

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

**Физический факультет
Кафедра высшей математики ФФ**



УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФ, д.ф.-м.н
В.Е.Блинов
_____ 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины
ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ**

направление подготовки: **03.03.02 Физика, Курс 3, семестр 5**
направленность (профиль): **Общая и фундаментальная физика**

Форма обучения
Очная

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	108	32	32		42				2	
Всего 108 часов / 3 зачётные единицы, из них: - контактная работа 66 часов - в интерактивных формах 32 часа										
Компетенции ОПК-1										

Ответственный за образовательную программу,

д.ф.-м.н., проф.

С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2022

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.	3
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.	4
3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.	5
4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий.	5
5. Перечень учебной литературы.	10
6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.	11
7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.	11
8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.	11
9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.	11
10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.	12

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Цель дисциплины «Векторный и тензорный анализ» — заполнение пробела, существующего между традиционными математическими дисциплинами и дисциплинами теоретической физики, подготовка студентов к лучшему восприятию последних, а также изложение математических методов, используемых в общей физике. Необходимость применения тензорного исчисления в современной физике вызвана объективными свойствами изучаемых явлений. Тензорное исчисление является наилучшим инструментом для исследования анизотропных сред в физике твердого тела. С помощью тензорного аппарата рассматриваются современные задачи теории упругости и пьезоэлектричества, классической динамики, теории относительности. Студенты должны научиться пользоваться изученным математическим аппаратом так, как это принято в физике, освоить типичные для физики приемы его применения и привыкнуть к наиболее распространенным в физической литературе системам обозначений

Общепрофессиональная компетенция ОПК-2 (способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей) в части формирования способности использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов векторного и тензорного анализа.

Учебный курс «Векторный и тензорный анализ» читается классическим способом: проводятся потоковые лекции, а также практические занятия по группам, в каждой из которых не более 15-и студентов. Все практические занятия проводятся в интерактивной форме. Обсуждаются идеи и способы решения поставленных задач, оптимальность предложенных решений. Поощряется элемент соревновательности. Автор наиболее удачного решения рассказывает его у доски. Существенным элементом образовательных технологий является не только умение студента найти решение задачи, но и способность доходчиво донести его до всей аудитории. Умение ответить на вопросы сокурсников и преподавателя развивает навыки, которые будут необходимы в дальнейшей профессиональной деятельности студента. Важнейшим элементом технологии является самостоятельное решение студентами и сдача заданий. Это единственная полностью индивидуальная форма обучения. Сдача заданий в устной форме преподавателю направлена на формирование коммуникативных навыков, умения объяснять, логически излагать решение, быстро отвечать на вопросы преподавателя. Студент рассказывает свое решение преподавателю, отвечает на дополнительные вопросы, решает одну - две простые задачи на ту же тему. Таким образом, триада: лекции + практические занятия + задания способствуют активному усвоению материала и позволяют студентам научиться применять теорию для решения задач.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 -Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности.	ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. ОПК -1.2. Использует теоретические основы базовых разделов	Знать математический аппарат теории тензорного исчисления, основные определения и понятия, относящиеся к темам ортогональные тензоры, тензорная алгебра и тензорный анализ, и способы их использования при решении конкретных физических задач.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
	<p>математических и естественно-научных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.</p> <p>ОПК -1.3 Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необходимых в профессиональной деятельности.</p>	<p>Уметь решать типовые учебные задачи тензорного анализа, определять необходимость привлечения дополнительных знаний из специальных разделов математики для решения профессиональных задач.</p> <p>Владеть методами тензорной алгебры, дифференцирования тензоров, и методами преобразования дифференциальных операторов в криволинейных системах координат, общими принципами применения векторного и тензорного анализа в фундаментальных разделах физики.</p>

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.

Предполагается, что к началу изучения курса студенты должны знать и уметь использовать основные разделы математического анализа, векторной алгебры и аналитической геометрии.

Изучение курса начинается с введения понятия аффинных ортогональных тензоров. Дальнейшее изучение курса приводит к общим понятиям вектора и тензора, определяются основные операции тензорной алгебры. Тензоры рассматриваются как обобщения понятий скаляр, вектор, матрица, линейный оператор, квадратичная форма. В курсе постоянно делается акцент на базовые понятия, показывается, что частные случаи тензоров уже были рассмотрены в курсах алгебры и математического анализа, изучавшихся на первом курсе. Подробно обсуждается понятие фундаментального тензора, его вычисление для различных пространств; для вектора вводятся понятия ковариантных, контравариантных и физических компонент, их связь и вычисление для различных систем координат. Далее вводится понятие геодезической, символы Кристоффеля первого и второго рода, их свойства, понятие ковариантной производной. Особое внимание уделяется криволинейным ортогональным системам координат. Для полного понимания понятия характера оператора ковариантного дифференцирования вводится понятие тензора Римана-Кристоффеля, обсуждается условие, при котором возможно изменять порядок ковариантного дифференцирования. В качестве иллюстрации студентам предлагается преобразование уравнений механики сплошной среды для криволинейной системы координат.

Курс «Векторный и тензорный анализ» имеет практическую направленность, дает студентам уверенное владение математическим аппаратом тензорной алгебры и анализа, что является условием усвоения физических курсов, использующих тензорный анализ.

3. Трудоемкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	108	32	32		42				2	
Всего 108 часов / 3 зачётные единицы, из них: - контактная работа 66 часов - в интерактивных формах 32 часа										
Компетенции ОПК-1										

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, дифференцированный зачёт.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

- текущий контроль успеваемости: контрольные работы, задания для самостоятельного решения;

- промежуточная аттестация: дифференцированный зачёт.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

- занятия лекционного типа – 32 часа;
- практические занятия – 32 часа;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 42 часа;
- промежуточная аттестация (дифференцированный зачёт) – 2 часа.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, дифференцированный зачёт) составляет 66 часов.

4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачётные единицы, 108 академических часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы	Сам. работа во	Сам. работа во		

				Лек- ции	Прак- тиче- ские зая- тия	время заня- тий (не включая период сес- сии	время проме- жуточ- ной ат- тестации		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	Понятие ортогонального тензора, его преобразование при переходе к новой системе координат, основные операции (сложение, произведение, свертка).	1	6	2	2	2			
2	Символы Кронекера и Леви-Чивиты в ортонормированном базисе.	2	6	2	2	2			
3	Теория определителей и векторная алгебра в тензорном изложении.	3	6	2	2	2			
4	Приведение тензора к главным осям. Тензор момента инерции как пример ортогонального тензора.	4	6	2	2	2			
5.	Неортогональные базисы. Системы координат и координаты вектора (ковариантные и контравариантные). Градиент вектора как пример ковариантного вектора. Тензор как полилинейная форма.	5	7	2	2	3			
6.	Примеры математических объектов, изменяю-	6	7	2	2	3			

	щихся по «тензорному» закону (линейные функционалы, квадратичные формы, линейные операторы), общее определение тензора. Операции над тензорами: сложение, произведение, свертка, симметрирование, альтернирование.								
7.	Теорема сокращения. Инвариант. Скалярное произведение и фундаментальный тензор. Поднимание и опускание индексов. Символы Кронекера и Леви–Чивиты в произвольном базисе (векторная алгебра в неортогональном базисе).	7	8	2	4	2			
8.	Контрольная работа №1	8	5	2		3			
9.	Пространство-время Минковского. Тензоры в псевдоэвклидовом пространстве и 4-векторы в пространстве-времени Минковского.	9	6	2	2	2			
10.	Криволинейные системы координат. Локальный базис. Коэффициенты Ламе. Координатная запись векторного поля в локальном базисе.	10	7	2	2	3			

	Примеры: полярная, сферическая, цилиндрическая и эллиптическая системы координат.								
11.	Метрический тензор в криволинейных координатах. Поднятие и опускание индексов в криволинейных координатах. Поверхность в евклидовом пространстве. Первая квадратичная форма поверхности. Кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности.	11	7	2	2	3			
12.	Геодезическая как кратчайшая траектория движения точки по поверхности. Символы Кристоффеля I и II рода. Понятие ковариантной производной.	12	10	2	4	4			
13.	Запись градиента, ротора, дивергенции и лапласиана в криволинейных координатах.	13	7	2	2	3			
14.	Геодезическая как кратчайшая траектория движения точки по поверхности. Параллельный	14	7	2	2	3			

	перенос. Ковариантное дифференцирование.								
15.	Понятие тензора Римана–Кристоффеля. Запись уравнений механики сплошной среды в тензорном виде.	15	6	2	2	2			
16.	Контрольная работа № 2.	16	5	2		3			
17.	Дифференцированный зачёт		2						2
Всего			108	32	32	42			2

Программа и основное содержание лекций (32 часа)

Ортогональные тензоры в геометрии и механике (8 часов)

Понятие ортогонального тензора, его преобразование при переходе к новой системе координат, основные операции (сложение, произведение, свертка). Символы Кронекера и Леви–Чивиты в ортонормированном базисе. Теория определителей и векторная алгебра в тензорном изложении. Приведение тензора к главным осям. Тензор момента инерции как пример ортогонального тензора.

Тензорная алгебра (10 часов)

Неортогональные базисы. Системы координат и координаты вектора (ковариантные и контравариантные). Градиент вектора как пример ковариантного вектора. Примеры математических объектов, изменяющихся по «тензорному» закону (линейные функционалы, квадратичные формы, линейные операторы), общее определение тензора. Операции над тензорами: сложение, произведение, свертка, симметрирование, альтернирование. Теорема сокращения. Инвариант. Скалярное произведение и фундаментальный тензор. Поднимание и опускание индексов. Символы Кронекера и Леви–Чивиты в произвольном базисе (векторная алгебра в неортогональном базисе). Пространство-время Минковского. Тензоры в псевдоевклидовом пространстве и 4-векторы в пространстве-времени Минковского. Тензор как полилинейная форма.

Тензорные поля (14 часов)

Криволинейные системы координат. Локальный базис. Коэффициенты Ламе. Координатная запись векторного поля в локальном базисе. Примеры полярная, сферическая, цилиндрическая и эллиптическая системы координат.

Метрический тензор в криволинейных координатах. Поднятие и опускание индексов в криволинейных координатах. Поверхность в евклидовом пространстве. Первая квадратичная форма поверхности. Кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Геодезическая как кратчайшая траектория движения точки по поверхности. Символы Кристоффеля I и II рода. Понятие ковариантной производной. Параллельный перенос. Запись градиента, ротора, дивергенции и лапласиана в криволинейных координатах. Дивергенция как инвариант. Понятие тензора Римана–Кристоффеля. Запись уравнений механики сплошной среды в тензорном виде.

Программа практических занятий (32 часа)

1. Тензорная алгебра. Преобразование компонент ортогонального тензора при замене системы координат. Сложение, произведение, свертка тензоров. (4 часа)
2. Симметрирование и альтернирование. Подстановка индексов. Частные случаи общей теоремы деления тензоров. (2 часа)
3. Симметричные и антисимметричные тензоры. Приведение симметричного тензора к главным осям. Бивектор. (2 часа)
4. Преобразование компонент тензора в аффинной системе координат. (2 часа)
5. Тензор как полилинейная форма. Бескоординатная форма записи тензора. (2 часа)
6. Вычисление фундаментального тензора. Скалярное произведение. Опускание и поднятие индексов. (2 часа)
7. Подготовка к контрольной работе №1. (2 часа)
8. Вычисление дискриминантного тензора. Векторное произведение. (2 часа)
9. Локальный базис. Преобразование компонент тензора в криволинейной системе координат. (2 часа)
10. Вычисление символов Кристоффеля первого и второго рода для различных криволинейных систем координат. Вычисление ковариантных производных. (2 часа)
11. Вычисление дивергенции, градиента, ротора и лапласиана в криволинейных системах координат. (2 часа)
12. Первая квадратичная форма поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. (2 часа)
13. Параллельный перенос вектора. Геодезическая как кратчайшая траектория на поверхности. (2 часа)
14. Подготовка к контрольной работе №2. (2 часа)
15. Запись второго закона Ньютона в криволинейных системах координат. Ответы на вопросы студентов. (2 часа)

Самостоятельная работа студентов (42 часа)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям.	16
Подготовка к контрольным работам	8
Изучение теоретического материала, не освещаемого на лекциях	6
Подготовка к сдаче заданий	8
Подготовка к дифференцированному зачёту	4

5. Перечень учебной литературы.

5.1. Основная литература

1. Топоногов В.А. Тензорная алгебра и тензорный анализ. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1995.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука, 1980.

5.2. Дополнительная литература

3. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., Наука, 1987.

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

4. Аюпова Н. Б. Лекции по векторному и тензорному анализу, НГУ, 2012.
5. Аюпова Н. Б., Таубер Н. М., Задачи и упражнения по курсу «Векторный и тензорный анализ», НГУ, 2012.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:

- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.1 Современные профессиональные базы данных

Не используются.

7.2. Информационные справочные системы

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для реализации дисциплины «Векторный и тензорный анализ» используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.

2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.1 Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Текущий контроль

Текущий контроль успеваемости студента предусматривает несколько видов контроля, результаты которых в дальнейшем учитываются также при промежуточной аттестации:

- 1) сдача 15 заданий, оформленных в соответствии с требованиями и в установленные преподавателем сроки (с 1 по 16 недели семестра); качество решения и выполнение требований по срокам сдачи задач учитываются при промежуточной аттестации.
- 2) решение двух контрольных работ, включающих в себя по 5 задач. Каждая правильно оформленная и решенная задача оценивается в 12 баллов.

Критерии выставления баллов за решение задачи следующие:

- 1 - 3 баллов - решение начато, приведена формула, имеющая отношение к решению, либо имеются заметки по решению задачи;
- 4 - 6 баллов - намечен план решения задачи, проведены выкладки, но они не доведены до логического конца;
- 7 – 9 баллов - есть решение, но до ответа оно не доведено
- 10 - 12 баллов - задача решена, возможно, с незначительными ошибками.

Критерии выставления оценки за контрольную работу:

- 51 баллов и выше – «отлично»;
- 36 - 50 – «хорошо»;
- 20 - 35 – «удовлетворительно»;
- менее 20 баллов – «неудовлетворительно».

Условия проведения контрольных работ.

При решении задач на контрольной работе студент имеет право пользоваться учебной литературой по предмету, в том числе, учебниками, пособиями, справочниками, конспектами. Запрещено использование электронных средств информации: планшета, смартфона, ноутбука и т.п.

Промежуточная аттестация

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня в части формирования способности использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов векторного и тензорного анализа. Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем.

Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на дифференцированном зачёте. Он проводится в конце семестра. Положительная итоговая оценка по промежуточной аттестации может быть получена студентом при условии обязательного выполнения 15 заданий

в рамках текущего контроля успеваемости и с учетом баллов, набранных по результатам двух контрольных работ.

В том случае, если студент не сдал какие-либо из 15 заданий, он сдает их в ходе дифференцированного зачёта.

В рамках проведения промежуточной аттестации знания, обучающегося оцениваются по шкале от 0 до 5 баллов:

оценка "отлично" - при условии, что обучающийся набрал в ходе семестра и дополнительно в ходе промежуточной аттестации 101 балл и выше (продвинутый уровень освоения компетенции ОПК-1);

оценка "хорошо" - при наличии у обучающегося от 72 до 100 баллов (базовый уровень освоения компетенции ОПК-1);

оценка "удовлетворительно" - при наличии у обучающегося от 40 до 71 балла, причем за каждую контрольную работу необходимо набрать не менее 20 баллов (пороговый уровень освоения компетенции ОПК-1);

оценка "неудовлетворительно" – при наличии у обучающегося менее 40 баллов (компетенция не сформирована).

Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

Индикатор	Результат обучения по дисциплине	Оценочные средства
ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	Знать математический аппарат теории тензорного исчисления, основные определения и понятия, относящиеся к темам ортогональные тензоры, тензорная алгебра и тензорный анализ, и способы их использования при решении конкретных физических задач.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме
ОПК -1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	Уметь решать типовые учебные задачи тензорного анализа, определять необходимость привлечения дополнительных знаний из специальных разделов математики для решения профессиональных задач.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме

<p>ОПК -1.3 Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необходимых в профессиональной деятельности.</p>	<p>Владеть методами тензорной алгебры, дифференцирования тензоров, и методами преобразования дифференциальных операторов в криволинейных системах координат, общими принципами применения векторного и тензорного анализа в фундаментальных разделах физики.</p>	<p>Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме</p>
---	---	---

10.2 Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Векторный и тензорный анализ».

Таблица 10.2

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК 1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК 1.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.
Наличие навыков (владение опытом)	ОПК 1.3	Отсутствие владения материалом по темам/разделам дисциплины. Нет навыков в решении стандартных задач. Наличие грубых ошибок.	Имеется минимальный набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.	Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.	Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач без ошибок и недочетов. Продемонстрированы знания по решению нестандартных задач.

Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Контрольная работа 1.

1. Дан симметричный ортогональный тензор $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 4(x_1)^2 + 7(x_2)^2 + 4(x_3)^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$. Записать характеристический многочлен. Записать тензор в главных осях. Выписать главные направления так, чтобы они составляли ортонормированный правый базис. ($\lambda = 8$)
2. Выделить симметричную S и антисимметричную A части ортогонального тензора $T = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Симметричную часть разделить на шаровую часть и девiator. Найти декартовы координаты вектора \mathbf{w} : $A = \mathbf{w} \times$
3. Ортогональный тензор T в базисе $\mathbf{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{i} - \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$ имеет компоненты $t_{111} = 0$, $t_{112} = 1$, $t_{121} = 3$, $t_{122} = 0$, $t_{211} = 5$, $t_{212} = 0$, $t_{221} = 0$, $t_{222} = 7$.
Найти компоненту t'_{221} в базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.
4. Тензор $(t_{ijklmnr})$, $i, j, k, l, m, n, r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ задан своими компонентами $t_{3122465} = 11$, $t_{2321546} = 13$, $t_{2123154} = 15$, $t_{4623215} = 17$, $t_{1245634} = 19$, $t_{6321542} = 21$, остальные компоненты равны нулю. Определим тензор $a_{ijklmnr} = t_{[ij|k|lmnr]}$. Вычислить $a_{1326542}$.
5. Заданы: базис $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; тензор $(t_j^i) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3) \otimes (\mathbf{e}^1 + 5\mathbf{e}^2) + (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \otimes (2\mathbf{e}^1 + 3\mathbf{e}^3)$, вектор $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$. Выписать координаты тензора (t_j^i) . Найти длину вектора \mathbf{u} , если $u^i = t_j^i v^j$.

Контрольная работа 2.

1. Задана аффинная система координат $\mathbf{e}_1 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ и ковекторы $\mathbf{u} = \mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3$. Вычислить w_1 , где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
2. Вычислить ковариантную компоненту $(\mathbf{rot} \mathbf{a})_1$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (v + \sin w, 5u^2 - 4w, \cos u + 3v)$, а координаты u, v, w связаны с декартовыми соотношениями $x = e^{2u} - 2v + w$, $y = u + 3v$, $z = -u + v + e^{3w}$.
3. В криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) в некоторой точке тензор T имеет вид $T = (T_i^j) = 11 \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}^1 + 13 \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}^2 + 15 \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}^1 + 17 \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}^2 + 19 \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}^2 + 21 \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}^3 + 23 \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}^3$, где \mathbf{g}_i и \mathbf{g}^i — базис и сопряженный базис соответственно. Выписать координаты T_i^j тензора T . Найти координату $T_1^{1'}$ в этой точке в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица перехода
$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \partial x^1 / \partial x^{1'} & \partial x^1 / \partial x^{2'} & \partial x^1 / \partial x^{3'} \\ \partial x^2 / \partial x^{1'} & \partial x^2 / \partial x^{2'} & \partial x^2 / \partial x^{3'} \\ \partial x^3 / \partial x^{1'} & \partial x^3 / \partial x^{2'} & \partial x^3 / \partial x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x^{1'}} & 3 & 0 \\ -2 & e^{5x^{2'}} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
4. Для криволинейной системы координат (x^1, x^2) , связанной с декартовой соотношениями $x = -\cos 2x^1 + 4x^2$, $y = x^1 \operatorname{sh} x^2$, $x^1 > 0$, $x^2 > 0$, вычислить (g_{ij}) и $\Gamma_{1,22}$.
5. Найти компоненту T_{12}^{-2} тензора $T_{ij}^{-k} = \nabla_i S_j^k$, где $S = (S_j^k) = 4 \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}^1 + 3 \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}^2 + 2x^2 \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}^1 + \operatorname{tg} x^1 \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}^2$. Здесь \mathbf{g}_i и \mathbf{g}^i — базис и сопряженный базис соответственно. Выписать координаты S_j^k тензора S . Символы Кристоффеля:
 $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$; $\Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$.

Задание 1.
(Сдать к 13 октября)

1. Тензор \mathbf{P} и вектор \mathbf{a} заданы равенствами

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 10 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (1, 2, 3)$$

Вычислить $\mathbf{a} \otimes \mathbf{P}$, $\mathbf{P} \otimes \mathbf{a}$.

2. Тензор задан в базисе \mathbf{e} :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 6 & 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Записать тензор P в базисе \mathbf{e}' , где $\mathbf{e}' = A\mathbf{e}$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

3. Записать тензор

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

в главных осях. Выписать главные направления так, чтобы они составляли правый ортонормированный базис.

4. Тензор моментов инерции системы задан соотношениями

$$\begin{pmatrix} 2a^2(m+M) & 2a^2(m-M) & 0 \\ 2a^2(m-M) & 2a^2(m+M) & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{pmatrix}$$

Найти инварианты тензора. Записать тензор в главных осях.

5. Пусть A — невырожденное преобразование. Доказать, что если

$$A(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = A\mathbf{x} \times A\mathbf{y},$$

где \mathbf{x} , \mathbf{y} произвольные вектора, то A — ортогональное преобразование

Задание 2.
(Сдать к 24 ноября)

1. Какие из следующих отображений $T : V^3 \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}$ являются тензорами? Если T — тензор, найти его координаты.
- а) $T(u, v) = u^1 v^1 - 2u^2 v^1 + 3u^1 v^2 - u^1 v^3$;
 б) $T(u, v) = u^1 u^3 + 2u^2 v^1 + 4v^1 v^3$;
 в) $T(u, v) = (u^1 + u^2)^2 + (v^1 + v^2 - v^3)^2$.

2. Тензоры a_{ij} , b_j^i , c_{ij} имеют такие координаты

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b_1^1 = 1, \quad b_2^1 = 3, \quad b_1^2 = -2, \quad b_2^2 = 2.$$

Вычислить $a_{ij} b_k^j + c_{ik}$

3. Тензор a_{kl}^{ij} задан равенствами

$$a_{11}^{11} = 1, \quad a_{21}^{11} = 2, \quad a_{12}^{11} = 3, \quad a_{22}^{11} = 4,$$

$$a_{11}^{21} = -4, \quad a_{21}^{21} = 3, \quad a_{12}^{21} = -2, \quad a_{22}^{21} = -1,$$

$$a_{11}^{12} = -4, \quad a_{21}^{12} = -3, \quad a_{12}^{12} = -2, \quad a_{22}^{12} = -1,$$

$$a_{11}^{22} = 5, \quad a_{21}^{22} = 6, \quad a_{12}^{22} = 7, \quad a_{22}^{22} = 8.$$

Найти $a_{kl}^{[ij]}$, $a_{(kl)}^{ij}$.

4. В некотором базисе метрический тензор и тензор T_{ij} имеют следующие матрицы координат.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислить T_i^k .

5. В аффинной правой системе координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ дан метрический тензор

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и заданы векторы $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Вычислить контравариантные компоненты вектора \mathbf{w} , где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Задание 3.
(Сдать к 15 декабря.)

1. В криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) в точке $(4, 0, \pi/4)$ тензор t_i^j имеет координаты $(t_i^j) = \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}_1$.

Найти координаты $t_{i'}^{j'}$ в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ связанной с (x^1, x^2, x^3) соотношениями $x^{1'} = x^1$, $x^{2'} = e^{x^2} \cos x^3$, $x^{3'} = e^{x^2} \sin x^3$.

2. Вычислить компоненты метрического тензора для трехмерной криволинейной системы координат, связанной с декартовыми соотношениями

$$x = -x^3 + \sqrt{(x^3)^2 + x^1}, \quad y = x^2, \quad z = x^3 + \sqrt{(x^3)^2 + x^1},$$

3. Для криволинейной системы координат, связанной с декартовыми соотношениями

$$x = \sqrt{uv}, \quad y = \sqrt{\frac{v}{u}}$$

вычислить (g_{ij}) и $\Gamma_{i,jk}$.

4. Тензор T имеет компоненты:

$$\begin{aligned} T_{\cdot 1}^1 &= 0, & T_{\cdot 2}^1 &= x^1 - x^2 \\ T_{\cdot 1}^2 &= 2x^1, & T_{\cdot 2}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Вычислить $\nabla_1 T$, если $\Gamma_{11}^1 = (x^1)^2$; $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = x^1 x^2$; $\Gamma_{22}^1 = (x^2)^2$; $\Gamma_{11}^2 = 0$; $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{x^1}{x^2}$; $\Gamma_{22}^2 = 0$.

5. Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и ковариантные компоненты rota , где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = ((x^3)^2, x^2 + x^1, (x^2)^2)$, а координаты (x^1, x^2, x^3) связаны с декартовыми соотношениями

$$x = x^1, \quad y = x^2 + \sqrt{(x^2)^2 + x^3}, \quad z = -x^2 + \sqrt{(x^2)^2 + x^3}.$$

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

**Лист актуализации рабочей программы
по дисциплине «Векторный и тензорный анализ»
по направлению подготовки 03.03.02 Физика
Профиль «Общая и фундаментальная физика»**

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного