гипотезу, если $X_1 \geq C$. Найти C такое, чтобы вероятность ошибки 1 рода равнялась $1/3$. Какова при этом будет вероятность ошибки 2 рода?

Билет 10

1. Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры. Неравенство Маркова. Неравенство Йенсена.

2. Построить оценку максимального правдоподобия по выборке из распределения Парето с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{t^{\theta+1}}, & t \geq 1, \\ 0, & t < 1 \end{cases}.$$

Доказать состоятельность полученной оценки.

3. Основная гипотеза состоит в том, что распределение элементов выборки равномерное на отрезке от 0 до 2, а альтернативная — в том, что распределение равномерное на отрезке от 0 до 4. Критерий отвергает основную гипотезу, если $X_1 \geq C$. Найти C такое, чтобы вероятность ошибки 1 рода равнялась 0,1. Какова при этом будет вероятность ошибки 2 рода?

Билет 11

1. Моменты, вопросы их существования. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины. Их свойства. Примеры. Неравенство Чебышева.

2. Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} e^{\theta - t}, & t \geq \theta, \\ 0, & t < \theta. \end{cases}$$

Найти оценку для θ методом моментов. Будет ли полученная оценка несмещенной и состоятельной?

3. Основная гипотеза состоит в том, что вероятность успеха в испытании равна 0,9, а альтернативная — в том, что вероятность успеха 0,2. Критерий принимает основную гипотезу, если в 2 независимых испытаниях произошло не меньше 1 успеха. Найти вероятности ошибок 1 и 2 рода.

Билет 12

1. Ковариация. Коэффициент корреляции и его свойства.

2. Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} e^{\theta - t}, & t \ge \theta, \\ 0, & t < \theta. \end{cases}$$

Найти оценку для θ методом максимального правдоподобия. Будет ли полученная оценка несмещенной и состоятельной?
3. Основная гипотеза состоит в том, что вероятность успеха в испытании равна 0,9, а альтернативная — в том, что вероятность успеха 0,5. Критерий принимает основную гипотезу, если в 3 независимых испытаниях произошло 3 успеха. Найти вероятности ошибок 1 и 2 рода.

Билет 13
1. Матрица ковариаций. Многомерное нормальное распределение и его свойства.
2. Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке $[\theta, \theta+1]$. Исследовать полученную оценку на состоятельность.
3. По выборке из показательного распределения с параметром α построить доверительный интервал для параметра α асимптотического уровня $1-\varepsilon$.

Билет 14
1. Характеристические и производящие функции: определения и свойства. Распределение суммы независимых случайных величин, имеющих гамма-распределение.
2. Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$. Исследовать полученную оценку на состоятельность.
3. По выборке из распределения Пуассона с параметром λ построить доверительный интервал для параметра λ асимптотического уровня $1-\varepsilon$.

Билет 15
1. Распределение Максвелла—Больцмана. Распределение скоростей и энергий молекул газа. Распределение модуля скорости. Среднеквадратическая скорость.
2. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод моментов, построить оценку неизвестной дисперсии σ^2, если α неизвестно. Исследовать ее на несмещенность и состоятельность.
3. Пусть $Y_i = e^{\theta x_i + \varepsilon_i}$, $i = 1, \dots, n$. Здесь $x_i, \theta \in \mathbf{R}$. Найти оценку максимального правдоподобия для θ в модели нормальной регрессии.

Билет 16
1. Сходимость по распределению. Теорема о непрерывном соответствии. Сходимость по распределению к константе. Закон больших чисел Хинчина. Сходимость с вероятностью единица, ее свойства. Закон больших чисел Колмогорова.
2. Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} 3t^2\theta^{-3}, & t \in [0, \theta], \\ 0, & t \notin [0, \theta]. \end{cases}$$

Найти оценку параметра $\theta > 0$ методом максимального првдоподобия, исследовать ее состоятельность.
3. По выборке из распределения Бернулли с параметром p построить доверительный интервал для параметра p асимптотического уровня $1-\varepsilon$.

Билет 17
1. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра—Лапласа.

2. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод моментов, построить оценку неизвестной дисперсии σ^2, если α известно. Исследовать ее на несмещенность и состоятельность.
3. По выборке из равномерного распределения на отрезке от 0 до θ построить доверительный интервал для параметра θ асимптотического уровня $1-\varepsilon$.

Билет 18
1. Теорема Пуассона.
2. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод моментов, построить оценку неизвестного математического ожидания α. Исследовать ее на несмещенность и состоятельность.
3. Пусть $Y_i = x_i / \theta + \varepsilon_i$, $i = 1,...,n$. Здесь $x_i, \theta \in \mathbf{R}, \theta \neq 0$. Найти оценку максимального правдоподобия для θ в модели нормальной регрессии.

Билет 19
1. Моделирование случайных величин и векторов.
2. По выборке $(X_1,...,X_n)$ из распределения Лапласа с плотностью $f_\lambda(t) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|}$, $t \in \mathbf{R}$, построить оценку параметра $\lambda > 0$ методом моментов.
3. Пусть $Y_i = \theta x_i^2 + \varepsilon_i$, $i = 1,...,n$. Здесь $x_i, \theta \in \mathbf{R}$. Найти оценку максимального правдоподобия для θ в модели нормальной регрессии.

Билет 20
1. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко—Кантелли. Гистограмма и полигон частот.
2. Записать формулу для вычисления несмещенной выборочной дисперсии по выборке (X_1, X_2) объема 2. Найти ее математическое ожидание, если X_1 и X_2 принимают значения 0 и 1 с вероятностями по $1/2$.
3. Найти оценку параметра по первому моменту, проверить ее состоятельность и несмещенность и вычислить ее дисперсию, если элементы выборки имеют нормальное распределение с параметрами $a, 1$.

Билет 21
1. Задача оценивания неизвестных параметров. Несмещенность, состоятельность оценок. Выборочные моменты и их свойства. Выборочные асимметрия и эксцесс.
2. С помощью метода максимального правдоподобия построить оценку параметра $\theta > 0$, если элементы выборки имеют плотность распределения $2t/\theta^2$ при $t \in [0, \theta]$. Исследовать полученную оценку на состоятельность.
3. Найти оценку параметра по первому моменту, проверить ее состоятельность и несмещенность и вычислить ее дисперсию, если элементы выборки имеют показательное распределение с параметром $1/\theta$, $\theta > 0$.

Билет 22
1. Метод моментов. Состоятельность оценок, полученных методом моментов.
2. С помощью метода максимального правдоподобия построить оценку параметра $\theta > 0$, если элементы выборки имеют плотность распределения $\theta t^{\theta-1}$ при $t \in [0, 1]$. Исследовать полученную оценку на состоятельность.
3. Найти оценку параметра по первому моменту, проверить ее состоятельность и несмещенность и вычислить ее дисперсию, если элементы выборки имеют распределение Бернулли с параметром p.

Билет 23
1. Метод максимального правдоподобия.
2. При каких значениях параметра $\theta > 0$ распределения Парето с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{t^{\theta+1}}, & t \geq 1, \\ 0, & t < 1 \end{cases}$$

существует оценка параметра по первому моменту? Можно ли построить состоятельную оценку методом моментов в случае, когда оценки по первому моменту не существует?
3. Построить доверительный интервал для параметра α асимптотического уровня $1-\varepsilon$, если элементы выборки имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$.

Билет 24
1. Задача линейной регрессии. Оценивание параметров. Модели с полиномиальным и циклическим трендом.
2. По выборке $(X_1,...,X_n)$ методом моментов найти две различные оценки параметра $p \in (0,1)$, если известно, что
$P\{X_1 = 1\} = p/2, P\{X_1 = 2\} = p/2, P\{X_1 = 3\} = 1 - p$.
Будут ли полученные оценки состоятельными?
3. Пусть $Y_i = \theta / x_i^2 + \varepsilon_i$, $i = 1,...,n$. Здесь $x_i \neq 0, \theta \in \mathbf{R}$. Найти оценку максимального правдоподобия для θ в модели нормальной регрессии.

Билет 25
1. Распределения, связанные с нормальным (хи-квадрат, Стьюдента, Фишера).
2. Методом моментов найти оценку параметра $\alpha > 0$ по выборке из показательного распределения с плотностью $f_\alpha(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, $t > 0$. Будет ли оценка состоятельной?
3. Для выборки из распределения с плотностью $\frac{1}{a} e^{-t/a}$, $t \geq 0$, найти оценку параметра по первому моменту, проверить ее состоятельность и несмещенность и вычислить ее дисперсию.

Билет 26
1. Лемма Фишера. Теорема о свойствах выборочного среднего и выборочной дисперсии для выборок из нормальной совокупности.
2. Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} 3t^2\theta^{-3}, & t \in [0,\theta], \\ 0, & t \notin [0,\theta]. \end{cases}$$

Найти оценку параметра $\theta > 0$ методом моментов, исследовать ее на состоятельность.
3. Для выборки из распределения Пуассона с параметром λ найти оценку параметра по первому моменту, проверить ее состоятельность и несмещенность и вычислить ее дисперсию.

Билет 27
1. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.
2. С помощью метода моментов построить оценку параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность $2t/\theta^2$ при $t \in [0,\theta]$. Исследовать полученную оценку на состоятельность.
3. Для выборки из распределения Бернулли с параметром p найти оценку параметра по первому моменту, проверить ее состоятельность и несмещенность и вычислить ее дисперсию.

Билет 28
1. Асимптотические доверительные интервалы.

2. С помощью метода моментов построить оценку параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность $\theta t^{\theta-1}$ при $t \in [0,1]$. Исследовать полученную оценку на состоятельность.

3. Имеется выборка объема n из распределения с конечной ненулевой дисперсией. По этой выборке построены 2 оценки математического ожидания: среднее по всей выборке и первый элемент выборки. Сравнить дисперсии этих оценок.

Билет 29

1. Проверка гипотез, основные понятия. Критерии согласия Колмогорова, хи-квадрат. Построение критерия с помощью доверительного интервала.

2. Построить оценку максимального правдоподобия по выборке из распределения Парето с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{t^{\theta+1}}, & t \geq 1, \\ 0, & t < 1 \end{cases}.$$

Доказать состоятельность полученной оценки.

3. Пусть $Y_i = \theta \sin x_i + \varepsilon_i$, $i = 1,\ldots,n$. Здесь $x_i, \theta \in \mathbf{R}$. Найти оценку максимального правдоподобия для θ в модели нормальной регрессии.

Билет 30

1. Проверка гипотез в случае нескольких выборок. Критерий Колмогорова—Смирнова однородности двух выборок. Проверка гипотез о совпадении параметров двух нормальных совокупностей. Проверка гипотезы о некоррелированности компонент двумерной нормальной выборки.

2. Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} e^{\theta - t}, & t \geq \theta, \\ 0, & t < \theta. \end{cases}$$

Найти оценку для θ методом моментов. Будет ли полученная оценка несмещенной и состоятельной?

3. Основная гипотеза состоит в том, что вероятность успеха в испытании равна 0,8, а альтернативная — в том, что вероятность успеха 0,1. Критерий принимает основную гипотезу, если в 2 независимых испытаниях произошло не меньше 1 успеха. Найти вероятности ошибок 1 и 2 рода.

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

Лист актуализации рабочей программы
по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»
по направлению подготовки 03.03.02
Направленность (профиль): все профили

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного