МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет
Кафедра теоретической физики

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФ, д.ф.-м.н
В.Е.Блинов
«__» 08 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

направление подготовки: **03.03.02 Физика**
направленность (профиль): **Общая и фундаментальная физика**

Форма обучения: **Очная**

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	144	32	48		40	18	4			2
6	144	32	48		40	18	4			2
Итого	**288**	**64**	**96**		**80**	**36**	**8**			**4**
Всего 288 часов / 8 зачётных единиц, из них: - контактная работа 172 часа										
Компетенции: ОПК-1										

Ответственный за образовательную программу,
д.ф.-м.н., проф. С.В. Цыбуля

Новосибирск, 2022

Содержание

1. **Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.**

Дисциплина (курс) «Методы математической физики» имеет своей целью обучение студентов-физиков основным математическим методам, применяемым в физике. В курсе излагается материал, знание которого необходимо как для теоретиков и вычислителей, так и для экспериментаторов. В процессе освоения дисциплины студенты знакомятся с методами решения уравнений в частных производных, решениями обыкновенных дифференциальных уравнений в виде специальных функций, применением теории неприводимых представлений групп.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	**ОПК-1.1.** Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК -1.2.** Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	**Знать**: - способ получения инвариантов Римана, способы решения задач с уравнениями второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов, свойства функций Бесселя и Лежандра, основные свойства асимптотических разложений, основные понятия теории представлений точечных групп; - физический смысл характеристик, типичные в физике постановки задач для эллиптического, параболического и гиперболического типов уравнений второго порядка (задач Коши, Дирихле и Неймана), основные определения теории представлений групп Ли. **Уметь**: - решать простейшие линейные и квазилинейные уравнения в частных производных, пользоваться формулами Родрига и интегральными представлениями специальных функций, определять тип особенности в уравнении второго порядка и сводить к уравнениям на гипергеометрические функции, оценивать асимптотику интегралов методами Лапласа и стационарной фазы, строить функцию Грина оператора Штурма – Лиувилля;

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
		- выполнять нелинейные замены в простых нелинейных уравнениях физики при возможности сведения их к линейным, искать автомодельные подстановки, находить асимптотику интегралов методом перевала, разлагать представление группы в прямую сумму неприводимых, рассчитывать кратности вырождения молекулярных колебаний, строить функцию Грина задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона, задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. **Владеть:** - методами характеристик, разделения переменных и Фурье, усреднения; - методами стационарной фазы и перевала, функций Грина, симметрии

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Математические методы физики – необходимый элемент образования физика, реализуется в осеннем и весеннем семестрах 3-го курса для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 03.03.02 Физика. Курс является одной из обязательных профессиональных дисциплин. В программу входят те темы, которые нужны студенту для изучения основных курсов теоретической физики – квантовой механики, статистической физики, физики сплошных сред. Основные разделы курса: уравнения в частных производных, специальные функции, асимптотические методы, применение теории представлений групп, функции Грина и составляют такой минимум. Курс рассчитан на два семестра, каждый завершается зачетом и экзаменом. Этот курс имеет практическую направленность, учит решать задачи и применять знания из изученных ранее разделов высшей математики.

Считается, что студенты третьего курса уже знакомы в достаточной степени с линейной алгеброй, математическим анализом, теорией функций комплексного переменного и обыкновенными дифференциальными уравнениями. Цель заключительного математического курса – научить решать простые математические задачи, возникающие в физике. Для этого надо свободно пользоваться высшей математикой из разных разделов. Поэтому практические занятия начинаются с повторения основных понятий из таких разделов. Далее следуют уравнения в частных производных. Среди уравнений в частных производных рассматриваются в первую очередь задачи для уравнений Лапласа и Пуассона с разными граничными условиями, уравнения теплопроводности и волнового уравнения, важными в физике сплошных сред. Наряду с классическими линейными действительными уравнениями в частных производных студентов учат искать решения простейших нелинейных уравнений (Хопфа, Бюргерса, Кортевега – де Фриза) и комплексного уравнения Шрёдингера из квантовой механики. При разделении переменных в сферических и цилиндрических координатах появляются сферические и цилиндрические функции. Для решения задач из разных разделов физики с аксиальной или сферической симметрией в курсе изучаются специальные функции, в основном, функции Бесселя и Лежандра. Студенты учатся пользоваться интегральными представлениями специальных функций и получать простые формулы для их асимптотик методами стационарной фазы и перевала. Изучается также метод усреднения, позволяющий решить важную задачу аналитической механики – проследить эволюцию слабо нелинейного классического осциллятора на больших временах. Для лучшего усвоения квантовой физики в программе предусмотрено решение задач по применению теории представлений групп. К таким задачам относятся расчет кратности вырождения молекулярных колебаний, количества независимых компонент симметричных и антисимметричных инвариантных тензоров разных рангов, снятие вырождения квантовых уровней энергии при понижении симметрии системы, а также рассматриваются правила отбора в молекулах средней и высокой симметрии. Для решения задач электростатики студентов знакомят с методом функций Грина, в частности, с потенциалами объемного заряда, простого и двойного слоя, с запаздывающей функцией Грина классической электродинамики, для квантовой механики - с функциями Грина уравнений Шрёдингера.

3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	144	32	48		40	18	4			2
6	144	32	48		40	18	4			2
Итого	**288**	**64**	**96**		**80**	**36**	**8**			**4**
Всего 288 часов / 8 зачётных единиц, из них: - контактная работа 172 часа										
Компетенции: ОПК-1										

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, задачи для самостоятельного решения, консультации, самостоятельная работа студента, экзамен в конце каждого семестра.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

Текущий контроль: решение задач из задания для самостоятельного решения

Промежуточная аттестация: экзамен

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет **288** академических часов / **8** зачетных единиц:

- занятия лекционного типа – 64 часа;
- практические занятия – 96 часов;
- самостоятельная работа обучающегося в течение двух семестров, не включая период сессии – 80 часов;
- промежуточная аттестация (подготовка к сдаче экзамена, консультация и экзамен) – 48 часов.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, групповые консультации, экзамен) составляет 172 часа.

4. Структура и содержание дисциплины

Курс «Методы математической физики» является годовым курсом, рассчитанным для 5-го и 6-го семестров, читаемым для студентов 3-го курса физического факультета НГУ. Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц, 288 академических часов.

№ п/п	**Раздел дисциплины**	**Неделя семестра**	**Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)**				**Консультации перед экзаменом (часов)**	**Промежуточная аттестация (в часах)**
			Всего	Аудиторные часы		Сам. работа в течение семестра (не включая период сессии)		
				Лекции (кол-во часов)	Практические занятия (кол-во часов)			
	3 курс, 5 семестр							
1	Метод характеристик. Задача Коши. Образование разрывов.	1	7	2	3	2		
2	Понятие характеристик для систем уравнений с двумя переменными. Классификация по типам.	2	8	2	3	3		
3	Приведение гиперболической системы к каноническому виду. Инварианты Римана, простая волна Римана.	3	7	2	3	2		
4	Метод годографа. Точные решения для политропного газа. Волновое уравнение. Формула Даламбера.	4	8	2	3	3		
5	Приведение уравнения с двумя переменными к каноническому виду. Приведение многомерных уравнений к каноническому виду. Характеристики гиперболического уравнения.	5	7	2	3	2		
6	Понятие автомодельности. Автомодельные подстановки для уравнений теплопроводности.	6	8	2	3	3		
7	Разделение переменных. Метод Фурье.	7	7	2	3	2		
8	Разделение переменных в задаче о круглой мембране. Функции Бесселя.	8	8	2	3	3		
9	Разделение переменных в уравнении Шрёдингера для частицы в центрально-симметричном поле. Присоединенные функции Лежандра. Сферические гармоники. Функции Бесселя с полуцелым индексом.	9	7	2	3	2		

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы		Сам. работа в течение семестра (не включая период сессии)		
				Лекции (кол-во часов)	Практические занятия (кол-во часов)			
10	Решение дифференциального уравнения второго порядка вблизи обыкновенной точки и регулярной особой точки. Характеристические показатели.	10	8	2	3	3		
11	Функция Гаусса и вырожденная гипергеометрическая функция.	11	7	2	3	2		
12	Уравнение Шрёдингера для осциллятора и атома водорода. Полиномы Эрмита и Лагерра.	12	8	2	3	3		
13	Асимптотика интегралов. Интеграл Лапласа. Асимптотика гамма-функции Эйлера.	13	7	2	3	2		
14	Метод стационарной фазы. Асимптотика функции Бесселя.	14	8	2	3	3		
15	Метод перевала. Асимптотика функций Лежандра и Эйри.	15	7	2	3	2		
16	Метод усреднения. Асимптотика усредненного решения дифференциального уравнения.	16	8	2	3	3		
17	Групповая консультация		4				4	
18	Самостоятельная подготовка обучающегося к экзамену		18					18
19	Экзамен		2					2
Всего:			**144**	**32**	**48**	**40**	**4**	**20**
	3 курс, 6 семестр							
20	Симметрия молекул, точечная группа. Определение формальной группы, гомоморфизм, изоморфизм. Примеры конечных групп.	1	7	2	3	2		
21	Основные понятия теории групп.	2	8	2	3	3		
22	Матричные представления конечных групп. Приводимые и неприводимые представления. Лемма Шура.	3	7	2	3	2		
23	Соотношение ортогональности неприводимых представлений. Таблица неприводимых характеров. Разложение представления на неприводимые.	4	8	2	3	3		
24	Симметрии, законы сохранения и вырождение в квантовой механике. Снятие вырождения при понижении симметрии.	5	7	2	3	2		
25	Общие свойства групп Ли. Примеры групп Ли. Алгебра Ли, структурные константы, генераторы. Алгебра Ли группы Ли.	6	8	2	3	3		
26	Восстановление группы Ли по ее алгебре Ли. Группы **SO(3)**, **SU(2)** и их параметризации. Изоморфизм алгебр Ли **ASU(2)** и **ASO(3)**. Гомоморфизм группы **SU(2)** на **SO(3).** Спиноры.	7	7	2	3	2		
27	Построение неприводимых представлений группы вращений. Повышающий и понижающий операторы, оператор Казимира. Базис неприводимого представления из сферических гармоник.	8	8	2	3	3		

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы		Сам. работа в течение семестра (не включая период сессии)		
				Лекции (кол-во часов)	Практические занятия (кол-во часов)			
28	Тензорное произведение представлений. Разложение Клебша – Гордана. Тензорные представления группы. Симметричные тензоры, симметризаторы Юнга. Инвариантные тензоры. Правила отбора.	9	7	2	3	2		
29	Фундаментальное решение и функция Грина краевой задачи. Принцип взаимности. Функция Грина уравнения Штурма – Лиувилля на конечном интервале.	10	8	2	3	3		
30	Альтернатива Фредгольма. Разложение обратного оператора по проекторам, нулевые моды. Обобщенная функция Грина.	11	7	2	3	2		
31	Принцип максимума для оператора Лапласа. Единственность решения задач Дирихле и Неймана. Особенность фундаментального решения уравнения Пуассона в пространствах разной размерности.	12	8	2	3	3		
32	Формула Грина. Функции Грина второго рода для задач Дирихле и Неймана. Потенциалы объемного заряда, простого и двойного слоя. Функция Грина уравнения Гельмгольца. Применение в квантовой теории рассеяния.	13	7	2	3	2		
33	Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение с помощью преобразования Фурье.	14	8	2	3	3		
34	Единственность решения волнового уравнения. Запаздывающая функция Грина. Принцип Гюйгенса - Френеля.	15	8	2	3	3		
35	Дополнительные главы теории групп.	16	7	2	3	2		
36	Групповая консультация		4				4	
37	Самостоятельная подготовка обучающегося к экзамену		18					18
38	Экзамен		2					2
			144	**32**	**48**	**40**	**4**	**20**
	Итого:		**288**	**64**	**96**	**80**	**8**	**40**

Самостоятельная работа студентов в 5 семестре (40 часов)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Решение задач из задания.	16
Подготовка к ответам на дополнительные вопросы.	4
Подготовка к экзамену	20

Самостоятельная работа студентов в 6 семестре (40 часов)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Решение задач из задания.	16
Подготовка к ответам на дополнительные вопросы.	4
Подготовка к экзамену	20

Программа лекций на 5-й семестр (32 часа)

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК (8 часов)

1. Метод характеристик для линейных и квазилинейных уравнений с частными производными. Задача Коши. Образование разрывов.
2. Понятие характеристик для систем линейных и квазилинейных уравнений с двумя переменными. Классификация по типам: гиперболические, эллиптические, параболические системы.
3. Приведение гиперболической системы к каноническому виду. Инварианты Римана, простая волна Римана.
4. Метод годографа для уравнений газовой динамики. Точные решения для политропного газа.

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА (8 часов)

5. Волновое уравнение. Вывод из уравнений Максвелла и газодинамики. Решение одномерного волнового уравнения, формула Даламбера.
6. Приведение гиперболического, эллиптического и параболического уравнения с двумя переменными к каноническому виду.
7. Приведение многомерных уравнений к каноническому виду. Характеристики гиперболического уравнения и их физический смысл.
8. Понятие автомодельности. Автомодельные подстановки для уравнений теплопроводности.
9. Разделение переменных. Метод Фурье.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ (8 часов)

10. Разделение переменных в задаче о круглой мембране. Функции Бесселя.
11. Разделение переменных в уравнении Шрёдингера для частицы в центрально-симметричном поле. Присоединенные функции Лежандра. Сферические гармоники. Функции Бесселя с полуцелым индексом.
12. Решение дифференциального уравнения второго порядка вблизи обыкновенной точки и регулярной особой точки. Характеристические показатели.
13. Функция Гаусса и вырожденная гипергеометрическая функция.
14. Уравнение Шрёдингера для осциллятора и атома водорода. Полиномы Эрмита и Лагерра.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ (8 часов)

15. Асимптотика интегралов. Интеграл Лапласа.
16. Случаи стационарной точки на границе и внутри отрезка интегрирования. Асимптотика Г– функции Эйлера.
17. Метод стационарной фазы. Асимптотика функции Бесселя.
18. Метод перевала. Асимптотика функций Лежандра и Эйри.
19. Метод усреднения. Асимптотика усредненного решения дифференциального уравнения.

Программа лекций на 6-й семестр (32 часа)

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ГРУПП (20 часов)

1. Симметрия молекул (повороты, отражения, зеркальные повороты). Определение группы, гомоморфизм, изоморфизм. Примеры конечных групп: $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{D}_n$, **T**, **O**, **Y**.
2. Основные понятия теории групп: порядок элемента и группы, подгруппа, смежный класс, класс сопряженных элементов, нормальная подгруппа, центр группы, фактор-группа.
3. Матричные представления конечных групп. Единичное, точное, регулярное представления, размерность представления. Приводимые и неприводимые представления. Лемма Шура. Соотношение ортогональности неприводимых представлений. Таблица характеров. Соотношение ортогональности характеров. Разложение представления на неприводимые.
4. Симметрии, законы сохранения и вырождение в квантовой механике. Снятие вырождения при понижении симметрии. Использование симметрии для расчета кратности вырождения колебаний молекул.
5. Общие свойства групп Ли, связность, размерность, компактность. Примеры групп Ли: **GL(n,C)**,**U(n,C)**,**SU(n,C)**,**O(n,R)**,**SO(n,R).** Алгебра Ли, структурные константы. Инфинитезимальные операторы (генераторы). Алгебра Ли группы Ли.
6. Восстановление группы Ли по ее алгебре Ли. Экспоненциальная формула. Группа **SO(3)**, **SU(2)** и их параметризации. Изоморфизм алгебр Ли **ASU(2)** и **ASO(3)**. Гомоморфизм группы **SU(2)** на **SO(3).** Спиноры.
7. Построение неприводимых представлений группы вращений. Повышающий и понижающий операторы, оператор Казимира. Базис представления из сферических гармоник. Связь с квантованием момента импульса.
8. Тензорное произведение представлений. Разложение Клебша – Гордана. Тензорные представления группы, понятие тензора. Симметричные тензоры, симметризаторы Юнга. Инвариантные тензоры, расчет количества независимых компонент. Правила отбора.

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА (12 часов)

9. Необходимые условия существования обратного оператора. Фундаментальное решение и функция Грина краевой задачи. Принцип взаимности. Функция Грина уравнения Штурма – Лиувилля на конечном интервале.
10. Альтернатива Фредгольма. Разложение обратного оператора по проекторам, нулевые моды. Обобщенная функция Грина.

11. Принцип максимума для оператора Лапласа. Единственность решения задач Дирихле и Неймана. Особенность фундаментального решения уравнения Пуассона в пространствах разной размерности. Формула Грина. Функции Грина второго рода для задач Дирихле и Неймана. Потенциалы объемного заряда, простого и двойного слоя. Функция Грина уравнения Гельмгольца. Применение в квантовой теории рассеяния.
12. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение с помощью преобразования Фурье. Единственность решения волнового уравнения. Запаздывающая функция Грина. Правило обхода полюсов. Принцип Гюйгенса - Френеля.

Примерный план практических занятий на 5-й семестр (48 часов)

1. Собственные значения. Функции от матриц. Резольвента. Задачи 14, 2, 5, 20. Решить задачу 20 с помощью собственных значений (2 часа).

2. Унитарные и эрмитовы матрицы, проекторы. Матрицы Паули.
Задачи 1, 4, 8. Вывести формулу $\sigma_i\sigma_j = ie_{ijk}\sigma_\kappa + \delta_{ij}$. Показать, что для всякой матрицы 2х2 коэффициенты разложения $A = a_0\sigma_0 + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}$ даются формулой $a_\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A\sigma_\alpha)$, где σ_0 – единичная матрица. Найти общий вид проектора 2х2. Решить задачу 20 с помощью разложения по матрицам Паули (2 часа).

3. Свойства δ-функции. Ортогонализация. Полнота системы функций. Проверка самосопряженности дифференциальных операторов. Задачи 21 а,б, 24, 27 а,б, 30. Показать, что оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$+U(x) самосопряжен на отрезке [0,1], если функции удовлетворяют граничным условиям: u(0)=u(1)=0; u'(0)=u'(1)=0, линейной комбинации этих двух, или периодическим u(0)=u(1), u'(0)=u'(1) (2 часа).

4. Линейные уравнения первого порядка. Характеристики. Условие разрешимости задачи Коши. Задачи 36 а,б, 37, 38, 42 (2 часа).

5. Квазилинейные уравнения. Опрокидывание. Задача 43. Найти точку опрокидывания уравнения Хопфа для начального условия u(x,0) =1-th(x). Найти закон расширения области неоднозначности. Найти точку опрокидывания неоднородного уравнения Хопфа $u_t + uu_x$ =1. [+ 45а] (4 часа).

6. Системы линейных уравнений. Приведение к каноническому виду. Задачи 48, 47 а,б. Пример системы квазилинейных уравнений, задача 53 (2 часа).

7. Инварианты Римана и характеристики в случае двух переменных. Задача о политропном газе. Задачи 49, 50, 51, 52 [+58] (4 часа).

8. Характеристические переменные. Области эллиптичности и гиперболичности. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду. Исключение первых производных. Задачи 59 а,б,в, 60 а. Исключить первую производную в уравнениях $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$;
$(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$ (2 часа).

9. Поиск автомодельной подстановки с помощью масштабных преобразований. Автомодельные решения линейного и нелинейного уравнения теплопроводности. Решения нелинейных уравнений типа бегущей волны. Солитоны. Задача 98. Найти автомодельное решение задачи $u_t = u_{xx}$, u(x,0)= x^3, u(0,t)=0. Задача 100 при n=2. Задачи 102, 103, 110 [+108,111] (2 часа).

10. Решение волнового уравнения, уравнений теплопроводности и Лапласа методом Фурье. Задачи 68, 71, 72, 73, 75,79. [+76,78] (2 часа).

11. Разделение переменных уравнения Шрёдингера в ортогональных системах координат. Разделить переменные стационарного уравнения Шрёдингера в сферических координатах. Задачи 88 в, г (2 часа).

12-13. Сферические гармоники. Полиномы Лежандра, Лагерра и Эрмита: разложение, рекуррентные соотношения, производящая функция, интегральное представление, соотношение ортогональности. Задачи 127, 128, 130, 157, 158, 137, 159. Получить формулу Родрига для полиномов Лагерра из интегрального представления (2 часа).

14-15. Основные свойства функции Бесселя: разложение, рекуррентные соотношения, производящая функция, интегральное представление, соотношение ортогональности. Задачи 161, 162, 139, 142, 143, 144, [+147, 148] (2 часа).

16. Характеристические показатели в особых точках. Определяющее уравнение. Гипергеометрические функции. Выразить ln(1+z)/z и $(1-z)^n$ через гипергеометрическую функцию. Задачи 120, 152, 153. Выразить функцию Эйри через вырожденную гипергеометрическую функцию. [Решить уравнение Шрёдингера для атома водорода в параболических координатах] (4 часа).

17. Асимптотика интеграла Лапласа. Задачи 177, 163, 180, 181, 182. Найти асимптотику интеграла $\int_0^\infty dt \exp\left(-t^2 - \frac{a}{t^2}\right), a \to \infty$ (2 часа).

18. Метод стационарной фазы. Задачи 173, 185, 186, 187 (2 часа).

19. Метод перевала. Седловые точки, рельеф функции, линии Стокса. Асимптотика функции Эйри. Задачи 190, 189, 191, 165, 185 (методом перевала) (2 часа).

20. Асимптотики функции Бесселя и Лежандра. Метод перевала для подынтегральной функции с полюсами. Найти асимптотику функции Бесселя с произвольным индексом, пользуясь представлением Шлефли

$$\mathrm{J}_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{e}^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{-\nu-1} dt$$

, |z|→∞. Задачи 194, 193 (2 часа).

21. Метод усреднения. Преобразование Боголюбова – Крылова. Задачи 167, 169, 170, 195, 196, 171, 197, 168 [+198] (2 часа).

Все задачи приводятся в нумерации задачника Колоколова и др. (см. ссылку [2] раздела 5.1). В квадратных скобках указаны необязательные задачи, которые можно решить на занятии, если останется время.

Примерный план практических занятий на 6-й семестр (48 часов)

1. Группа симметрии правильного треугольника: таблица умножения, подгруппы, смежные классы. Задачи 292, 293, 295, 294, 296, 283, 297, 284 (4 часа).

2. Сопряженные классы, инвариантные подгруппы, факторгруппы. Группы подстановок. Задачи 302 (а), 303, 306, 307, 309 (а). Найти порядок группы вращений куба (4 часа).

3. Группа симметрии квадрата и куба. Центр группы. Задачи 302 (б), 287, 299, 286, 305 (2 часа).

4. Матрицы неприводимых представлений группы треугольника. Характеры. Соотношения ортогональности. Разложение произвольного представления на неприводимые. Найти неприводи-

мые представления группы треугольника и построить таблицу неприводимых характеров. Построить и сравнить таблицы неприводимых характеров групп $\mathbf{D_2}$ и $\mathbf{C_4}$. Задачи 309 (б), 310, 311 (2 часа).

5. Таблица неприводимых характеров группы квадрата. Кратности вырождения нормальных колебаний симметричной молекулы. Задача 344. Двумерная система из трех одинаковых грузов в вершинах правильного треугольника. Грузы соединены между собой и с центром одинаковыми пружинами. Выписать матрицы исходного представления и разложить его на неприводимые. В молекуле C_2H_6 треугольник из атомов водорода развернут относительно второго треугольника на 60градусов. Найти кратности вырождения нормальных колебаний. [То же дляNH_3 и CH_3F] (2 часа).

6. Действие элемента группы на функциях. Снятие вырождения при понижении симметрии в задачах о колебаниях круглой мембраны и об уровнях энергии квантовой системы. Прямое произведение представлений. Снимается ли вырождение колебаний круглой мембраны, если на ее края помещены четыре одинаковых груза в вершинах квадрата? Задачи 349, 350 (2 часа).

7. Примеры групп Ли, вычисление размерности. Различные параметризации. Генераторы, алгебры Ли. Восстановление группы Ли по ее алгебре с помощью экспоненциальной формулы. Задачи 329, 328 (в), (г), 315 (4 часа).

8. Неприводимые представления группы **SO(2)** и их характеры. Тензорные представления, разложение на неприводимые представления, инвариантные тензоры. Найти размерность тензора ранга n, разложить на неприводимые. Сколько независимых компонент имеет тензор третьего ранга, инвариантный относительно группы **SO(2)** (2 часа)**.**

9. Неприводимые представления групп **O(2)** и **SO(3)** и их характеры. Оператор Казимира в представлении на функциях. Задачи 316, 317(а), 333 (4 часа).

10. Преобразование тензоров при вращении и инверсии. Разложение Клебша – Гордана. Задача 334. Разложить $D^{(1)}\otimes D^{(1)}$ на неприводимые в группе **SO(3)**. Выделить линейные комбинации компонент бесследового симметричного тензора второго ранга, которые преобразуются при вращении как $Y_{2,m}$ (2 часа).

11. Симметризация тензоров и разложение симметричного тензора на неприводимые. Представления в пространстве полиномов. Задача 340(а),(б),(в) (4 часа).

12. Количество независимых компонент инвариантного тензора. Правила отбора. Сколько независимых компонент имеет тензор второго ранга, инвариантный относительно группы **SO(3),**$\mathbf{D_3}$ **[T]**? То же для симметричного тензора. Найти правила отбора для дипольного момента в группах **SO(3),**$\mathbf{D_3}$ [**T**] (2 часа).

13. Связь групп **SU(2)** и **SO(3)**. Оператор Казимира и неприводимые представления. Задача 317 (б), 318. Линейное преобразование вектора r: $\vec{r}\,'=\hat{R}\vec{r}$ задается формулой

$(\vec{r}\,'\cdot\vec{\sigma})=e^{-i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\frac{\phi}{2}}(\vec{r}\cdot\vec{\sigma})e^{+i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\frac{\phi}{2}}$ Найти матрицу $\hat{R}$ [341-343] (2 часа).

14. Построение функции Грина для одномерных краевых задач. Фундаментальное решение. Скачок производной. Задачи 219, 220, 199, 224 (а), 225 (а), (б), 227 (2 часа).

15. Функция Грина для оператора Штурма-Лиувилля. Нулевые моды и обобщенная функция Грина. Принцип взаимности. Задачи 228 (а), (б) (2 часа).

16. Функция Грина уравнений Пуассона и Гельмгольца. Задачи Дирихле и Неймана. Характер особенностей в двумерном и трехмерном случаях. Функция Грина второго рода. Интеграл Пуассона. Метод изображений и метод конформных преобразований. Задачи 230, 231, 232, [233], 204, 236 (2 часа).

17. Функция Грина уравнений теплопроводности и Фоккера–Планка. Преобразования Фурье по координатам и времени. Задачи 238, 207 (а), 240, 241, 242 с х3, [208] (2 часа).

18. Функция Грина уравнения Шрёдингера. Правило обхода полюсов.
Запаздывающая функция Грина волнового уравнения. Формула Кирхгофа.
[Пропагатор уравнения Клейна – Гордона – Фока.] Задачи 207 (б), 246, 209-212 [213] (4 часа).

Все задачи приводятся в нумерации задачника Колоколова и др. (см. ссылку [2] раздела 5.1). В квадратных скобках указаны необязательные задачи, которые можно решить на занятии, если останется время.

5. Перечень учебной литературы.

5.1. Основная литература

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1971. — 416 с.: ил.
2. Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И. и др. Задачи по математическим методам физики. — 2-е изд., испр. — Москва: Эдиториал УРСС, 2002. — 286 с.: ил.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — Изд. 4-е, испр. — Москва: Наука, 1989. — 767 с.: ил. — (Теоретическая физика, т. III).
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — Изд. 3-е, перераб. — Москва: Наука, 1986. — 736 с.: ил. — (Теоретическая физика, т. VI).

5.2. Дополнительная литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — Москва: Наука, 1984. — 271 с.: ил.
2. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.1. — М.: Мир, 1982. — 486 с.: ил.
3. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.2. — М.: Мир, 1984. — 381 с.: ил.
4. Мессиа А. Квантовая механика. Т.1. — М.: Наука, 1978. — 478 с.: ил.
5. Мессиа А. Квантовая механика. Т.2. — М.: Наука, 1979. — 583 с.: ил.
6. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. — Изд. 5-е, испр. — М.: Наука, 1992. — 431 с.

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.

1. Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И. и др. Задачи по математическим методам физики. — 2-е изд., испр. — Москва: Эдиториал УРСС, 2002. — 286 с.: ил.
2. Подивилов Е.В., Шапиро Д.А., Шапиро Е.Г. Рабочая тетрадь по математическим методам физики: учебное пособие: [для студентов 3-го курса Физ. фак. НГУ]. — М-во образования

и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. теорет. физики. — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2012. — 125 с.: ил.
3. Кузнецов Е.А., Шапиро Д.А. Методы математической физики: курс лекций: [для студентов 3-го курса Физ. фак. НГУ]. Ч.1. — М-во образования и науки РФ, Новосиб. нац. исслед. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. теорет. физики. — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2011. — 114 с.: ил., граф.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:
- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.1 Современные профессиональные базы данных

Не используются.

7.2. Информационные справочные системы

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.

2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.1 Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Текущий контроль

В течение каждого семестра проводится прием заданий. Результаты текущего контроля служат основанием для выставления оценок в ведомость контрольной недели на факультете, а решение и сдача всех задач из задания является необходимым условием получения положительной оценки на экзамене. Если студент, сдавший не все задачи из задания, приходит на экзамен, оценка за экзамен снижается на балл за каждые два не сданные задачи.

Промежуточная аттестация.

Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен в конце каждого семестра. Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

Освоение компетенции оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленные компетенции ОПК-2 и ОПК-3 сформированы не ниже порогового уровня в части, относящейся к формированию способности использовать специализированные знания в области математической физики в профессиональной деятельности.

Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на экзамене. Экзамен проводится в конце каждого семестра в экзаменационную сессию в письменной форме. Вопросы билета подбираются таким образом, чтобы проверить уровень сформированности компетенций ОПК-1.

Вывод об уровне сформированности компетенций принимается при проверке результатов итоговой контрольной работы. Каждая задача контрольной оценивается от 0 до 5 баллов. Положительная оценка ставится, когда компетенции освоены не ниже порогового уровня. Оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» означают успешное прохождение промежуточной аттестации.

Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

Индикатор	Результат обучения по дисциплине	Оценочные средства

ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	**Знать**: - способ получения инвариантов Римана, способы решения задач с уравнениями второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов, свойства функций Бесселя и Лежандра, основные свойства асимптотических разложений, основные понятия теории представлений точечных групп; - физический смысл характеристик, типичные в физике постановки задач для эллиптического, параболического и гиперболического типов уравнений второго порядка (задач Коши, Дирихле и Неймана), основные определения теории представлений групп Ли.	Опрос Контрольная работа Экзамен.
ОПК -1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	**Уметь**: - решать простейшие линейные и квазилинейные уравнения в частных производных, пользоваться формулами Родрига и интегральными представлениями специальных функций, определять тип особенности в уравнении второго порядка и сводить к уравнениям на гипергеометрические функции, оценивать асимптотику интегралов методами Лапласа и стационарной фазы, строить функцию Грина оператора Штурма – Лиувилля; - выполнять нелинейные замены в простых нелинейных уравнениях физики при возможности сведения их к линейным, искать автомодельные подстановки, находить асимптотику интегралов методом перевала, разлагать представление группы в прямую сумму неприводимых, рассчитывать кратности вырождения молекулярных колебаний, строить функцию Грина задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона, задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. **Владеть:** - методами характеристик, разделения переменных и Фурье, усреднения; - методами стационарной фазы и перевала, функций Грина, симметрии	Опрос Контрольная работа Экзамен.

Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Методы математической физики».

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК-1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/ несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК-1.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.

10.3 Домашние задания по курсу «Методы математической физики» (5-й семестр)

ЗАДАНИЕ № 1

1. Вычислить exp(a+**bσ**), где **σ** – матрицы Паули, a и b – комплексные скаляр и вектор.
2. Найти решение кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

   в скрещенных электрическом и магнитном полях **E·H**=0. Как выглядят характеристики?
3. Найти закон колебаний холодного электронного газа относительно однородного неподвижного ионного фона плотности n0. Колебания описываются уравнением непрерывно-

сти для плотности электронов n(x,t), уравнением Эйлера для их скорости u(x,t) и уравнением Пуассона для электрического поля E(x,t)

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial(nu)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{e}{m}E,\quad \frac{\partial E}{\partial x}=4\pi e(n_0-n)$$

При каких начальных значениях амплитуды электрического поля E0 происходит опрокидывание, если u(x,0)=0, $E(x,0)=\frac{E_0}{1+x^2/d^2}$?

4. Определить тип уравнения $y(u_{xx}-u_{yy})-2xu_{xy}-u_y=0$привести к каноническому виду и решить задачу Коши$u(0,y)=\frac{1}{chy}, u_x(0,y)=0$. Исследовать разрешимость задачи Коши.

ЗАДАНИЕ № 2

5. Решить задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности на положительной полуоси с начальным условием u(x,0)=x^4 и граничным условием $u_x(0,t)=0$.
6. На границе бесконечного цилиндра радиуса R температура осциллирует как $T(t)=T_0\sin\omega t$. Найти распределение температуры в цилиндре как функцию времени. Исследовать решение при $\omega\gg\chi/R^2$, где χ – температуропроводность.
7. Найти собственные частоты ω колебаний шара радиуса R

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0$$

при условии $\omega R/c\gg1$.
8. Показать, что уравнение Шрёдингера для двумерного «атома водорода» в электрическом поле F

$$-\frac{1}{2}\Delta\psi-\frac{\psi}{\sqrt{x^2+y^2}}+Fy\psi=E\psi$$

допускает разделение переменных в параболических координатах $x=\xi\,\eta,\quad y=\frac{\xi^2-\eta^2}{2}$.

Найти уровни энергии E и собственные функции ψ связанных состояний при **F** =0. Сравнить с ответом в полярных координатах.

ЗАДАНИЕ № 3

9. Вычислить асимптотику интеграла $\int_0^\infty dx\exp\left(-x^3/3+ax\right)$, где a – комплексная величина, $|a|$ - большой параметр.
10. Найти решение *ψ(x,t)* уравнения Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+mgx\,\psi$$

с начальным условием $\psi(x,0)=A\exp(-|x|/a)$. Исследовать асимптотику на больших временах. С какой скоростью движется центр пакета и как меняется его ширина?

11. Методом усреднения найти эволюцию колебаний маятника, испытывающего трение при прохождении точки $x=a$,и сравнить с точным решениему равнения

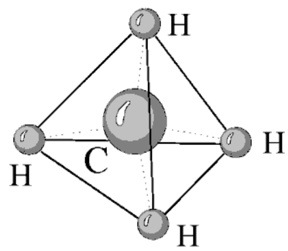
$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}\delta(x-a)+\omega_0^2x=0,\quad \gamma\to 0.$$

Домашние задания по курсу «Методы математической физики» (6-й семестр)

ЗАДАНИЕ № 1

1. Определить порядок и число классов сопряженных элементов группы вращений тетраэдра **T**. Найти инвариантную подгруппу *H* и фактор-группу **T**/*H*. Построить таблицу неприводимых характеров.

2. Построить таблицу неприводимых характеров полной группы тетраэдра $\mathbf{T_d}$. Найти кратности вырождения частот нормальных колебаний молекулы метанаCH_4.



3. В квантовой механике можно обозначить спиновую волновую функцию электрона как α, если спин направлен “вверх” или β, когда спин направлен “вниз”. Состояния α и β ортогональны. Для системы из трех электронов можно сформировать волновые функции вида $\alpha(1)\alpha(2)\alpha(3)$, $\alpha(1)\alpha(2)\beta(3)$ и т.д., всего 8 волновых функций. Эти волновые функции преобразуются друг через друга под действием элементов группы подстановок P_3. Разложить данное представление на неприводимые.

ЗАДАНИЕ №2

4. Вывести правила отбора для матричных элементов электрического дипольного момента в молекуле из задачи 2.

5. Построить представление группы вращений в пространстве однородных полиномов третьей степени $P(x,y,z)=\sum\limits_{m+n+l=3}C_{mnl}x^my^nz^l$. Найти базис подпространства гармонических

полиномов. Разложить исходное представление на неприводимые и выразить базис последних через сферические функции Y_{lm}.

6. Разложить на неприводимые представление группы вращений **SO**(**3**) на тензорах третьего ранга в трехмерном пространстве. Рассмотреть полностью симметричную часть. Приводима ли она?

7. Центробежная поправка в гамильтониане многоатомной молекулы имеет вид $V=\sum_{ijkl}\tau_{ijkl}\,J_iJ_jJ_kJ_l$, где J_i – вектор углового момента, τ_{ijkl}– симметричный тензор. Сколько независимых компонент содержит тензор τ, если молекула имеет симметрию треугольника $\mathbf{D_3}$?

8. Две переменные z_1, z_2 преобразуются вещественной матрицей из группы G=**SL(2)**

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},\quad ad-cd=1.$$

Найти генераторы $\hat I_1,\hat I_2,\hat I_3$ группы G в представлении на функциях $w(z_1,z_2)$ и их коммутационные соотношения. Найти оператор Казимира, коммутирующий со всеми генераторами. Найти собственные функции оператора Казимира. Построить повышающий и понижающий операторы для $\hat I_3$.

ЗАДАНИЕ № 3

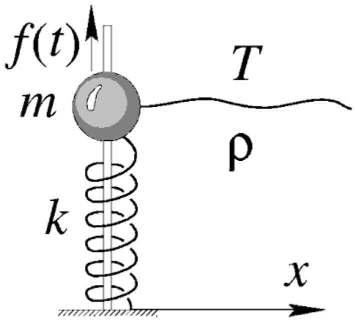
9. Найти функцию Грина и решение уравнения $y'''=f(x)$ с граничными условиями $y(0)=a$, $y(1)=0$, $y'(0)+y'(1)=0$.

10. Найти функцию Грина неоднородного уравнения теплопроводности на поверхности цилиндра радиуса R:

$$u_t=\chi\Delta u+f(z,\varphi,t).$$

Выписать решение задачи с источником $f=Q\delta(z-Vt)$.

11. Найти функцию Грина второго рода $G(x,t|t')$ механической системы, состоящей из шарика, скользящего по вертикальной спице, соединенного с пружинкой и полубесконечной струной, натянутой вдоль оси x.



$$\rho u_{tt}(x,t)=Tu_{xx}(x.t),\quad mu_{tt}(0,t)=-ku(0,t)+Tu_x(0,t)+f(t).$$

Задачи, предлагаемые на контрольных работах (5-й семестр)

Вариант 1

1. *(2 балла) Найти* $\operatorname{tg}\begin{pmatrix}1 & x\\ x & 1\end{pmatrix}$.
2. (4 балла) *Решить задачу Коши* $u_t + uu_x = 1, u(x,0) = \pm\frac{x}{1+x^2}$. Когда произойдет опрокидывание?
3. (2 балла) *Определить тип и привести к каноническому виду* $x^2u_{xx}+xu_x+u_{yy}=0$.
4. *(3балла) Найти автомодельную подстановку* $u_t=u_{xxx}$, $u(x,0)=\delta(x)$.
5. *(3 балла) Найти решение уравнения малых колебаний струны* $u_{tt} - u_{xx} = 0, u(0,t) = u_x(1,t) = 0$ *с начальными условиями*

$$u(x,0) = x - \frac{x^2}{2}, u_t(x,0) = 0.$$

Вариант 2

1. *(2 балла) Найти* $\operatorname{arctg}\begin{pmatrix}x & x\\ 2x & 1-2x\end{pmatrix}$.
2. (4балла) *Решить задачу Коши* $u_t + uu_x = 1, u(x,0) = 1/(1+\exp(\alpha x))$. Когда произойдет опрокидывание?
3. (2 балла) *Определить тип и привести к каноническому виду* $xu_{xx}+yu_{yy}+u_x+u_y=0$.
4. *(3балла) Найти автомодельную подстановку* $u^2u_t=u_{xx}$, $u(x,0)=\delta(x)$.
5. *(3 балла) Найти решение уравнения малых колебаний струны* $u_{tt} - u_{xx} = 0,\ u(0,t) = u(1,t) = 0$ *с начальными условиями*

$$u(x,0) = x - x^2, \qquad u_t(x,0) = 0.$$

Дополнительные задачи по курсу «Методы математической физики» (5-й семестр)

1. *Найти* $J_0(\sigma_2 x)$, *где* σ_2 – *матрица Паули*.
2. *Найти момент опрокидывания решения уравнения Хопфа* $u_t + uu_x = 0, u(x,0) = \sin x$.
3. *Определить тип и привести к каноническому виду* $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.
4. *Решить задачу Коши* $u_t + e^x u_x = u, u|_{x\to\infty} = e^{-t^2}$.
5. *Найти автомодельную подстановку для уравнения* $uu_t = u_{xx}, u(x,0) = \delta(x)$.
6. *Сводится ли уравнение Эйри* $y'' = xy$ *к гипергеометрическому*?
7. *Сводится ли к гипергеометрическому уравнение* $(ax^2 + bx + c)y'' + Axy' + By = 0$?
8. *Разделить переменные двумерного уравнения Гельмгольца* $\Delta u + k^2u = 0$ *в эллиптических координатах* $x = \operatorname{ch}\alpha\cos\beta$, $y = \operatorname{sh}\alpha\sin\beta$. *Сводится ли получившееся уравнение к гипергеометрическому?*
9. *Найти асимптотику интеграла* $\int_\gamma^\infty \exp\left(iqx - \sqrt{q^2-1}y\right)\frac{dq}{\sqrt{q^2-1}}$ *при* $x^2 + y^2 = r^2 \to \infty$. *Контур* γ *обходит разрез* $(-\infty,-1)$ *по верхнему, а* $(+1,+\infty,)$ *по нижнему берегу.*
10. *Найти асимптотику интеграла* $\int_0^\infty \exp(px - e^x)\frac{dx}{\sqrt{x}}, p\to\infty$
11. *Пользуясь представлением* $D_\nu(x) = e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-i\infty}^{i\infty} t^\nu e^{-xt+\frac{t^2}{2}}dt$, *найти асимптотику функции параболического цилиндра при* $\nu\to\infty$ *и фиксированном* x.
12. *Решить уравнение Гамильтона–Якоби с начальным условием* $\dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0, \quad S|_{t=0} = \exp x$.

13. *Найти общее решение уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Решить задачу Коши $u(1,y)=y^2, u_x(1,y)=0$.

14. *Струна длины l с закрепленными концами в начальный момент имеет форму полуокружности* $u(x,0)=\sqrt{x(l-x)}$ *и нулевую скорость. Найти зависимость смещения от координат и времени.*

15. *Найти собственные функции и энергии стационарных состояний двумерного осциллятора в полярных координатах* $-\Delta\psi+r^2\psi=2E\psi$. *Вычислить кратность вырождения.*

16. *Решить задачу Коши* $u_x{}^2-u_y{}^2=0, u(x,0)=x$.

17. *Пользуясь рекуррентным соотношением* $J'_m(t)=J_{m-1}(t)-J_{m+1}(t)$ *и начальными значениями* $J_m(0)=\delta_{m,0}$, *найти производящую функцию функций Бесселя* $G(z,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m J_m(t)$.

18. *Найти минимальную частоту собственных колебаний бесконечного упругого цилиндра радиуса R.*

Вопросы к коллоквиуму

1. Уравнение в частных производных, общее и частное решение.
2. Что такое линейное уравнение, уравнение порядка n, система уравнений?
3. Характеристики линейного однородного уравнения первого порядка.
4. На каких начальных поверхностях можно ставить задачу Коши?
5. Схема вычислений при решении линейного неоднородного уравнения первого порядка методом характеристик?
6. Схема вычислений при решении квазилинейного уравнения методом характеристик.
7. Почему происходит опрокидывание волны в уравнении Хопфа?
8. Соотношения на характеристиках системы линейных уравнений с N=2 переменными.
9. Инварианты Римана, простая волна.
10. Вывод формулы Даламбера.
11. Характеристики уравнения второго порядка с N=2 переменными.
12. Канонические переменные и канонический вид уравнения второго порядка.
13. Классификация по типам уравнений второго порядка с N>2 переменными.
14. Является ли канонический вид уравнений второго порядка единственным?
15. Автомодельное решение уравнения теплопроводности.
16. Уравнение Бюргерса и его решение в виде бегущей волны.
17. Разделение переменных, полное разделение.
18. Метод Фурье для однородного гиперболического уравнения.
19. Метод Фурье для однородного параболического уравнения.
20. Метод Фурье для неоднородного гиперболического уравнения.
21. Метод Фурье для неоднородного параболического уравнения.

Список вопросов, знание которых необходимо для сдачи экзамена

1. Общее и частное решение квазилинейного уравнения I порядка.
2. Канонический вид уравнения II порядка. Формула Даламбера.
3. Автомодельное решение уравнения теплопроводности.
4. Метод Фурье для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.
5. Разделение переменных в цилиндрических и сферических координатах.
6. Функции Бесселя, полиномы Лежандра и Эрмита.
7. Асимптотика интеграла Лапласа. Метод стационарной фазы.

Пример экзаменационного билета и дополнительных задач

1. **Найти асимптотику интеграла** $\int_0^\infty \exp(-t^3 - \lambda t^{-3})\mathrm{d}t, \lambda \to \infty$.
2. **Решить задачу Коши** $u_t + uu_x$=u, u(x,0)=x.
3. Решить задачу Коши $xu_y - yu_x = 1,\ u(1, y) = y^2$.
4. Найти решение уравнения Лапласа в единичном шаре с граничным условием $u|_{r=1} = 3\cos^2\theta - 1$.
5. Решить задачу Коши $u_t + uu_x = x, u(x, 0) = x$.

Задачи, предлагаемые на контрольных работах (6-й семестр)

Вариант 1

1. (2 балла) Может ли в группе из 35 элементов быть 7 мерное неприводимое представление?
2. (3 балла) Сколько классов сопряженных элементов в группе O собственных вращений куба? Перечислите эти классы.
3. (4 балла) Сколькими различными способами можно раскрасить грани тетраэдра в 4 различных заданных цвета, каждую грань своим цветом? Различными считаются раскраски, которые нельзя совместить друг с другом вращением тетраэдра.
4. (4 балла) Построить таблицу неприводимых характеров группы, порождаемой двумя элементами 4-го порядка P, Q: P^4=Q^4=1, P^2=Q^2, QPQ=P.
5. (2 балла) Три одинаковых грузика на плоскости, расположенные в вершинах равностороннего треугольника, соединены между собой и с центром одинаковыми пружинами. Найти кратности вырождения нормальных колебаний системы.

Вариант 2

1. (2 балла) Может ли в группе**Y** порядка 60 быть 8 мерное неприводимое представление?
2. (3 балла) Какие подгруппы есть в группе симметрии квадрата? Какие из них инвариантны?
3. (4 балла) Сколькими различными способами можно раскрасить грани октаэдра в 8 различных заданных цветов, каждую грань своим цветом? Различными считаются раскраски, которые нельзя совместить друг с другом вращением октаэдра.

4. (4 балла) Найти порядок группы, порождаемой двумя элементами 4-го порядка P, Q: $P^4=Q^4=1$, QPQ=P.
5. (2 балла) Четыре одинаковых грузика на плоскости, расположенные в вершинах квадрата, соединены между собой и с центром одинаковыми пружинами. Найти кратности вырождения нормальных колебаний системы.

Дополнительные задачи по курсу «Методы математической физики» (6-й семестр)

1. *Дата 20.11.2010 допускает перестановки цифр. Найти порядок группы симметрии.*
2. *Показать, что J-=-d/dz – понижающий оператор для J3=zd/dz- λ, где λ – комплексная константа, а z – комплексная переменная. Построить повышающий оператор.*
3. *Доказать, что* $f(x+\varepsilon)=exp\left(\varepsilon\frac{d}{dx}\right)f(x)$.
4. *Молекула* SF_6 *имеет форму правильного октаэдра. Найти кратности вырождения нормальных колебаний.*
5. Усреднить по углам тензор $a_i a_j a_k a_l$ (а - вектор длины 2).
6. *Как действует оператор Лапласа на тензор квадрупольного момента* $Q_{ij}=x_i x_j-\frac{1}{3}x^2\delta_{ij}$?
7. *Найти функцию Грина задачу* $y''+4y'+3y=0$, $y(0)=y(\infty)=0$, y(∞)=0.*Указание: Искать решение в виде* $y=exp(-3x)\,u(x)$.
8. *Построить функцию Грина двумерного уравнения теплопроводности* $u_t=\Delta u+f(z,\varphi,t)$ *на поверхности бесконечного цилиндра радиуса R.*
9. *Решить уравнение распространения волн* $u_t-cu_x+i\alpha u_{tt}=0$ *с точечным граничным условием* $u(0,t)=\delta(t)$ *и нулевым начальным условием. Указание: выполнить преобразование Фурье по времени.*
10. *Показать, что операторы*
$$K_1=\frac{1}{4}\left(a^{+2}+a^2\right),\quad K_2=\frac{1}{4i}\left(a^{+2}-a^2\right),\quad K_3=\frac{1}{4}\left(aa^++a^+a\right),$$
где $[a,a^+]=1$, *образуют алгебру Ли, и найти ее структурные константы. Найти квадратичную комбинацию генераторов, которая перестановочна с* $K_{1,2,3}$. *Выписать повышающий и понижающий операторы для* K_3 *и найти их матричные элементы.*
11. *Найти генераторы алгебры Ли группы **SL(2,R)** над полем вещественных чисел. Построить оператор Казимира, повышающий и понижающий операторы. Найти явный вид генераторов в представлении на функциях двух вещественных переменных.*
12. *Разложить на неприводимые представление группы вращений **SO(3)** на тензорах четвертого ранга в трехмерном пространстве. Рассмотреть полностью симметричную часть. Приводима ли она?*
13. *Вычислить функцию Грина двумерного волнового уравнения. Указание: Выполнить преобразование Фурье по времени.*
14. *Найти функцию Грина уравнения теплопроводности в бесконечном цилиндре радиуса R с нулевым граничным условием на поверхности.*
15. *Найти функции Грина для задачи* $u_{tt}=u_{xx}+\alpha^2 u$ *приначальных условиях* $u(x,0)=0, u_t(x,0)=p(x)$ *и стандартных граничных условиях убывание на бесконечности.*
16. *Показать, что действительное решение уравнения Гельмгольца* $\Delta u-k^2u=0$, *непрерывное вплоть до границы открытой области D, не может иметь в D положительного наибольшего значения.*

17. *Плоскость покрыта паркетом из правильных треугольников. Описать группу симметрии. Найти ее фактор-группу по подгруппе трансляций.*
18. *Молекула OsF_8 имеет форму куба. Найти кратности вырождения нормальных колебаний.*

Вопросы к коллоквиуму

1. Группа. Подгруппа.
2. Гомоморфизм. Изоморфизм.
3. Точечные и пространственные группы.
4. Абелева группа. Циклическая группа.
5. Порождающие элементы и определяющие соотношения.
6. Группа подстановок.
7. Порядок группы и элемента.
8. Правый смежный класс.
9. Индекс подгруппы.
10. Инвариантная подгруппа. Центр.
11. Фактор-группа
12. Сопряженные элементы. Геометрический критерий сопряженности поворотов вокруг разных осей и вокруг одной и той же оси на угол φ и $-\varphi$.
13. Матричное представление.
14. Единичное и точное представление.
15. Неприводимое представление.
16. Сопряженные представления.
17. Характер.
18. Ортогональность неприводимых характеров.
19. Разложение в прямую сумму неприводимых представлений.
20. Регулярное представление.

Список вопросов, знание которых необходимо для сдачи экзамена

1. Правые смежные классы, классы сопряженных элементов, инвариантные подгруппы в группе $\boldsymbol{D_3}$.
2. Неприводимые представления и характеры $\boldsymbol{D_3}$, $\boldsymbol{D_4}$ **и** ***SO(3)***.Разложение представления группы в прямую сумму неприводимых. Тензорное представление.
3. Кратность вырождения колебаний молекулы.
4. Размерность групп***GL(n), U(n), SU(n), O(n),SO(n).*** Параметризация в группах ***SU(2)*** и ***SO(3).***
5. Функция Грина оператора Штурма – Лиувилля. Условия на скачке. Нулевые моды.
6. Функция Грина уравнений Пуассона и Лапласа. Задачи Дирихле и Неймана. Метод изображений.
7. Функция Грина уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Правило обхода полюсов.

Пример экзаменационного билета

1. Правило обхода полюсов. Построить функцию Грина двумерного уравнения Шрёдингера $i\psi_t = \Delta\psi, \psi(\boldsymbol{r}, 0) = g(\boldsymbol{r})$.

2. Каждому повороту группы D3 соответствует линейное преобразование коэффициентов квадратичной формы $P(x, y, z) = \sum_{i+j+k=2} x^i y^j z^k$. Разложить полученное представление на неприводимые.

Пример дополнительных задач

1. Построить функцию Грина уравнения $y''+y'-2y=f(x)$, $y(0)=y'(1)=0$.
2. Построить функцию Грина уравнения $y''+\pi^2 y=f(x)$, $y(0)=y(1)=0$.
3. Найти функцию Грина уравнения теплопроводности на единичной окружности.

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде

Лист актуализации рабочей программы
по дисциплине «Методы математической физики»
по направлению подготовки 03.03.02 Физика
Профиль «Общая и фундаментальная физика»

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного